Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Cycle 3 – Réponses fréquentielles des systèmes.

$-\beta \tau \omega^2 + \delta = -$

$-\beta \tau \omega^2 - \frac{\beta}{\tau} = K A \omega$

$\beta \left(\tau \omega^2 + \frac{1}{\tau}\right) = -K A \omega$

$\boxed{\beta = \frac{-K A \omega}{\tau \omega^2 + \frac{1}{\tau}}}$

$\boxed{\alpha = \frac{2 K A \omega}{\tau \omega^2 + \frac{1}{\tau}}}$

$\boxed{\gamma = \frac{K A \omega}{1 + \tau^2 \omega^2}}$

Table des matières

Objectifs

- Déterminer la réponse fréquentielle ;
- Tracer le diagramme asymptotique de Bode ;
- Identifier les paramètres caractéristiques d'un modèle de comportement à partir de sa réponse fréquentielle ;
- Associer un modèle de comportement (premier ordre, deuxième ordre, intégrateur, gain) à partir de sa réponse fréquentielle.

Introduction

L'étude temporelle des systèmes asservis, réalisée dans les parties précédentes nous a permis de prédire leur comportement. Nous sommes maintenant capables de déterminer les performances temporelles de ces systèmes ou de définir un modèle de comportement à partir de leur réponse temporelle.

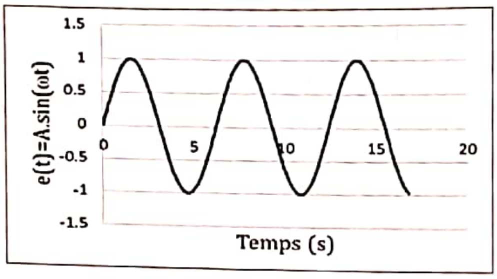
L'étude harmonique des systèmes est l'analyse du comportement fréquentiel des systèmes. C'est un outil complémentaire à l'analyse temporelle. Il permet également de prédire les performances temporelles d'un système à partir de son comportement fréquentiel, comme par exemple la bande passante ou la pulsation de coupure. De plus, elle nous permettra d'aborder de façon plus complète la stabilité et la correction des systèmes en deuxième année.

Introduction à l'étude harmonique des systèmes

I

1. Principe

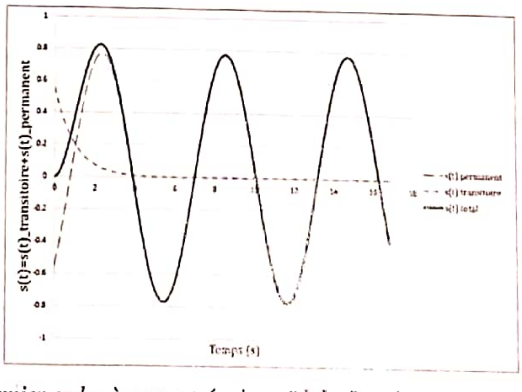
L'étude harmonique d'un système linéaire continu et invariant est l'étude de sa réponse en *régime permanent* (ou régime établi) à une entrée sinusoïdale $e(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$ (A = amplitude ; ω = pulsation en rad.s[-1]).



Entrée sinusoïdale avec A=1 et ω=1 rad/s

La réponse temporelle à une entrée sinusoïdale d'un système du premier ordre peut donc se décomposer en deux parties (voir ci-dessous) :

- Un régime transitoire, en exponentielle décroissante, dont l'influence disparait quand $t > 3.\tau$;
- Un régime permanent, qualifié aussi de régime forcé car l'entrée sinusoïdale impose une sortie sinusoïdal de même pulsation ω.

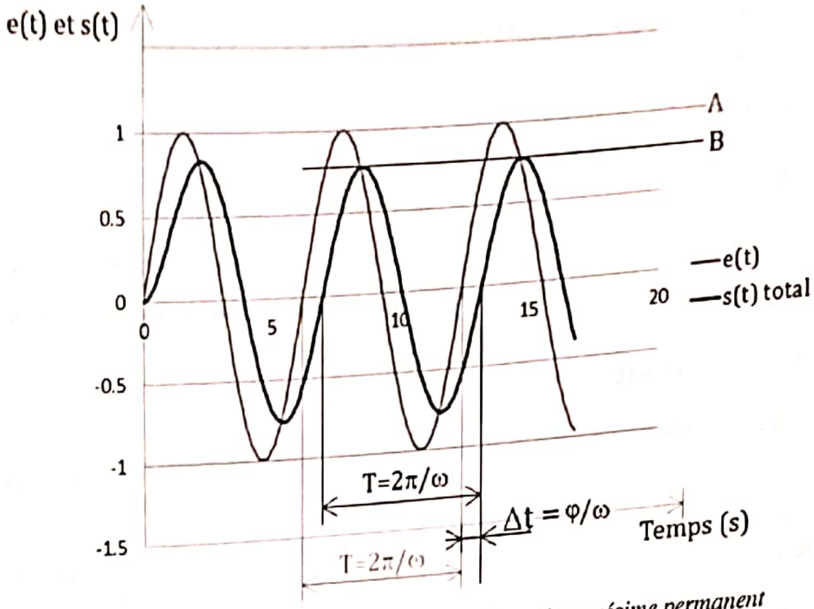


Réponse d'un système du premier ordre à une entrée sinusoïdale. La réponse peut être décomposée en une partie correspondant au régime transitoire et une autre correspondant au régime permanent.

