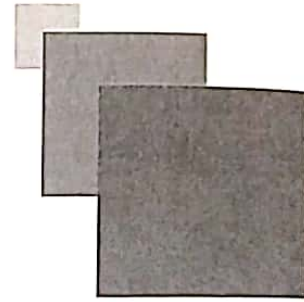


Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

**Cycle 2 – Modélisation des systèmes linéaires
continus invariants.
Vérifications de leurs performances.**

Table des matières



Objectifs	4
Introduction	5
I - Contexte, hypothèses et définitions	6
1. Les problématiques à résoudre	6
2. Structures d'un système de commande	6
3. Définition des performances d'un système de commande	8
4. Exercice : Mesures de performances	9
II - Étude des systèmes linéaires, continus et invariants	11
1. Définitions	11
2. Mise en équation d'un système dynamique	12
III - Transformation de Laplace	14
1. Définitions et notations	14
2. Propriétés de la transformée de Laplace	15
3. Transformées de Laplace usuelles	16
IV - Fonction de transfert d'un système linéaire	19
1. Fonctions de transfert	19
2. Exercice : Fonction de transfert d'un moteur à courant continu	21
V - Représentation d'un système linéaire par un schéma bloc	22
1. Définition et éléments de base	22
2. Exercice : Modélisation d'un moteur à courant continu	23
3. Association de blocs en série	23
4. Association de blocs en parallèle	24
5. Détermination graphique de la fonction de transfert globale d'un système	24

6. Fonction de transfert en boucle ouverte	26
7. Formule de Black	26
8. Exercice : Réduction de schéma-blocs	27
9. Règles de transformation des schémas-blocs	27
10. Exercice : Réduction de schéma-blocs	29
11. Exercice : Réduction de schéma-blocs	29
12. Système bouclé à retour unitaire	30

Solutions des exercices	31
--------------------------------	-----------

Objectifs

- Déterminer les fonctions de transfert à partir d'équations physiques (modèle de connaissance)
- Analyser ou établir le schéma-bloc du système
- Déterminer les fonctions de transfert

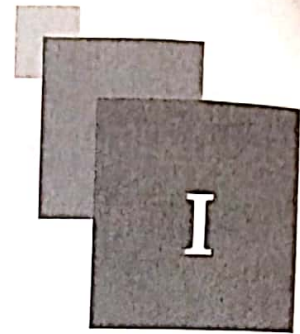
Introduction

Les technologies de régulation et d'asservissement ont beaucoup évolué au cours du 20^{ème} siècle. Aux premières régulations, purement mécaniques, ont succédé des systèmes de commande utilisant des composants électriques, hydrauliques ou pneumatiques. Ensuite, les progrès de l'informatique (l'augmentation de la vitesse de traitement de l'information et la baisse des coûts) ont conduit à basculer des commandes analogiques (réalisées en hydraulique, en électrique ou en électronique) en commande numérique, implantée sur microprocesseur.

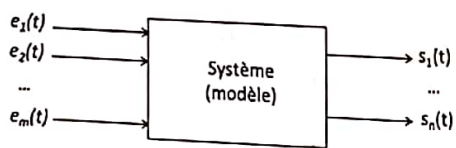
Les composants numériques travaillent avec des signaux échantillonnés et nécessitent une étude théorique différente. La difficulté à travailler en même temps sur des composants analogiques (la machine asservie) et des composants numériques (le contrôleur) conduit généralement à mener la totalité de l'étude dans le domaine analogique, approximation raisonnable tant que la fréquence d'échantillonnage est bien supérieure à la fréquence de coupure de la machine.

Le programme de CPGE se limite à l'étude analogique des systèmes mono-variables (une entrée et une sortie scalaire), décrits à l'aide d'équations différentielles temporelles d'ordre quelconque. La commande moderne, qui permet d'étudier des systèmes multi-variables est enseignée en école d'ingénieur, ainsi que la commande numérique.

Contexte, hypothèses et définitions



1. Les problématiques à résoudre



Modélisation d'un système

Tout système à étudier peut être représenté comme un opérateur, faisant correspondre à un ou plusieurs signaux d'entrée e_i , un ou plusieurs signaux de sortie s_i . Ces grandeurs physiques d'entrée et de sortie sont des fonctions du temps $e_i(t)$ et $s_i(t)$.

Selon les informations connues et celles recherchées, l'étude du système peut être faite selon différentes perspectives :

Détermination du comportement : il s'agit de déterminer la réponse du système à une entrée donnée. Ce type d'étude peut être mené si on connaît un modèle de comportement du système.

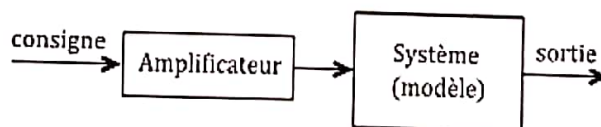
Détermination de la commande : connaissant le modèle de comportement du système et la réponse attendue, il s'agit de déterminer quel est le signal à injecter en entrée pour obtenir cette réponse.

Identification du modèle de comportement : dans le cas où le modèle de comportement du système est inconnu, on cherche à l'approcher en injectant des signaux d'entrée parfaitement connus et calibrés et en mesurant les signaux de sortie correspondants. Une fois que le modèle a été identifié, il est ensuite possible de l'utiliser pour résoudre un problème de détermination de la commande ou du comportement.

2. Structures d'un système de commande

Commande en chaîne directe ou Boucle Ouverte (BO)

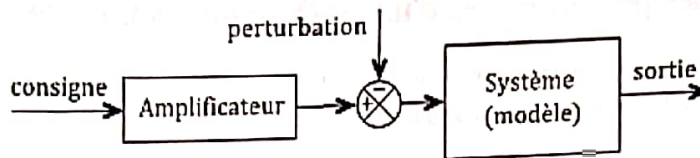
Un système fonctionne en chaîne directe s'il n'y a pas de contrôle sur la manière dont la commande a été exécutée (cf. figure ci-dessous ou cas du véhicule fonctionnant sans régulateur automatique de vitesse).



Commande d'un système en chaîne directe

Lorsque le système fonctionne dans son environnement, il arrive fréquemment qu'il soit soumis à des phénomènes non contrôlés par l'utilisateur, qui peuvent modifier son comportement. Par exemple pour un véhicule, il peut s'agir de la présence d'une montée ou d'une descente, de vent de face, ...

On distingue donc deux types d'entrées sur un système : *consigne* et *perturbation* (cf. figure ci-dessous).

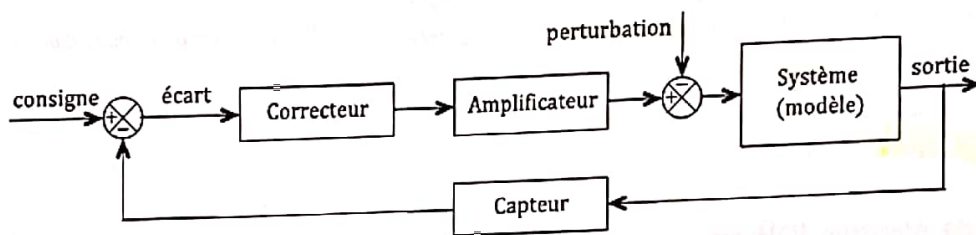


Commande d'un système en chaîne directe en présence de perturbations

Pour obtenir le comportement attendu malgré la présence de perturbations, on réalise un asservissement du système de commande, qui fonctionne alors en boucle fermée.

Asservissement du système de commande, ou commande en Boucle Fermée (BF)

Un système fonctionne en *boucle fermée* si une mesure de la sortie est réalisée afin de la comparer à la consigne et d'agir sur le système en conséquence (cf. figure ci-dessous).



Commande d'un système en boucle fermée

L'asservissement du système de commande consiste à mesurer la sortie, pour calculer un *écart* par rapport à la consigne. Cet écart devient la grandeur d'entrée du processus. Les composants intervenant dans la mesure de la sortie et sa comparaison avec la consigne constituent la *chaîne de retour*. D'autre part, un *correcteur* a été ajouté à la *chaîne directe*.

Plusieurs types de systèmes asservis peuvent être distingués :

🔑 Définition : Régulateur

Un système est dit *régulateur* lorsque la consigne est constante. L'asservissement consiste à obtenir une sortie variant peu au voisinage de la consigne, malgré l'effet des perturbations sur le récepteur. Cette catégorie englobe la majorité des systèmes automatiques. Par exemple, dans l'asservissement du régulateur de vitesse d'un véhicule, traité précédemment, la consigne est une vitesse constante et les perturbations extérieures sont les variations de pente ou le changement de direction du vent.