Un système linéaire soumis à ce type de sollicitation sinusoïdale présentera une réponse en régime permanent sinusoïdale, de même pulsation ω, d'amplitude B et avec un éventuel déphasage φ (en rad) :

$$s(t) = B \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

L'amplitude du signal de sortie B et son déphasage φ sont significatifs du comportement du système et varient en fonction de ω. Pour une pulsation ω donnée, il existe un *rapport d'amplitude* entre les deux sinusoïdes ainsi qu'un *déphasage*. Faire l'étude harmonique du système revient à étudier ces variations.



Superposition de l'entrée sinusoïdale e(t) et de la sortie en régime permanent

Remarque

La sortie s(t) est obligatoirement en retard par rapport à l'entrée (si ce n'est pas le cas, le système pourrait prédire l'avenir !). Le déphasage $\varphi(\omega)$ est donc obligatoirement négatif.

2. Fonction de transfert complexe (Transmittance)

Méthode

La fonction de transfert complexe est obtenue en remplaçant la variable complexe p du domaine de Laplace par le nombre complexe j.ω dans la fonction de transfert H(p) d'un système $S(j\omega) = H(j\omega).E(j\omega)$

Le module $|H(j\omega)|$ représente l'amplification (le rapport de l'amplitude de la sortie sur l'amplitude d'entrée) :

$$|H(j\omega)| = \frac{B}{A}$$

L'argument $\arg(H(j\omega))$ représente le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée :

$$\arg(H(j\omega)) = \varphi = \arg(S(j\omega)) - \arg(E(j\omega))$$

Exemple

Dans le cas d'un système du premier ordre,on obtient : $H(j.\omega) = \dfrac{K}{1 + j.\tau.\omega}$

En calculant le module et l'argument de cette fonction complexe, on obtient :

$$|H(j.\omega)| = \frac{|K|}{|1 + \tau.j.\omega|} = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2.\omega^2}}$$

$\arg(H(j\cdot\omega)) = \arg\left(\frac{K}{1+\tau.j.\omega}\right) = \arg(K) - \arg(1 + j.\tau.\omega) = 0 - \arg(1 + j.\tau.\omega) =$
$-\arctan(\tau.\omega)$

Le rapport $\frac{B}{A}$ et φ, caractéristiques de la réponse du système à une entrée sinusoïdale peuvent donc être exprimées à partir de la fonction de transfert complexe du système en question :

$$\begin{cases} \frac{B}{A} = \frac{K}{\sqrt{1+\tau^2.\omega^2}} \\ \varphi = -\arctan(\tau.\omega) \end{cases}$$

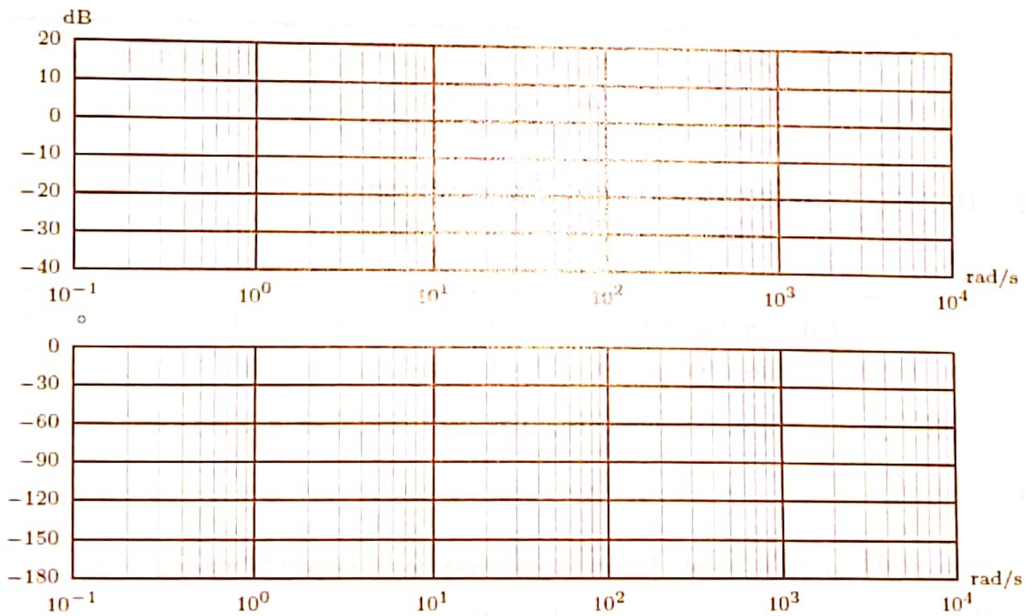
Ce résultat peut être étendu à un système décrit par fonction de transfert d'ordre quelconque. Ceci représente un moyen rapide d'obtenir les caractéristiques de la réponse d'un système à une entrée sinusoïdale.

3. Diagramme de Bode

Le diagramme de Bode consiste à tracer deux graphes correspondant respectivement à l'amplification et au déphasage en fonction de la pulsation ω.

Pour la courbe de gain on utilise $H_{dB}(\omega) = 20\log|H(j\omega)|$ définit comme le gain en décibels en ordonnée et une échelle logarithmique en abscisse.

Pour la courbe de phase, on utilise $\arg(H(j\omega))$ en ordonnée et une échelle logarithmique en abscisse.



Échelle logarithmique

Définition

- Dans une graduation logarithmique, il y a autant de distance entre 1 et 2 qu'entre 2 et 4 et 20 et 40. L'intervalle entre deux points dont le rapport est égal à 2 est appelé une *octave*;
- Il y a aussi autant de distance entre 1 et 10 qu'entre 10 et 100. L'intervalle entre deux points dont le rapport est égal à 10 est appelé une *décade*.

Remarque

Le 0 n'apparaît jamais, il est rejeté à l'infini à gauche.

Complément : Multiplication

La multiplication de deux fonctions de transfert :

$H(j\omega) = F(j\omega).G(j\omega)$ correspond à une addition dans un diagramme de Bode :

$$20\log|H(j\omega)| = 20\log|F(j\omega)| + 20\log|G(j\omega)|$$

$$\arg(H(j\omega)) = \arg(F(j\omega)) + \arg(G(j\omega))$$

Les diagrammes de Bode en gain et en phase de deux fonctions de transfert multipliées entre elles s'additionnent.

Complément : Division

La division de deux fonctions de transfert :

$H(j\omega) = F(j\omega)/G(j\omega)$ correspond à une soustraction dans un diagramme de Bode :

$$20\log|H(j\omega)| = 20\log|F(j\omega)| - 20\log|G(j\omega)|$$

$$\arg(H(j\omega)) = \arg(F(j\omega)) - \arg(G(j\omega))$$

Les diagrammes de Bode en gain et en phase de deux fonctions de transfert diviséées entre elles se soustraient.

Complément : Exposant

Une fonction de transfert à la puissance n :

$H(j\omega) = G^n(j\omega)$ correspond à une multiplication par n dans un diagramme de Bode :

$$20\log|H(j\omega)| = n.20\log|G(j\omega)|$$

$$\arg(H(j\omega)) = n.\arg(G(j\omega))$$

Les diagrammes de Bode en gain et en phase d'une fonction à la puissance n sont multipliés par n.

Fonction de transfert du premier ordre

II

A partir de $H(p) = \dfrac{K}{1+\tau p}$, on écrit, en posant $\omega_c = \dfrac{1}{\tau}$:

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\tau\omega} = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}}$$

On en déduit le gain et la phase du système :

$$\begin{cases} |H(\omega)| = \dfrac{K}{\sqrt{1+\tau^2.\omega^2}} \\ \varphi(\omega) = -\arctan(\tau.\omega) \end{cases}$$

Pour tracer un diagramme de Bode, il faut étudier la courbe de gain en décibels du système en fonction de ω et la courbe de phase du système en fonction de ω.

1. Diagramme de Bode

Tracé asymptotique du diagramme de Bode

Si $\omega \to 0$ alors $\begin{cases} |H(\omega)| \to K \\ \varphi(\omega) \to 0° \end{cases}$ donc $\begin{cases} |H(\omega)|_{dB} \to 20\log K \\ \varphi(\omega) \to 0° \end{cases}$

Si $\omega \to \infty$ alors $\begin{cases} |H(\omega)| \approx \dfrac{K}{\tau.\omega} \\ \varphi(\omega) \approx -90° \end{cases}$ donc $\begin{cases} |H(\omega)|_{dB} \approx 20\log\dfrac{K}{\tau} - 20\log\omega \\ \varphi(\omega) \approx -90° \end{cases}$

La courbe de gain en décibels du diagramme de Bode d'un système du premier ordre présente une asymptote horizontale à 20.logK lorsque la pulsation est faible et une asymptote oblique de -20 dB par décade de pente (décade : intervalle[ω;10.ω]) lorsque la pulsation est élevée.

Démonstration : $|H(10.\omega)|_{dB} \approx 20\log\dfrac{K}{\tau} - 20\log 10.\omega = 20\log\dfrac{K}{\tau} - 20\log 10 - 20\log\omega$

donc $|H(10.\omega)|_{dB} = 20\log\dfrac{K}{\tau} - 20 - 20\log\omega = |H(\omega)|_{dB} - 20dB$

Remarque

Les asymptotes à la courbe de gain en décibels d'un diagramme de Bode ont obligatoirement une pente multiple de 20 dB/décade. Nous appellerons pente *d'ordre n* une pente égale à *20.n dB/décade*. Dans le cas du système du premier ordre, l'asymptote en $+\infty$ est donc une pente d'ordre -1.

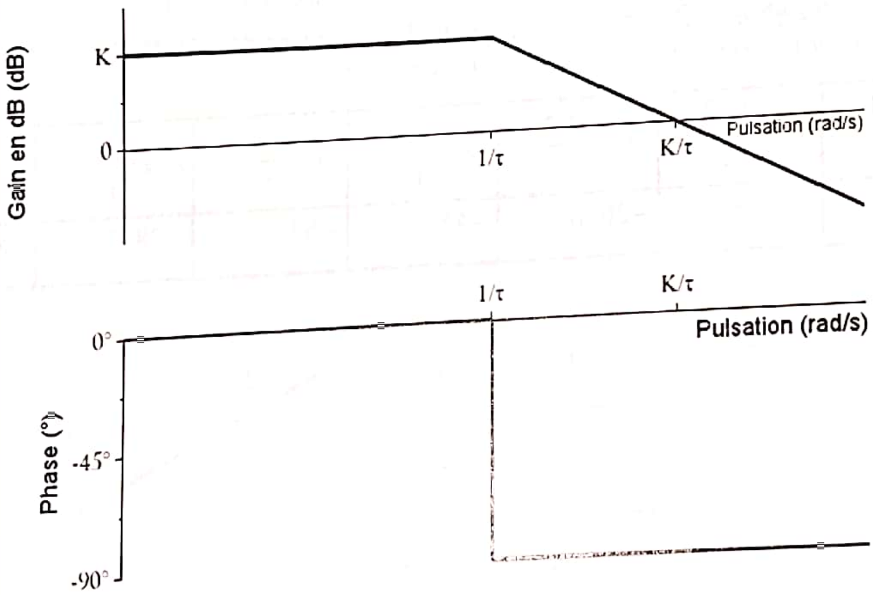
La courbe de phase du diagramme de Bode d'un système du premier ordre présente une asymptote horizontale à 0° lorsque la pulsation est faible et une asymptote horizontale à -90° lorsque la pulsation est importante.