🔑 Définition : Suiveur

Un système est dit *suiveur* quand la consigne est variable : pilote automatique de véhicule (suivi de trajectoire), four pour traitement thermique des métaux réalisant des cycles de température, etc.

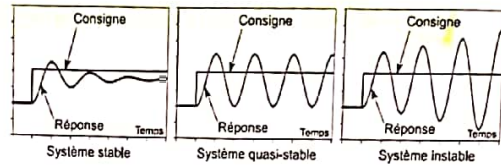
Les systèmes asservis peuvent également être classés en fonction de la nature de la grandeur physique de sortie : par exemple, si celle-ci est la vitesse d'un véhicule, on parle d'asservissement de vitesse. Les asservissements de position, de température, de force, sont aussi courants.

3. Définition des performances d'un système de commande

Le fonctionnement d'un système automatique est caractérisé par un certain nombre de performances. Nous chercherons dans la suite de ce cours (puis en deuxième année) à les prévoir et à les optimiser. Ces performances sont détaillées ci-dessous. Nous verrons dans la suite de ce cours comment les évaluer sur différents systèmes.

Stabilité

La première des performances à vérifier est la *stabilité* du système. En effet, certains systèmes peuvent être instables, c'est-à-dire que leur réponse diverge ou oscille sans se stabiliser avec un comportement équivalent au signal d'entrée. La stabilité est la capacité du système à converger vers une valeur constante lorsque $t \rightarrow \infty$ lorsque l'entrée est un échelon.



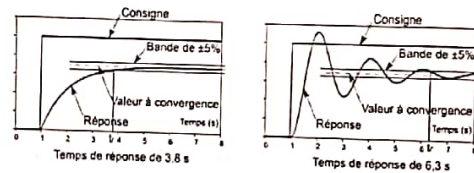
Performance de stabilité d'un système

rapidité

Il est nécessaire de définir un critère de *rapidité* : c'est-à-dire à définir combien de temps faut-il au système pour se stabiliser.

Un des critères couramment utilisé pour définir la rapidité d'un système est le temps nécessaire pour que l'écart entre la réponse à un échelon et la valeur à la convergence soit inférieur à 5%.

Le temps de réponse à 5%, noté $t_{r5\%}$ est l'instant où la courbe de réponse rentre dans la bande des 5% autour de la valeur finale sans plus en ressortir.



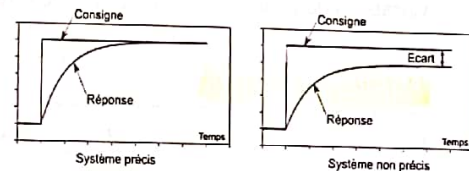
Performance de rapidité d'un système

Précision

Il faut vérifier la précision : le système asservi atteint-il la valeur de consigne ?

La *précision* est définie par l'écart entre la réponse permanente (limite quand $t \rightarrow \infty$) à un échelon et la valeur de consigne.

On peut donner cette valeur sous la forme d'un pourcentage relatif à la valeur de consigne.



Performance de précision d'un système

Dépassement

Il faut également vérifier la *limitation du dépassement*.

La réponse d'un système présente des dépassements si elle dépasse la valeur à la convergence avant de converger.

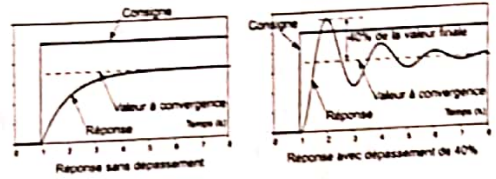
La valeur du premier dépassement D_1 correspond à la différence entre la valeur du dépassement et la valeur finale.

En notant t_1 , l instant du premier dépassement :

$$D_1 = s(t_1) - s_{\infty}$$

On préfère souvent donner la valeur du premier dépassement en pourcentage par rapport à la valeur finale :

$$D_1 \% = \frac{s(t_1) - s_{\infty}}{s_{\infty}} \cdot 100$$



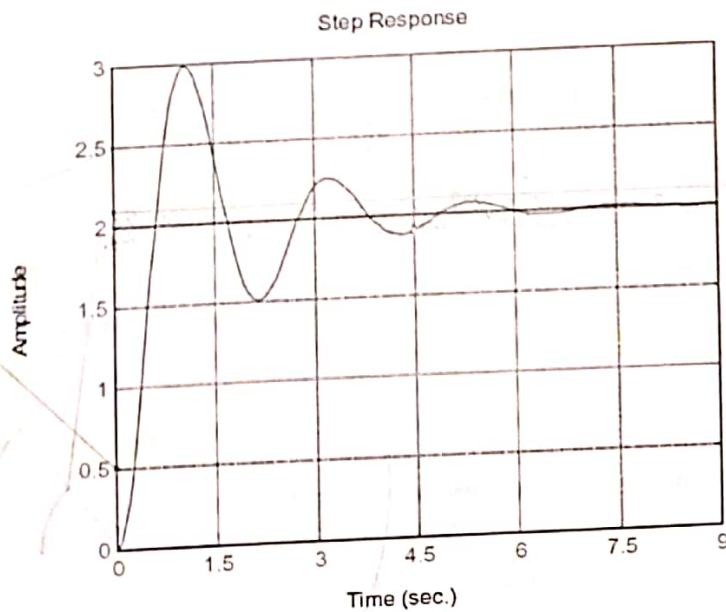
Performance de limitation du dépassement d'un système

Remarque

On recherche pour un système une bonne **stabilité**, un bon **amortissement** et une bonne **rapidité**. Or, augmenter la rapidité d'un système entraîne une diminution de son amortissement voire l'instabilité du système. On recherchera donc le meilleur compromis entre stabilité, rapidité et amortissement. C'est l'objet de la correction des systèmes asservis, étudiée en deuxième année.

4. Exercice : Mesures de performances

L'entrée du système est un échelon de hauteur 2 (S.I.). La réponse du système est donnée ci-dessous :



Question

Déterminer :

- Le temps de réponse à 5%.
- La précision (valeur de l'écart).
- La valeur du dépassement.

1) $T_{5\%} = 4,5 \Delta$

2) $\varepsilon = 0 (\text{à } \infty)$

3) $D_{\%} = \frac{3-2}{2} \times 100$

$D_{\%} = 50\%$

à Retenir :

- Stabilité
- Rapidité
- Précision
- Dépassement

- Régulateur
- Suiveur
- Chaîne directe (BO)
- Asservissement (BF)

Étude des systèmes linéaires, continus et invariants

II

1. Définitions

↳ Définition : Système mono-variable

Un système mono-variable est un système ne possédant qu'une seule entrée et une seule sortie. Bien que les systèmes automatisés puissent gérer plusieurs sorties en fonction de plusieurs entrées principales, nous nous limiterons, pour des raisons de simplicité, aux systèmes mono-variables.

Si un système fonctionne avec plusieurs entrées (une consigne et une perturbation par exemple), chaque entrée aura son propre effet sur la sortie en cas de linéarité (cf. définition ci-dessous)

↳ Définition : Système invariant

Les caractéristiques de comportement d'un système invariant sont indépendantes du temps. Si une même entrée se produit à deux instants distincts (t_1 et t_2), alors les deux sorties temporelles $s_1(t)$ et $s_2(t)$ dues à chacune des deux entrées seront identiques.



↳ Définition : Système continu

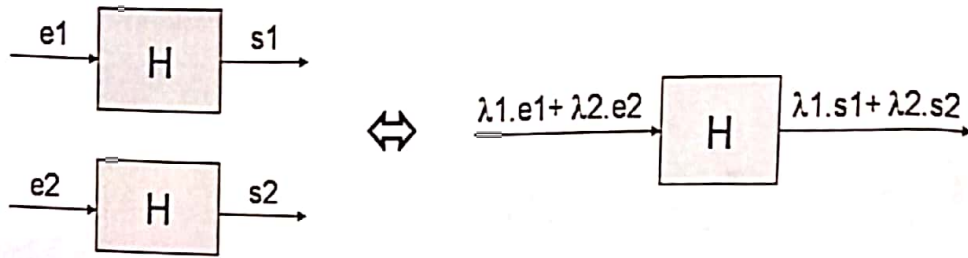
Un système est à temps continu si les fonctions d'entrée et de sortie sont définies pour tout instant t . Les signaux sont alors dits analogiques.