Les deux asymptotes de la courbe de gain en décibels se croisent en un point dont l'abscisse est ω_c. Cette pulsation particulière est appelée pulsation de cassure. Cette pulsation ω_c est telle que :

$20\log(K/\tau) - 20\log\omega_c = 20\log K$ on en déduit $-20\log\tau - 20\log\omega_c = 0$ donc $\omega_c = \dfrac{1}{\tau}$

La pulsation de cassure d'un système du premier ordre est $\omega_c = \dfrac{1}{\tau}$

Fondamental : Tracé asymptotique



Tracé asymptotique du premier ordre

Tracé du diagramme de Bode réel

Le tracé des courbes réelles peut se faire à partir du tracé asymptotique :

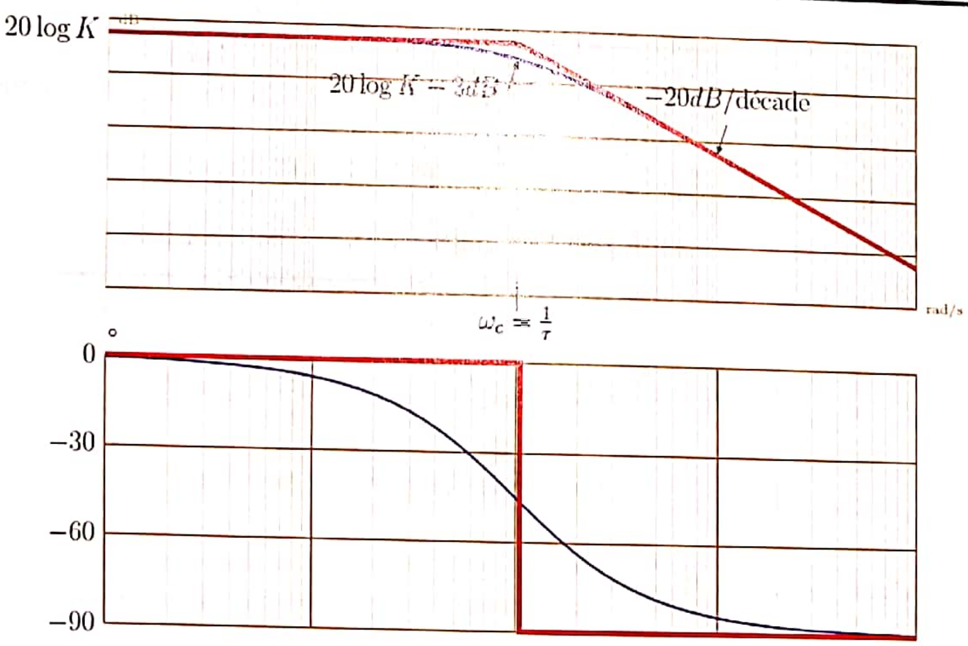
Fondamental

Les résultats nécessaires au tracé du diagramme de Bode (asymptotique et réel) d'un système du premier ordre standard de fonction de transfert $H(p) = \dfrac{K}{1+\tau.p}$ sont regroupés dans le tableau suivant à connaître par cœur. Ces résultats seront utiles pour les cours de physique et de SII.

$\omega << \omega_c$	$\omega_c = \frac{1}{\tau}$	$\omega >> \omega_c$
$\lvert H(\omega)\rvert_{dB} \approx 20\log K$ $\varphi(\omega) \approx 0°$	$\lvert H(\omega_c)\rvert_{dB} \approx 20\log K - 3dB$ $\varphi(\omega_c) \approx -45°$	$\lvert H(\omega)\rvert_{dB} \approx 20\log \frac{K}{\tau} - 20\log \omega$ $\varphi(\omega) \approx -90°$
$\lvert H(\omega)\rvert_{dB}$: Asymptote horizontale φ: Asymptote horizontale 0°	$\lvert H(\omega)\rvert_{dB}$: croisement des asymptotes à la pulsation de cassure ω_c $\varphi = -45°$	$\lvert H(\omega)\rvert_{dB}$: Asymptote oblique de pente -20 dB/"décade" φ: Asymptote horizontale -90°

Du fait du tracé en échelle logarithmique, la courbe de gain en décibels reste proche de ses asymptotes sur une grande partie du graphique. Pour positionner plus précisément la courbe de phase réelle, il est possible de déterminer la valeur de la phase pour quelques point intermédiaires :

$\omega = \frac{0,1}{\tau}$	$\omega = \frac{0,2}{\tau}$	$\omega = \frac{0,5}{\tau}$	$\omega = \frac{1}{\tau}$	$\omega = \frac{2}{\tau}$	$\omega = \frac{5}{\tau}$	$\omega = \frac{10}{\tau}$
$-5,7°$	$-11,3°$	$-26,6°$	$-45°$	$-63,4°$	$-78,7°$	$-84,3°$



Comparaison tracé réel et tracé asymptotique

Méthode : Tracé du diagramme de Bode d'un premier ordre

1. Identifier K et calculer $20 \log K$;
2. Identifier τ et calculer $\omega_c = \frac{1}{\tau}$;
3. Pour le gain : tracer une asymptote horizontale de gain $20 \log K$ jusqu'à la pulsation ω_c puis tracer une asymptote ayant une pente de -$20dB$ par décade. La courbe réelle passe à -$3dB$ sous la cassure des asymptotes ;
4. Pour la phase : tracer une asymptote horizontale à $0°$ jusqu'à la pulsation ω_c puis tracer une asymptote horizontale à $-90°$.