↳ Définition : Systèmes linéaires

Un modèle est dit linéaire si la sortie $s(t)$ d'un système soumis à une combinaison linéaire d'entrées est égale à la même combinaison linéaire de la réponse à chacune de ces entrées.

Si $e(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i(t)$ alors $s(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i s_i(t)$ avec $s_i(t)$ la réponse du système à l'entrée $e_i(t)$.

La relation de comportement d'un système linéaire peut se mettre sous la forme d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Cette propriété sera à la base des développements ultérieurs.



↪ **Définition : Théorème de superposition.**

Soit un système linéaire, continu et invariant soumis à deux entrées, si ce système est soumis à deux entrées, alors chaque entrée aura son propre effet sur la sortie. Les deux entrées sont indépendantes et la présence d'une des entrées ne modifie pas l'effet de l'autre entrée.

La sortie sera alors la somme de l'effet de chacune des entrées.

2. Mise en équation d'un système dynamique

Pour la définition qui suit, et pour toute la suite du cours, nous utiliserons les notations suivantes

- $e^{(0)}(t)$ désigne la fonction $e(t)$;
- $e^{(1)}(t)$ désigne la dérivée première $\frac{de}{dt}(t)$ de la fonction $e(t)$;
- $e^{(k)}(t)$ désigne la dérivée d'ordre k $\frac{d^k e}{dt^k}(t)$ de la fonction $e(t)$.

modèle mathématique

Le modèle mathématique (ou modèle dynamique) de comportement d'un système mono-variable, linéaire, continu et invariant peut être décrit par l'équation différentielle suivante :

$$a_0 \cdot e^{(0)}(t) + a_1 \cdot e^{(1)}(t) + \dots + a_m \cdot e^{(m)}(t) = b_0 \cdot s^{(0)}(t) + b_1 \cdot s^{(1)}(t) + \dots + b_n \cdot s^{(n)}(t)$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficients réels constants, à laquelle doivent être ajoutées n conditions limites.

Exemple traité en introduction : comportement dynamique d'un véhicule

On rappelle le schéma bloc modélisant le comportement du régulateur de vitesse automobile étudié en introduction de ce cours.

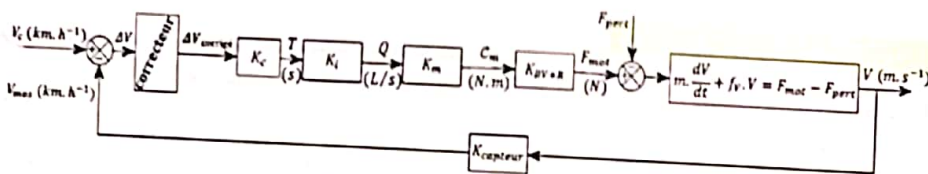


Schéma bloc du système complet

L'application du principe fondamental de la dynamique au véhicule dans un référentiel galiléen nous avait permis d'obtenir l'équation de comportement suivante :

$$m \cdot \frac{dV}{dt} + f_v \cdot V = F_{mot}$$

À laquelle il faut ajouter une condition initiale sur la vitesse : $V(0) = 0$

En l'absence du correcteur, il est possible de calculer analytiquement l'évolution temporelle de la vitesse du véhicule en réponse à une consigne donnée par le conducteur (simple équation différentielle du premier ordre à résoudre).

Afin d'améliorer les performances du système, un composant électronique, appelé correcteur, avait été introduit. Son comportement est modélisé par l'équation suivante :

$$\Delta V_{\text{corrigé}}(t) = K_p \cdot \Delta V(t) + K_i \cdot \int \Delta V(t) \cdot dt + K_d \cdot \frac{\Delta V(t)}{dt}$$

En présence de ce correcteur et de la boucle fermée, le calcul analytique de l'évolution de la vitesse du véhicule devient impossible. Nous allons avoir besoin d'un outil de résolution adapté à ce genre de problématique : *la transformée de Laplace*.

Transformation de Laplace



Objectifs

Le but de ce chapitre est de travailler sur une transformation des équations différentielles linéaires à coefficients constants permettant d'obtenir des équations équivalentes mais plus simples à manipuler.

L'avantage principal de cet outil mathématique, largement utilisé en ingénierie, est de permettre la caractérisation de systèmes complexes sans avoir à calculer la réponse temporelle (stabilité, précision, rapidité, etc.). Cette transformation s'appelle la transformation de Laplace.

1. Définitions et notations

Les fonctions introduites dans les modèles mathématiques des systèmes physiques sont des fonctions réelles de la variable réelle t , le temps. On peut citer, par exemple, les accélérations, les vitesses ou les positions de solides dans l'espace, l'intensité électrique, les différences de potentiel, etc.

Si f est une de ces fonctions alors f est une fonction **causale**, c'est-à-dire définie pour tout t positif et nulle pour $t < 0$:

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \begin{cases} f(t) & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \end{cases}$$

À cette fonction f , on associe, sous réserve d'existence, une fonction complexe F d'une variable complexe p ($p = \alpha + j \cdot \omega$), définie de la façon suivante :

$$F : \begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow \mathbb{C} \\ p & \mapsto F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-p \cdot t} \cdot dt \end{cases}$$

Cette fonction F est unique. On la nomme *transformée de Laplace* de la fonction f , et on la note $L[f]$. Usuellement (lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté) la transformée de Laplace d'une fonction est notée par la lettre majuscule correspondante : $F(p) = L[f(t)]$, $I(p) = L[i(t)]$, $U(p) = L[u(t)]$, $V(p) = L[v(t)]$, etc.

Remarque

L'existence de la transformée de Laplace de la fonction f dépend de la convergence de l'intégrale impropre. On peut démontrer que cette convergence est vérifiée si la partie réelle α de la variable p est supérieure à une valeur a appelée abscisse de convergence. Dans les cas rencontrés en SII, les conditions d'existences seront toujours réunies.

Remarque

L'étude des fonctions complexes de variable complexe n'étant pas au programme de mathématiques en CPGE, nous nous contenterons d'énoncer les résultats nécessaires pour le cours de commande des systèmes linéaires asservis.

Remarque

Dans les pays anglo-saxons, la variable complexe de Laplace est notée s . Cette notation pourra être rencontrée dans certains ouvrages.

Linéarité.

La transformation de Laplace est linéaire injective de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , c'est à dire que pour toutes fonctions f et g de \mathbb{R} et pour tout réel a :

$$L[f + g] = L[f] + L[g]$$

$$L[a \cdot f] = a \cdot L[f]$$

$$L[f] = L[g] \Rightarrow f = g$$

Transformée de Laplace inverse

La transformée de Laplace inverse, notée $L^{-1}[F(p)] = f(t)$, possède la même propriété de linéarité.

2. Propriétés de la transformée de Laplace**Transformée de Laplace de la dérivée d'une fonction.**

On admettra pour toute la suite de ce chapitre les notations et hypothèses suivantes :

f est une fonction réelle de la variable réelle t

f est une fonction causale (nulle pour $t < 0$)

$F = L[f]$ est sa transformée de Laplace, fonction complexe de la variable complexe $p = \alpha + j \cdot \omega$

f et $L[f]$ existent

On montre alors que $L\left[\frac{df}{dt}\right]$, la transformée de Laplace de la dérivée de f , s'exprime par :

$$L\left[\frac{df}{dt}\right] = p \cdot L[f] - f(0^+) = p \cdot F(p) - f(0^+)$$

De même, on montre que $L\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right]$, la transformée de Laplace de la dérivée seconde de f , s'exprime par :

$$L\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right] = p^2 \cdot L[f] - p \cdot f(0^+) - f^{(1)}(0^+) = p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0^+) - f^{(1)}(0^+)$$

Après généralisation à l'ordre k , on obtient :

$$L\left[\frac{d^k f}{dt^k}\right] = p^k \cdot F(p) - \sum_{i=0}^{k-1} p^i \cdot f^{(k-1-i)}(0^+)$$

Fondamental

On retrouve dans cette expression les valeurs initiales (à $t = 0$) de la fonction f et de ses dérivées successives jusqu'à l'ordre inférieur à l'ordre de dérivation ($k-1$). Dans le cas où ces conditions initiales sont nulles, l'expression se simplifie.

$$L\left[\frac{df}{dt}\right] = p \cdot F(p) - L\left[\frac{d^k f}{dt^k}\right] \equiv p^k \cdot F(p)$$

Fondamental : Transformée de Laplace de la primitive d'une fonction.

En utilisant le résultat précédent, on peut montrer que la transformée de Laplace de la primitive de f est :

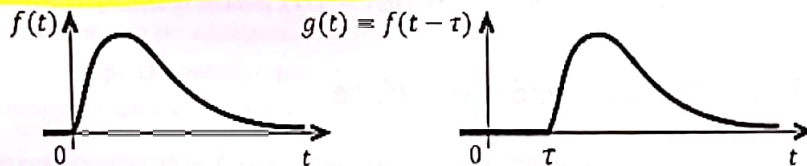
$$G(p) = L\left[\int_0^t f(\tau) \cdot d\tau\right] = \frac{F(p)}{p}$$

Cette propriété n'est valable que pour une intégration de 0 à t de la fonction f .

Théorème du retard

Si g est la fonction retardée d'un temps τ de la fonction f , c'est-à-dire $g(t) = f(t - \tau)$ alors :

$$G(p) = L[g(t)] = L[f(t - \tau)] = e^{-\tau p} \cdot F(p)$$



Fondamental : Théorème de la valeur initiale

Sous l'hypothèse supplémentaire que $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$ existe, la valeur initiale de $f(t)$ peut se calculer à l'aide de la transformée de Laplace F de f :

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p \cdot F(p)$$

Fondamental : Théorème de la valeur finale

Sous les hypothèses supplémentaires que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ existe, c'est-à-dire si le système est stable, la limite à la convergence en temps de la fonction f peut se calculer à l'aide de la transformée de Laplace :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot F(p)$$

Remarque

Il est indispensable de vérifier la stabilité du système étudié avant de chercher à appliquer le théorème de la valeur finale.

3. Transformées de Laplace usuelles

Remarque :

La fonction H est la fonction échelon ou fonction de Heaviside. Elle est définie sur \mathbb{R} par :

$$H = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Cette fonction permet de s'assurer que l'on applique la transformation de Laplace sur des grandeurs physiques causales. Cette fonction est parfois également notée u ou h .

Transformées de Laplace à connaître parfaitement

Note :

- e_0 et a sont des constantes réelles
- j est le nombre complexe tel que $j^2 = -1$

Fondamental : Dirac

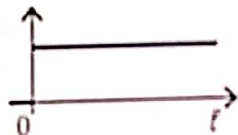
$$f(t) = \delta(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



$$F(p) = 1$$

Fondamental : Échelon

$$f(t) = e_0 \cdot H(t)$$



$$F(p) = \frac{e_0}{p}$$

Fondamental : Rampe

$$f(t) = e_0 \cdot t \cdot H(t)$$



$$F(p) = \frac{e_0}{p^2}$$

Fondamental : Exponentielle

$$f(t) = e_0 \cdot e^{-at} \cdot H(t)$$

Transformées de Laplace usuelles



$$F(p) = \frac{e_0}{p + a}$$

Fonction de transfert d'un système linéaire

IV

1. Fonctions de transfert

La transformée de Laplace de la dérivée à l'ordre k d'une fonction permet de traduire n'importe quelle équation différentielle linéaire à coefficients réels constants en une équation polynomiale.

À condition que les conditions initiales soient nulles, la transformée de Laplace de la dérivée à l'ordre k de la fonction $f(t)$ se calcule de la façon suivante :

$$L\left[\frac{d^k f}{dt^k}\right] = p^k \cdot F(p)$$

Nous avons vu que tout système linéaire est régi par une équation de la forme :

$$a_0 \cdot e^{(0)}(t) + a_1 \cdot e^{(1)}(t) + \dots + a_m \cdot e^{(m)}(t) = b_0 \cdot s^{(0)}(t) + b_1 \cdot s^{(1)}(t) + \dots + b_n \cdot s^{(n)}(t)$$

X Méthode : Mettre une équation différentielle sous la forme d'une fonction de transfert

Faire la transformée de Laplace de l'équation différentielle :

- pour chaque dérivation dans le temps, il faut effectuer une multiplication par p dans l'espace de Laplace,
- il faut remplacer chaque grandeur physique $x(t)$ variable dans le temps par sa transformée de Laplace $X(p)$.

Faire apparaître la F.T par factorisation.

L'application de la transformation de Laplace aux deux membres de cette équation différentielle donne :

$$a_0 \cdot E(p) + a_1 \cdot p \cdot E(p) + \dots + a_m \cdot p^m \cdot E(p) = b_0 \cdot S(p) + b_1 \cdot p \cdot S(p) + \dots + b_n \cdot p^n \cdot S(p)$$

$$\Leftrightarrow [a_0 + a_1 \cdot p + \dots + a_m \cdot p^m] \cdot E(p) = [b_0 + b_1 \cdot p + \dots + b_n \cdot p^n] \cdot S(p)$$

Ce résultat est fondamental. Il montre que la fonction de sortie $s(t)$, représentée par sa transformée de Laplace $S(p)$, s'exprime en fonction de la fonction d'entrée $e(t)$, représentée par sa transformée de Laplace $E(p)$ et des coefficients a_i et b_j définissant le modèle du système :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{a_0 + a_1 \cdot p + \dots + a_m \cdot p^m}{b_0 + b_1 \cdot p + \dots + b_n \cdot p^n}$$

Pour un système linéaire asservi, la sortie $S(p)$ s'exprime comme le produit de l'entrée $E(p)$ par une fraction rationnelle en p . Cette forme est beaucoup plus aisée à manipuler qu'une équation différentielle de variables réelles.

Fondamental

Cette fraction rationnelle, qui exprime le rapport de la sortie sur l'entrée dans l'espace de Laplace, est appelée *fonction de transfert*. Elle sera notée $H(p)$:

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{a_0 + a_1 \cdot p + \dots + a_m \cdot p^m}{b_0 + b_1 \cdot p + \dots + b_n \cdot p^n}$$

Exemple

Un local possède une chaleur massique c et un volume V . On note μ_0 , la masse volumique de l'air.

Les échanges de chaleur sont modélisés par une résistance thermique R_{th} .

θ_{int} la température intérieure et θ_{ext} la température extérieure ont respectivement pour transformée de Laplace T_{int} et T_{ext} .

Soit l'équation différentielle modélisant l'évolution de la température intérieure en fonction de la température extérieure :

$$\mu_0 \cdot V \cdot c \cdot \frac{d\theta_{int}}{dt} = \frac{\theta_{ext}(t) - \theta_{int}(t)}{R_{th}}$$

Transformée de Laplace de l'équation :

$$\mu_0 \cdot V \cdot c \cdot p \cdot T_{int}(p) = \frac{T_{ext}(p) - T_{int}(p)}{R_{th}}$$

Détermination de la fonction de transfert :

$$\mu_0 \cdot V \cdot c \cdot p \cdot T_{int}(p) + \frac{T_{int}(p)}{R_{th}} = \frac{T_{ext}(p)}{R_{th}}$$

$$\left(\mu_0 \cdot V \cdot c \cdot p + \frac{1}{R_{th}} \right) \cdot T_{int}(p) = \frac{T_{ext}(p)}{R_{th}}$$

$$\left(\frac{\mu_0 \cdot V \cdot c \cdot R_{th} \cdot p + 1}{R_{th}} \right) \cdot T_{int}(p) = \frac{T_{ext}(p)}{R_{th}}$$

$$\boxed{\frac{T_{int}(p)}{T_{ext}(p)} = \frac{1}{\mu_0 \cdot V \cdot c \cdot R_{th} \cdot p + 1}}$$

Cette fonction de transfert est un modèle caractérisant, dans le domaine de Laplace, le comportement du système étudié.

Une fraction rationnelle est un quotient de deux polynômes, de degrés respectifs m et n , notés $N(p)$ et $D(p)$ (numérateur et dénominateur de la fraction).

Le numérateur et le dénominateur peuvent être factorisés de la façon suivante :

$$N(p) = a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \dots + a_m \cdot p^m = a_m (p - z_m)(p - z_{(m-1)}) \dots (p - z_1)$$

$$D(p) = b_0 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2 + \dots + b_n \cdot p^n = b_n (p - p_n)(p - p_{(n-1)}) \dots (p - p_1)$$

Définition : Zéros et Pôles de $H(p)$

On appelle *zéros* de $H(p)$ les valeurs z_i de p qui annulent le numérateur. (Ce sont les racines de $N(p)$)

pôles

Définition : Zéros de $H(p)$

On appelle *pôles de $H(p)$* les valeurs p_i de p qui annulent le dénominateur. (Ce sont les racines de $D(p)$)

Ces valeurs sont caractéristiques de la fonction de transfert et permettront de prévoir certaines des performances d'un système asservi, comme par exemple sa stabilité.