Méthode : Identifier un premier ordre à partir de son diagramme de Bode

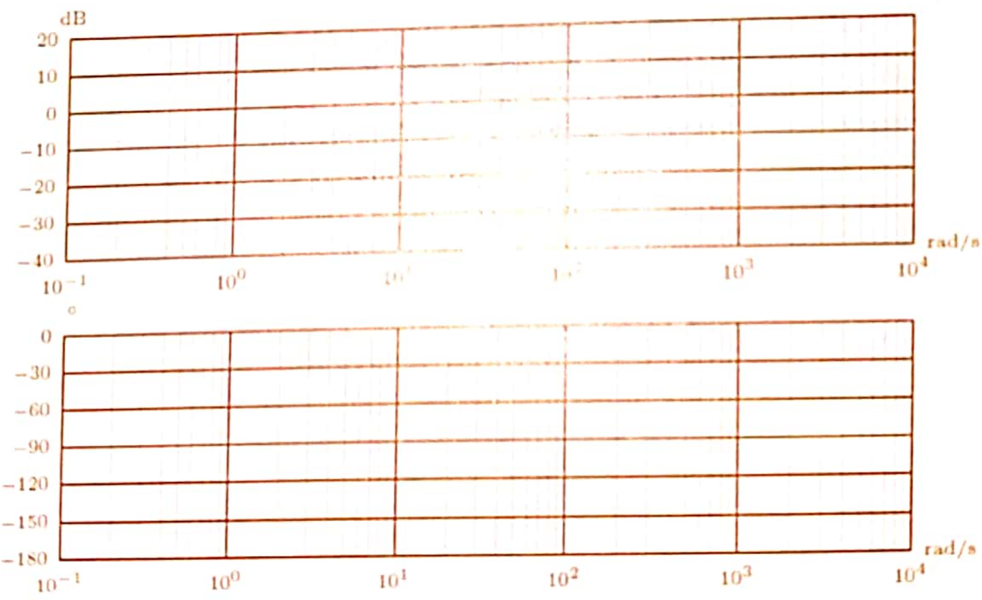
1. Vérifier sur la courbe de gain la pente est de -20dB/décade et que la phase tend vers -90° pour ω tendant vers $+\infty$;
2. Relever la valeur du gain $20 \log K$ pour ω tendant vers 0 et en déduire K;
3. Trouver l'intersection entre les deux asymptotes de gain, relever $\omega_c = \frac{1}{\tau}$ et en déduire τ. Autre solution, relever ω_c.

2. Exercice : Tracé du diagramme de Bode d'un premier ordre

[solution n°1 p.30]

Question

Tracez le diagramme de Bode correspondant à la fonction de transfert $H(p) = \frac{4}{1 + 0,05p}$



Échelle logarithmique

3. Exercice : Identifier un premier ordre à partir de son diagramme de Bode

Soit le tracé de Bode suivant.

Exercice : Identifier un premier ordre à partir de son diagramme de Bode

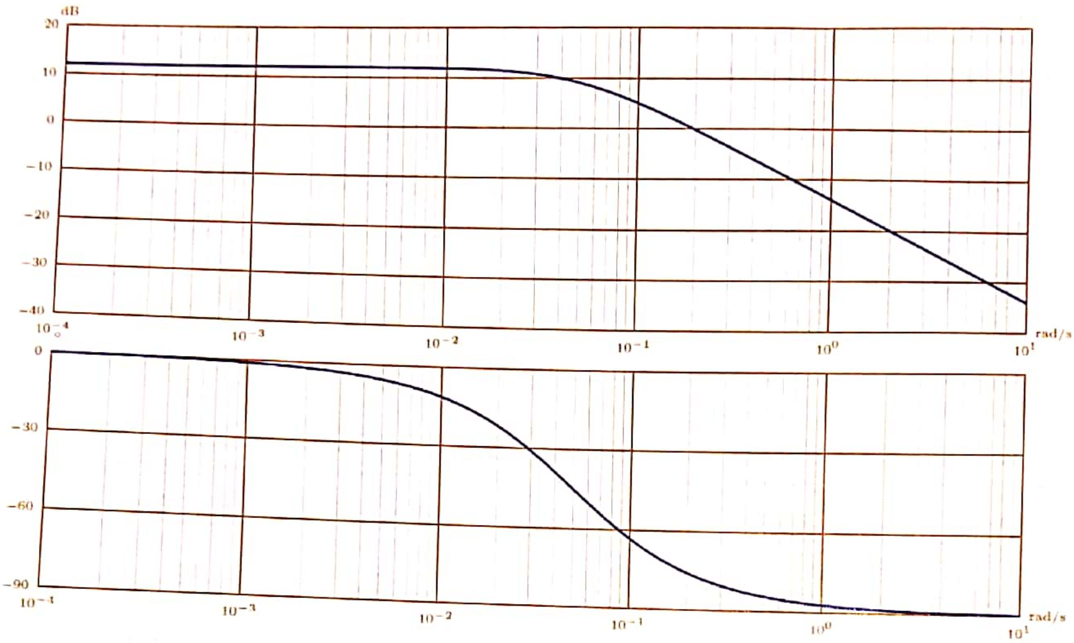


Diagramme de Bode

Question

[solution n°2 p.30*]*

Déterminez la fonction de transfert $H(p)$ correspondante.