Complément : Forme canonique d'une fonction de transfert :

il s'agit de la forme particulière de la fraction rationnelle $H(p)$ telle que le monôme de degré zéro soit égal à 1.

$$H(p) = \frac{a_0 + a_1 \cdot p + \dots + a_m \cdot p^m}{b_0 + b_1 \cdot p + \dots + b_n \cdot p^n} = \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{1 + a'_1 \cdot p + \dots + a'_m \cdot p^m}{1 + b'_1 \cdot p + \dots + b'_n \cdot p^n}$$

- K est appelé *gain statique* de la fonction de transfert.
- $n = n' + \alpha$ est appelé *ordre* de la fonction de transfert.
- α est appelé *classe* de la fonction de transfert (correspond au nombre de pôles nuls).

Note : α sera souvent nul dans les exercices de première année de CPGE.

2. Exercice : Fonction de transfert d'un moteur à courant continu

Soit les équations régissant le fonctionnement d'une machine à courant continue commander par une tension u et tournant à la vitesse ω .

Équation électrique : $u(t) = R \cdot i(t) + L_m \frac{di}{dt} + k \cdot \omega(t) \rightarrow U(p) = R I(p) + p L_m I(p) + k \Omega(p)$

Équation mécanique : $J \cdot \frac{d\omega}{dt} = k \cdot i(t) - f \cdot \omega \rightarrow J_p \Omega(p) = k I(p) - f \Omega(p)$

[solution n°2 p.31]

Question

1. Déterminer la fonction de transfert $\frac{\Omega(p)}{U(p)}$ en considérant toutes les conditions initiales comme nulles.
2. Mettre la fonction de transfert sous forme canonique.
3. Donner le gain statique, l'ordre et la classe de la fonction de transfert.
4. Quel est le nombre de pôles et de zéros ?

1)
$$\begin{cases} U(p) = R I(p) + p L_m I(p) + k \Omega(p) \\ J_p \Omega(p) = k I(p) - f \Omega(p) \end{cases}$$

Gain statique $\left(\frac{k}{k^2 + fR} \right)$

Classe $\frac{1}{1 + \frac{(fR + p L_m)}{k^2 + fR} p}$

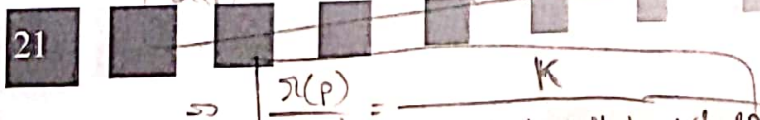
ordre $+ \frac{(p L_m)}{(k^2 + fR)} p^2$

4) Pôles : 0
Zéros : 0

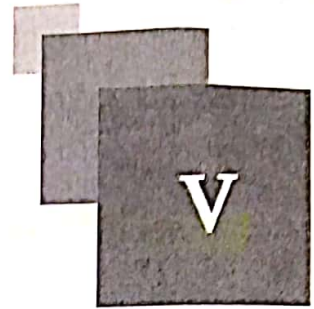
$J_p R + J L_m p^2$
 $+ f R + f L_m p + k^2$
 $= J L_m p^2 + (f R + f L_m) p$
 $+ k^2 + f R$

$$\Rightarrow \frac{U(p)}{\Omega(p)} = \frac{R(f p + f) + p L_m (f p + f) + k}{k}$$

$$\frac{U(p)}{\Omega(p)} = \frac{(f p + f)(R + p L_m) + k^2}{k}$$



Représentation d'un système linéaire par un schéma bloc



1. Définition et éléments de base

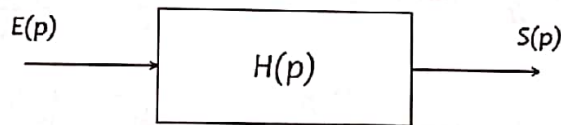
Nous avons vu précédemment qu'un système linéaire se caractérise par sa fonction de transfert $H(p)$, et que l'entrée $E(p)$, appliquée à ce système engendre la sortie $S(p)$ telle que :

$$S(p) = H(p) \cdot E(p)$$

Pour faciliter la simulation du comportement d'un tel système, on utilise un outil de représentation graphique : un *schéma-bloc*. Ce dernier traduit graphiquement le comportement du système exprimé dans le domaine de Laplace.

Fondamental

$$S(p) = H(p) \cdot E(p)$$



Le bloc représente le système ou un sous-ensemble d'un système et a un sens multiplicatif. Il contient la fonction de transfert et caractérise la relation entre les grandeurs d'entrée et de sortie.

La modélisation d'un système automatique complexe implique en général la présence de plusieurs blocs reliés entre eux.

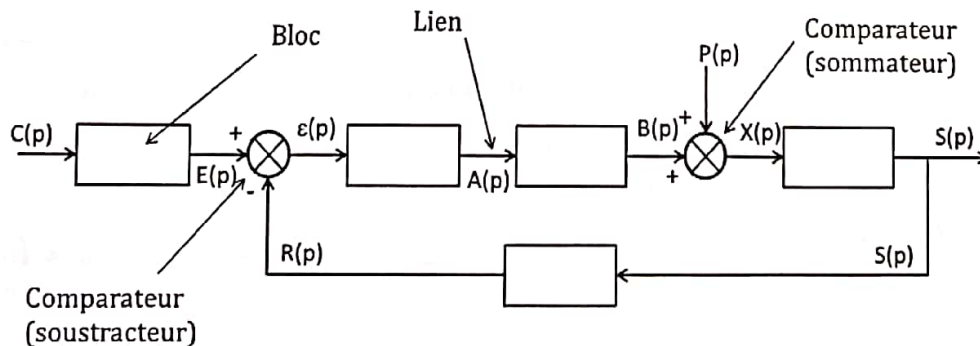


Schéma bloc générique d'un système asservi

2. Exercice : Modélisation d'un moteur à courant continu

La mise sous forme de schéma bloc peut être détaillée pour faire apparaître différentes grandeurs internes au système.

Nous pouvons reprendre par exemple les équations dans le domaine de Laplace d'une MCC vues précédemment :

$$I(p) = \frac{1}{R+Lp} (U(p) - k\Omega(p))$$

$$U(p) = (R + Lp).I(p) + k.\Omega(p)$$

$$J.p.\Omega(p) = k.I(p) - f.\Omega(p)$$

$$\text{avec } C_m(p) = k.I(p)$$

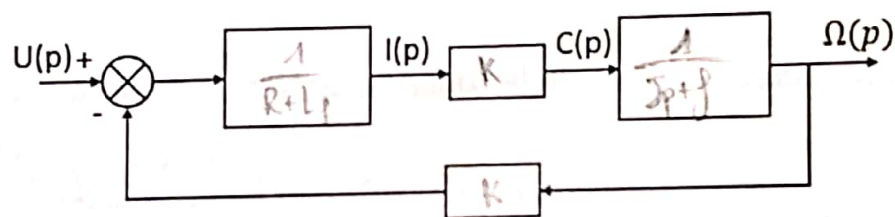
$$Jp \Omega(p) = C(p) - f \Omega(p)$$

Cette représentation est particulièrement utile sous Matlab Simulink ou Scilab Xcos (Ce sont des logiciels de simulation des systèmes linéaires invariants continus) car elle permet de simuler et visualiser l'évolution d'une variable interne comme le courant circulant dans le moteur.