Fonctions de transfert du second ordre

III

1. Fonction de transfert du second ordre en régime apériodique

Fondamental

Pour $\xi > 1$, à partir de : $H(p) = \dfrac{K}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$ on écrit :

$$H(j\omega) = \frac{K}{(1+j\tau_1\omega)(1+j\tau_2\omega)} = \frac{K}{\left(1+j\dfrac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1+j\dfrac{\omega}{\omega_2}\right)}$$

On en déduit :

On pose $H_1(p) = \dfrac{1}{1+\dfrac{p}{\omega_1}}$ et $H_2(p) = \dfrac{1}{1+\dfrac{p}{\omega_2}}$.

Gain en dB	$\lvert H(j\omega)\rvert_{dB} = 20\log K + \lvert H_1(j\omega)\rvert_{dB} + \lvert H_2(j\omega)\rvert_{dB}$
Phase	$arg\,(H(j\omega)) = arg\,(H_1(j\omega)) + arg\,(H_2(j\omega))$

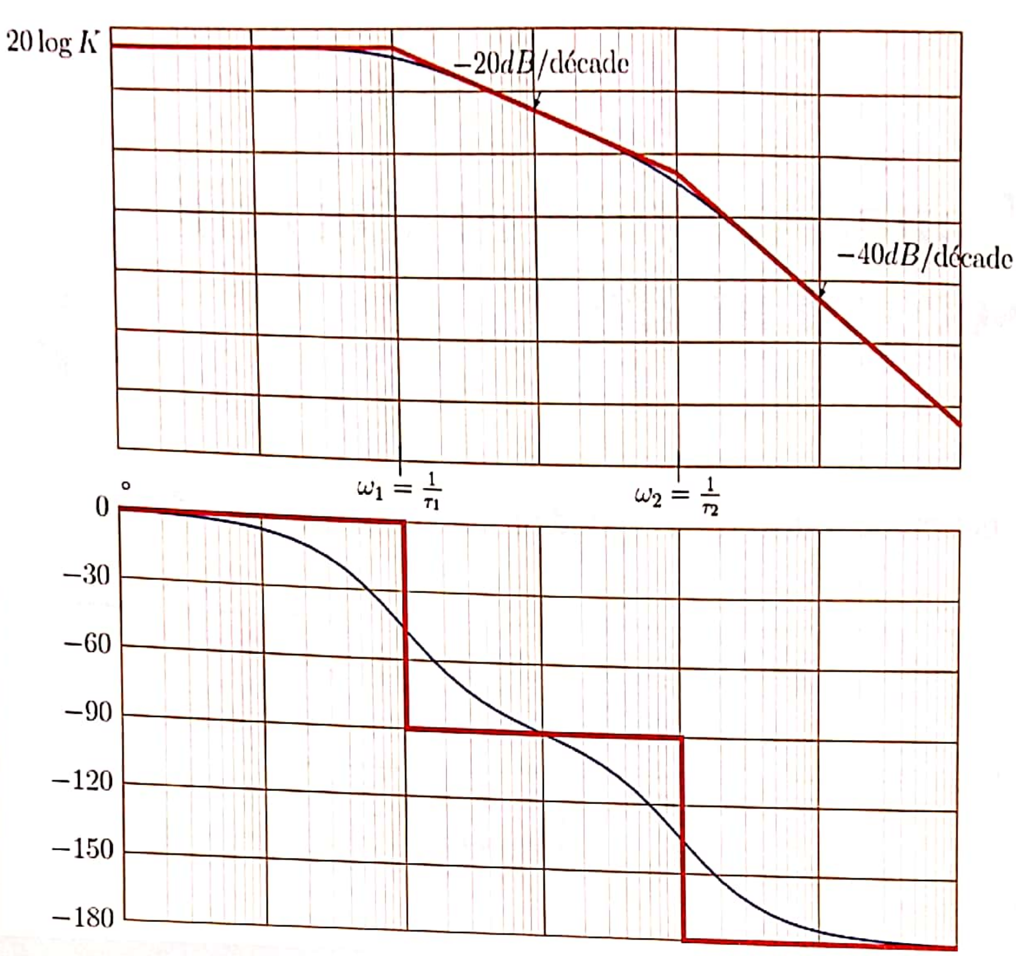


Diagramme de Bode d'un système du second ordre fortement amorti

Méthode : Tracé du diagramme de Bode

On peut remarquer que le tracé de ce diagramme de Bode est le résultat de l'addition des tracés de deux fonctions de transfert du premier ordre.