Question

[solution n°3 p.31]

Compléter les blocs du schéma ci-dessous à partir des équations ci-dessus :



Indice :

En mettant les équations sous cette forme :

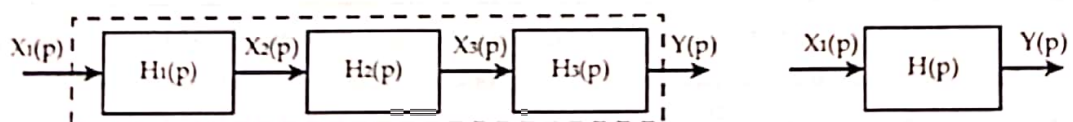
$$\Omega(p) = \frac{1}{J.p + f} \cdot C(p)$$

$$C(p) = k.I(p)$$

$$I(p) = \frac{1}{L.p + R} (U(p) - k \cdot \Omega(p))$$

3. Association de blocs en série

✂ Méthode

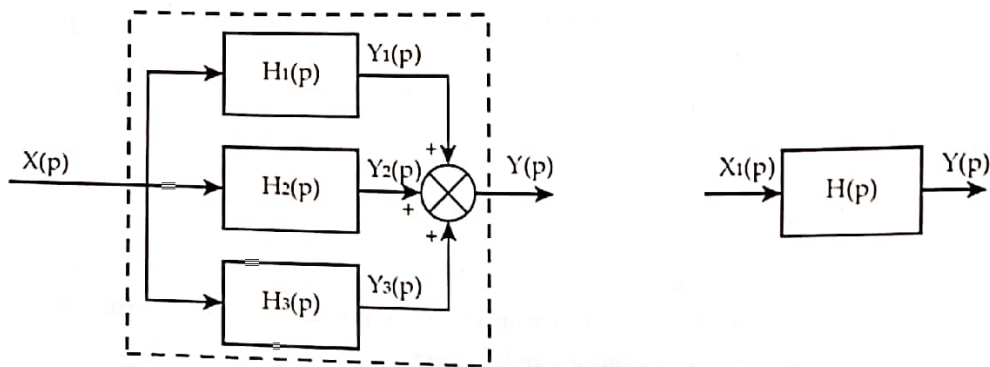


Association de blocs en série

Les deux schémas ci-dessus sont équivalents avec $H(p) = H_1(p).H_2(p).H_3(p)$

4. Association de blocs en parallèle

✂ Méthode



Association de blocs en parallèle

Les deux schémas ci-dessus sont équivalents avec $H(p) = H_1(p) + H_2(p) + H_3(p)$

5. Détermination graphique de la fonction de transfert globale d'un système

Nous verrons dans les paragraphes suivants que tout système peut être décrit par un schéma bloc proche de celui présenté ci-dessous. Sur ce schéma, $E(p)$ et $P(p)$ sont les grandeurs d'entrée (consigne et perturbation) traduites dans le domaine de Laplace et $S(p)$ la grandeur de sortie.

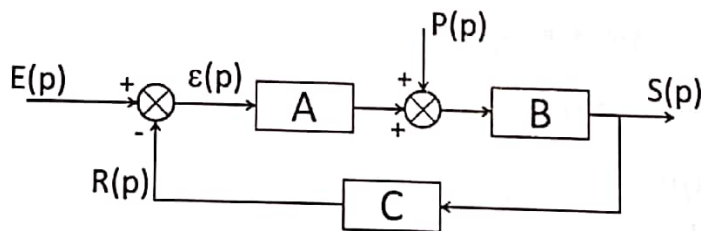


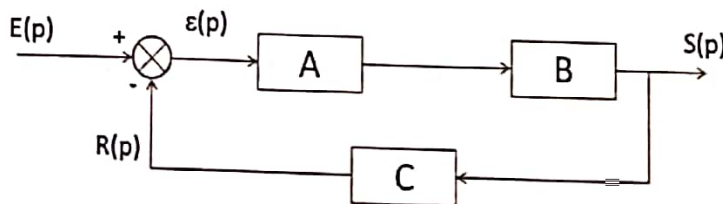
Schéma bloc générique représentant un système asservi

Selon le principe de superposition, le comportement global du système peut être décrit de la façon suivante :

$$S(p) = H_1(p) \cdot E(p) + H_2(p) \cdot P(p)$$

🔑 Définition

La fonction $H_1(p)$ est appelée fonction de transfert en boucle fermée en poursuite et est notée $H_{BFP}(p)$. Il s'agit de la fonction de transfert globale du système lorsque $P(p) = 0$, ce qui correspond au schéma suivant (le sommateur disparaît puisque $P(p) = 0$) :



La fonction $S(p)$ peut alors être exprimée uniquement grâce à la fonction $E(p)$, sous la forme $S(p) = H_1(p) \cdot E(p) = H_{BFP}(p) \cdot E(p)$, $H_{BFP}(p)$ restant une fonction de A , B et C à déterminer.

La lecture du schéma-bloc permet d'écrire :

$$\begin{cases} S(p) = \epsilon(p) \cdot A \cdot B \text{ (équation 1)} \\ \epsilon(p) = E(p) - R(p) = E(p) - C \cdot S(p) \text{ (équation 2)} \end{cases}$$

En combinant les équations 1 et 2, il est possible de donner une expression de $S(p)$ ne dépendant que de $E(p)$, A , B et C :

$$S(p) = [E(p) - C \cdot S(p)] \cdot A \cdot B$$

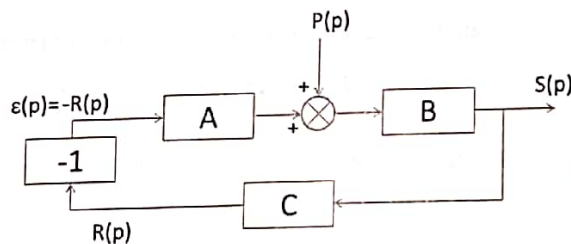
$$S(p) + A \cdot B \cdot C \cdot S(p) = A \cdot B \cdot E(p)$$

$$H_{BFP}(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A \cdot B}{1 + A \cdot B \cdot C}$$

Cette expression de la fonction de transfert en boucle fermée en poursuite est à connaître par cœur.

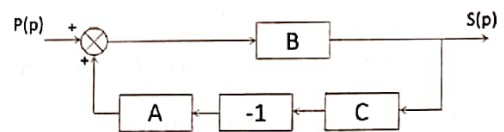
🔗 Définition

La fonction $H_2(p)$ est appelée *fonction de transfert en boucle fermée en régulation* et est notée $H_{BFR}(p)$. Il s'agit de la fonction de transfert globale du système lorsque $E(p) = 0$, ce qui correspond au schéma suivant. Le soustracteur disparaît puisque $E(p) = 0$, mais il persiste un bloc "-1", puisque la relation $\epsilon(p) = E(p) - R(p)$ devient $\epsilon(p) = -R(p)$:

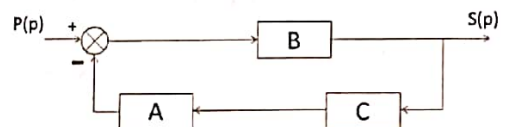


La fonction $S(p)$ peut alors être exprimée uniquement grâce à la fonction $P(p)$, sous la forme $S(p) = H_2(p) \cdot P(p) = H_{BFR}(p) \cdot P(p)$. $H_{BFR}(p)$ restant une fonction de A , B et C à déterminer.

Une simple réorganisation graphique des blocs donne le schéma suivant :



Qui est lui-même équivalent à un schéma ayant une forme similaire à celui obtenu en poursuite :



Bien que l'entrée soit différente et que les blocs ne soient pas répartis de la même façon sur la chaîne directe et sur la chaîne de retour, la formule mise en place précédemment peut être appliquée :

Fonction de transfert en boucle ouverte

$$H_{BFR}(p) = \frac{S(p)}{P(p)} = \frac{B}{1 + A.B.C}$$

D'où l'expression de $S(p)$, obtenue par superposition lorsque $E(p) \neq 0$ et $P(p) \neq 0$:

$$S(p) = H_{BFP}(p).E(p) + H_{BFR}(p).P(p) = \frac{A.B}{1 + A.B.C} \cdot E(p) + \frac{B}{1 + A.B.C} \cdot P(p)$$

6. Fonction de transfert en boucle ouverte

🔑 *Fondamental*

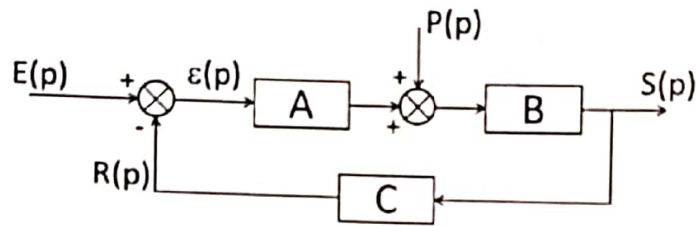


Schéma bloc générique représentant un système asservi

Toujours sur le schéma bloc générique, on appelle fonction de transfert en boucle ouverte (notée FTBO), la fonction $H_{BO}(p)$, telle que :

$$H_{BO}(p) = \frac{R(p)}{\epsilon(p)} = A.B.C$$

La FTBO est obtenue en multipliant les fonctions de transfert des blocs situés entre la sortie du comparateur et le retour au comparateur.

7. Formule de Black

Il est possible de généraliser les résultats du paragraphe précédent. C'est la formule de Black.

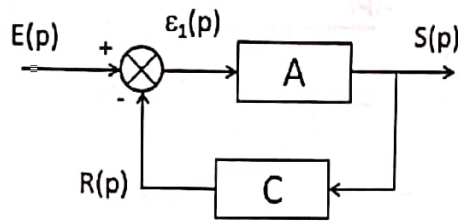
En notant :

- $FTBF$ la fonction de transfert en boucle fermée ;
- $FTCD$ la fonction de transfert en chaîne directe ; (multiplication des blocs compris entre l'entrée et la sortie)
- $FTBO$ la fonction de transfert en boucle ouverte ;

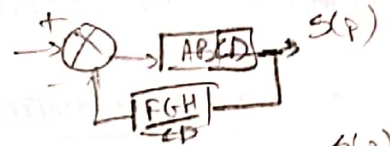
la formule de Black permet d'écrire :

$$FTBF = \frac{FTCD}{1 + FTBO}$$

Fondamental : Formule de Black

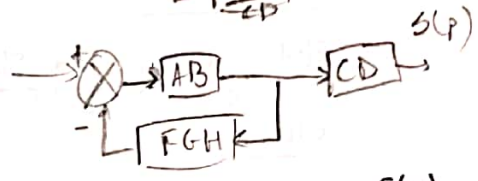
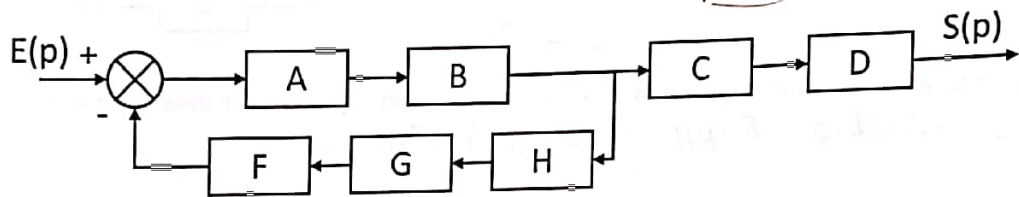


$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A}{1 + A.C}$$



8. Exercice : Réduction de schéma-blocs

Soit la modélisation suivante :



Question

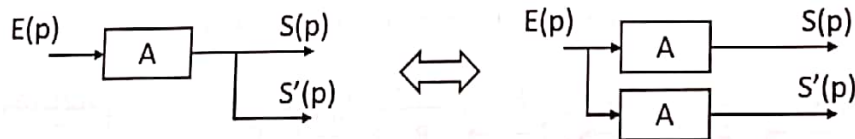
[solution n°4 p.31]

Réduire le schéma pour obtenir un seul bloc et en déduire la F.T $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$

9. Règles de transformation des schémas-blocs

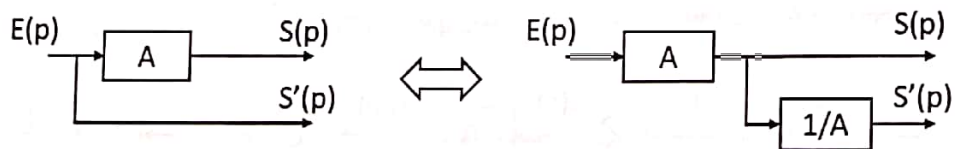
Les schémas-blocs peuvent subir des modifications en vue de les simplifier. Il est impératif de vérifier que ces modifications respectent la modélisation et ne modifient pas la fonction de transfert globale du système.

Méthode : Déplacement d'un point de prélèvement vers l'amont



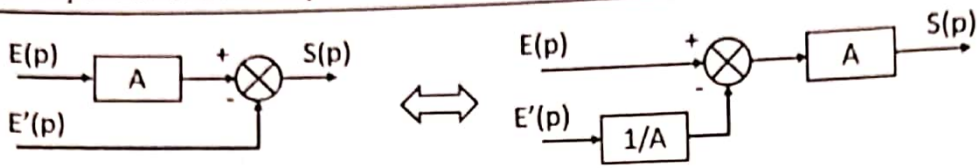
Dans les deux cas $S(p) = S'(p) = A \cdot E(p)$.

Méthode : Déplacement d'un point de prélèvement vers l'aval



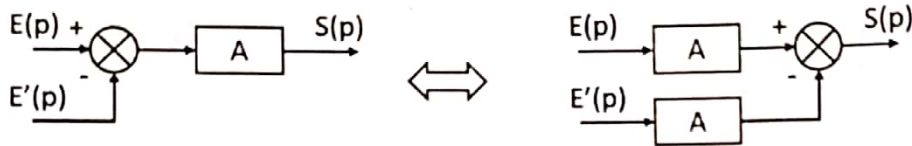
Dans les deux cas, $S(p) = A \cdot E(p)$ et $S'(p) = E(p)$.

Méthode : Déplacement d'un comparateur vers l'amont



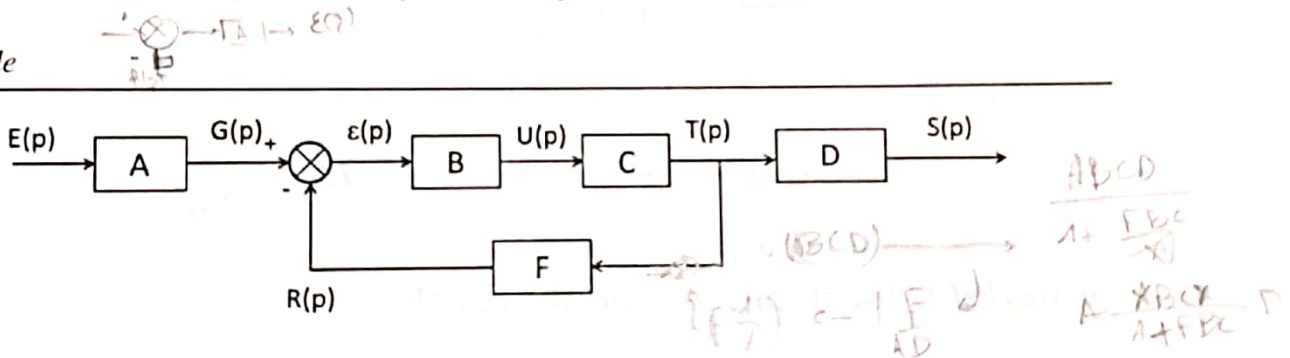
Dans les deux cas, $S(p) = A \cdot E(p) - E'(p)$.

Méthode : Déplacement d'un comparateur vers l'aval



Selon le sens de la transformation, on opère ici une factorisation par A ou un développement. Dans les deux cas $S(p) = A \cdot (E(p) - E'(p)) = A \cdot E(p) - A \cdot E'(p)$.

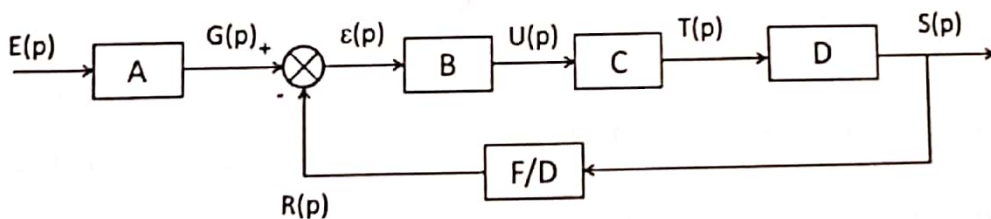
Exemple



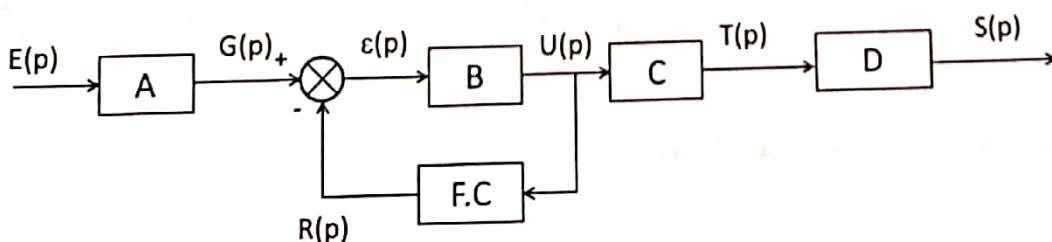
La fonction de transfert globale du système modélisé par le schéma-bloc ci-dessus est :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = A \cdot \frac{B \cdot C}{1 + B \cdot C \cdot F} \cdot D.$$