	$\omega_1 = 0$	$\omega_1 = 1/\tau_1$	$\omega_2 = 1/\tau_2$ $\omega_1 = \infty$
Pente H_1	0 dB/dec	-20 dB/dec	-20 dB/dec
Pente H_2	0 dB/dec	0 dB/dec	-20 dB/dec
Total :	**0 dB/dec**	**-20 dB/dec**	**-40 dB/dec**
Phase H_1	0°	-90°	-90°
Phase H_2	0°	0°	-90°
Total :	**0°**	**-90°**	**-180°**

Tableau bilan du tracé asymptotique

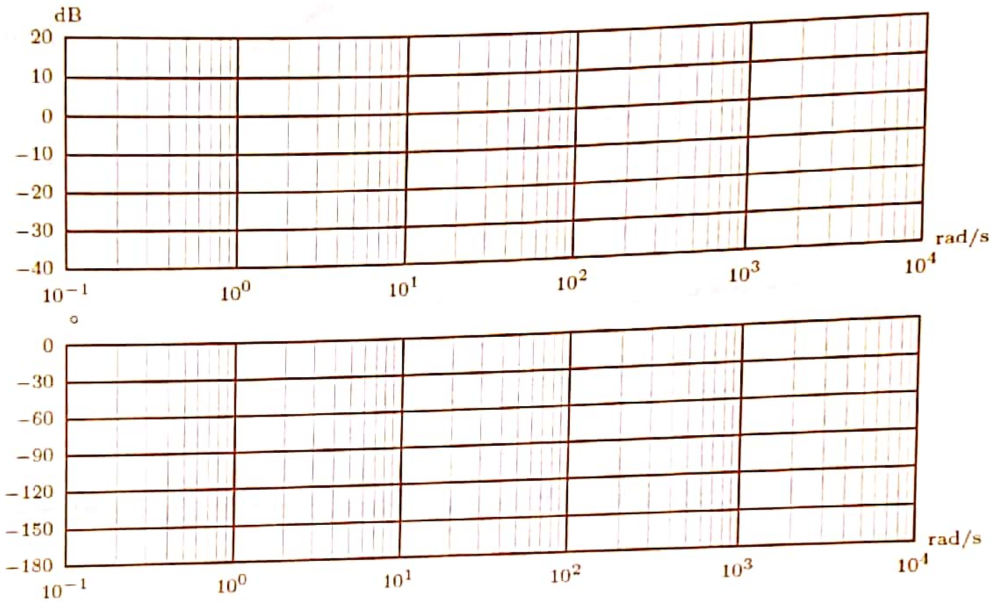
Le diagramme de Bode asymptotique d'un système du second ordre fortement amorti ($\xi > 1$) est constitué de 3 asymptotes pour la courbe de gain en décibels et de 3 asymptotes pour la courbe de phase.

Le diagramme de Bode réel en gain en décibels est proche du diagramme asymptotique (échelle logarithmique) et il passe 3 dB en dessous des asymptotes à chaque point de cassure si les deux pulsations de cassures ω_1 et ω_2 sont suffisamment éloignées (au moins une décade).

Le diagramme de Bode réel en phase est relativement éloigné des asymptotes (cf. premier ordre).

2. Exercice : Tracé du diagramme de Bode d'un second ordre sur-amorti

Soit la fonction de transfert suivante : $H(p) = \dfrac{2}{(1+0,8p)(1+10p)}$



Échelle logarithmique

Question *[solution* n°3 p.30*]*

Tracez le diagramme asymptotique de Bode de cette fonction de transfert :

Indice :

En additionnant le diagramme de $20\log 2$, $H_1(p) = \dfrac{1}{1+0,8p}$ et de $H_2(p) = \dfrac{1}{1+10p}$.

3. Fonction de transfert du second ordre en régime critique

Fondamental

pour $\xi = 1$, à partir de : $H(p) = \dfrac{K}{(1+\tau p)^2}$, on écrit :

$$H(j\omega) = \frac{K}{(1+j\tau\omega)^2} = \frac{K}{\left(1+j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

On en déduit :

Gain en dB	$\lvert H(j\omega)\rvert_{dB} = 20\log K + 2 \times 20.\log \dfrac{1}{\left(\sqrt{1+\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right)}$
Phase	$arg\,(H(j\omega)) = -2 \times \arctan\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$

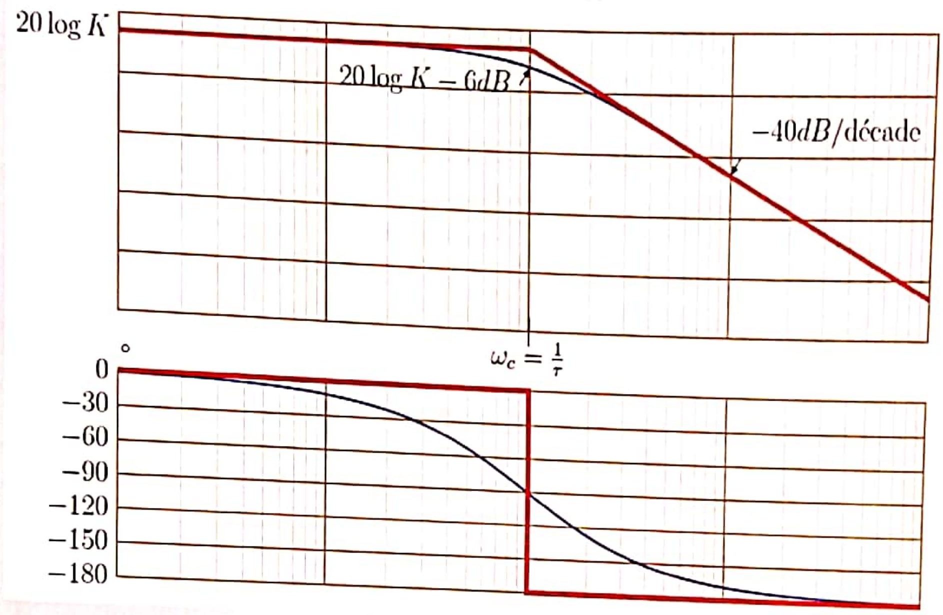


Diagramme de Bode d'un système du second ordre critique.

Méthode : Tracé du diagramme de Bode

On peut remarquer que le tracé de ce diagramme de Bode est le résultat de la multiplication par 2 du tracé d'une fonction de transfert du premier ordre.