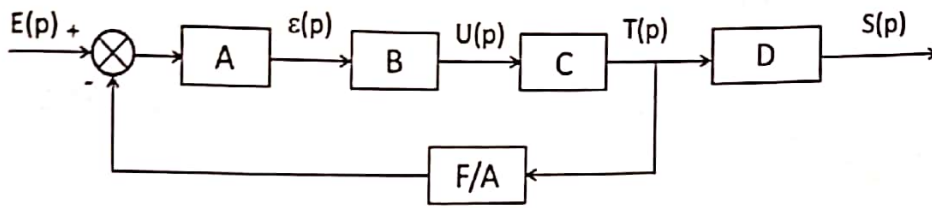
On peut montrer que tous les schémas présentés ci-dessous sont équivalents à celui ci-dessus (calculez la fonction de transfert $H(p)$ de chacun des schémas si vous n'êtes pas convaincus).



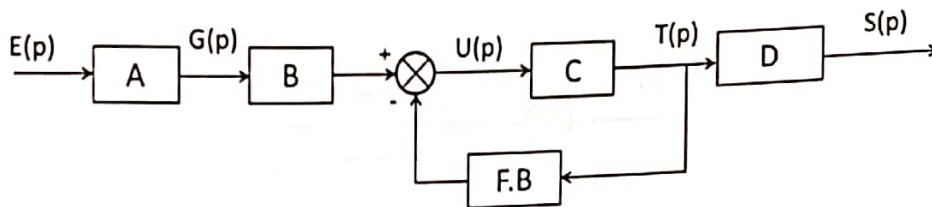
Cas 1 : on conserve bien le fait que la grandeur $R(p)$ est égale à $F \cdot T(p)$.



Cas 2 : on retrouve bien $R(p) = F.C.U(p)$.



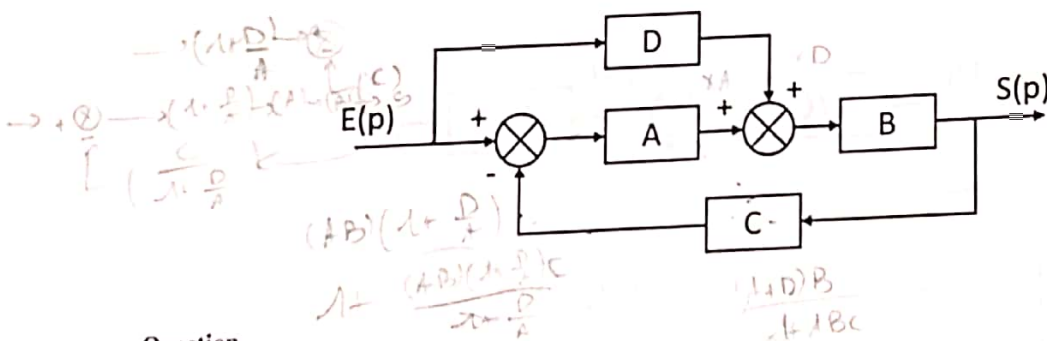
Cas 3 : on retrouve bien $\epsilon(p) = A.E(p) - F.T(p)$, par contre, les grandeurs $G(p)$ et $R(p)$ n'existent plus.



Cas 4 : on retrouve bien $\epsilon(p) = A.B.E(p) - F.B.T(p)$, par contre, les grandeurs $R(p)$ et $U(p)$ n'existent plus.

10. Exercice : Réduction de schéma-blocs

Soit la modélisation suivante :



Question

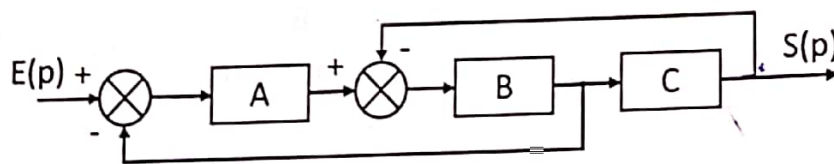
Réduire le schéma pour obtenir un seul bloc et en déduire la F.T $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$

Indice :

Déplacer un comparateur pour le mettre à côté de l'autre comparateur, l'addition étant commutative, il est alors possible ensuite de les échanger.

11. Exercice : Réduction de schéma-blocs

Soit la modélisation suivante :



Question

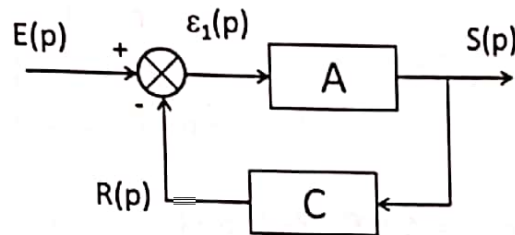
[solution n°6 p.31]

Réduire le schéma pour obtenir un seul bloc et en déduire la F.T $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$

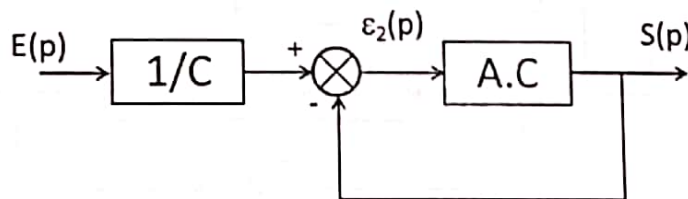
Indice :

Déplacer un point de prélèvement ou un comparateur pour obtenir deux boucles imbriquées.

12. Système bouclé à retour unitaire



En utilisant les règles de transformation de schéma blocs vues ci-dessus, on remarquera qu'il est possible de transformer un système asservi à retour non unitaire (tel que celui de la figure ci-dessus) en un système asservi à retour unitaire, à condition de modifier les fonctions de transfert des différents blocs (comme présenté sur la figure ci-dessous).



* *
*

Nous venons de voir ci-dessus qu'il est possible, à partir du schéma-bloc représentant un système linéaire continu, de modifier ce schéma jusqu'à le mettre sous une forme qui permette le calcul immédiat de la fonction de transfert. Il s'agit donc d'une manipulation graphique des équations. Une manipulation purement algébrique, équivalente du point de vue des calculs, ne conduirait pas si aisément au résultat.

En contrepartie, une telle modification de la structure du schéma peut parfois faire perdre le lien entre les entrées /sorties du schéma et les grandeurs physiques du système étudié.

Solutions des exercices

Exercice p. 10

> Solution n°1

$$t_{r5\%} \approx 3,5s$$

$$\epsilon = 0$$

$$D_1\% = (3 - 2)/2 = 50\%$$

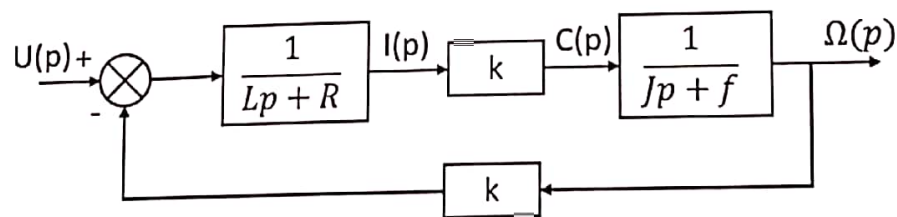
Exercice p. 21

> Solution n°2

1. $H(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{k}{(R + L_m \cdot p)(J \cdot p + f) + k^2}$
2. $H(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{\frac{L_m \cdot J}{k^2} \cdot p^2 + \frac{(R \cdot J + L_m \cdot f)}{k^2} \cdot p + 1}{1/k}$
3. $K = 1/k$, ordre 2 et classe 0.
4. 2 pôles et pas de zéro

Exercice p. 23

> Solution n°3



Exercice p. 27

> Solution n°4

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A \cdot B \cdot C \cdot D}{1 + A \cdot B \cdot F \cdot G \cdot H}$$

> Solution n°5

Exercice p. 29

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = (A + D) \cdot \frac{B}{1 + A \cdot B \cdot C}$$

> **Solution n°6**

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A \cdot B \cdot C}{1 + A \cdot B + B \cdot C}$$