1. La pente de la courbe de gain est multipliée par 2 : -40dB/décade ;
2. La courbe réelle passe à $-3dB \times 2 = -6dB$ sous la cassure des asymptotes ;
3. La phase est aussi multipliée par 2 : $-180° \leq arg(H(p)) \leq 0$.

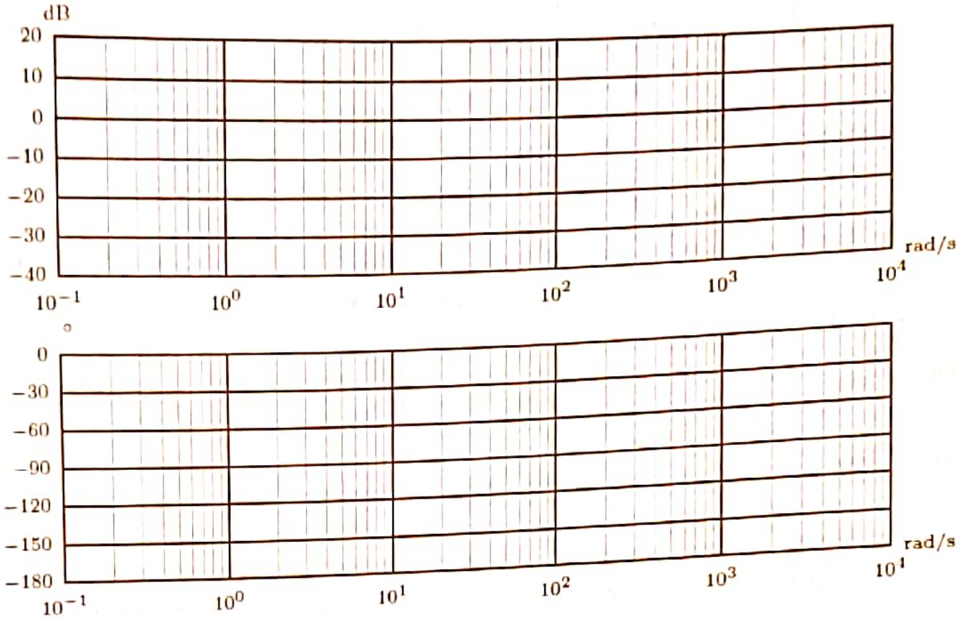
4. Exercice : Tracé du digramme de Bode du second ordre en régime critique

Soit la fonction de transfert suivante : $H(p) = \dfrac{5}{(1/2+p)^2}$.

Question

[solution n°4 p.31]

Tracez le diagramme asymptotique de Bode de cette fonction de transfert.



Échelle logarithmique

5. Fonction de transfert du second ordre en régime pseudo-périodique

Pour $\xi < 1$, à partir de : $H(p) = \dfrac{K}{\left(1 + \dfrac{2\xi}{\omega_0}p + \dfrac{p^2}{\omega_0^2}\right)}$, on écrit :

$$H(j\omega) = \frac{K}{\left(1 + j\dfrac{2\xi\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}$$

Gain en dB	$\lvert H(j\omega)\rvert_{dB} = 20\log K + 20\log \dfrac{1}{\left(\sqrt{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\dfrac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)^2}\right)}$
Phase $\omega < \omega_0$	$\arg\left(H(j\omega)\right) = -\arctan\left(\dfrac{2\xi\omega\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$
Phase $\omega = \omega_0$	$\arg\left(H(j\omega_0)\right) = -90°$
Phase $\omega > \omega_0$	$\arg\left(H(j\omega)\right) = -180° - \arctan\left(\dfrac{2\xi\omega\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$

Tracé asymptotique du diagramme de Bode

Si $\omega \to 0$ alors $\begin{cases} |H(\omega)| \approx K \\ \varphi(\omega) \approx 0° \end{cases}$ donc $\begin{cases} |H(\omega)|_{dB} \approx 20 \log K \\ \varphi(\omega) \approx 0° \end{cases}$

Si $\omega \to \infty$ alors $\begin{cases} |H(\omega)| \approx \dfrac{K \cdot \omega_0^2}{\omega^2} \\ \varphi(\omega) \approx -180° \end{cases}$ donc $\begin{cases} |H(\omega)|_{dB} \approx 20 \log(K.\omega_0^2) - 40 \log \omega \\ \varphi(\omega) \approx -180° \end{cases}$

La courbe de gain en décibels du diagramme de Bode d'un système du second ordre présente une asymptote horizontale à 20.logK lorsque la pulsation est faible et une asymptote oblique de -40 dB par décade de pente (décade : intervalle[ω;10.ω]) lorsque la pulsation est élevée.

Démonstration : $|H(10.\omega)|_{dB} \approx 20 \log \dfrac{K}{\omega_0^2} - 40 \log 10.\omega = 20 \log \dfrac{K}{\omega_0^2} - 40 \log 10 - 40 \log \omega$

donc $|H(10.\omega)|_{dB} = 20 \log \dfrac{K}{\omega_0^2} - 40 - 40 \log \omega = |H(\omega)|_{dB} - 40dB$

La courbe de phase du diagramme de Bode d'un système du second ordre présente une asymptote horizontale à 0° lorsque la pulsation est faible et une asymptote horizontale à -180° lorsque la pulsation est importante.

Les deux asymptotes de la courbe de gain en décibels se croisent en un point dont l'abscisse est ω_0 la pulsation propre.

Fondamental : Tracé asymptotique et réel

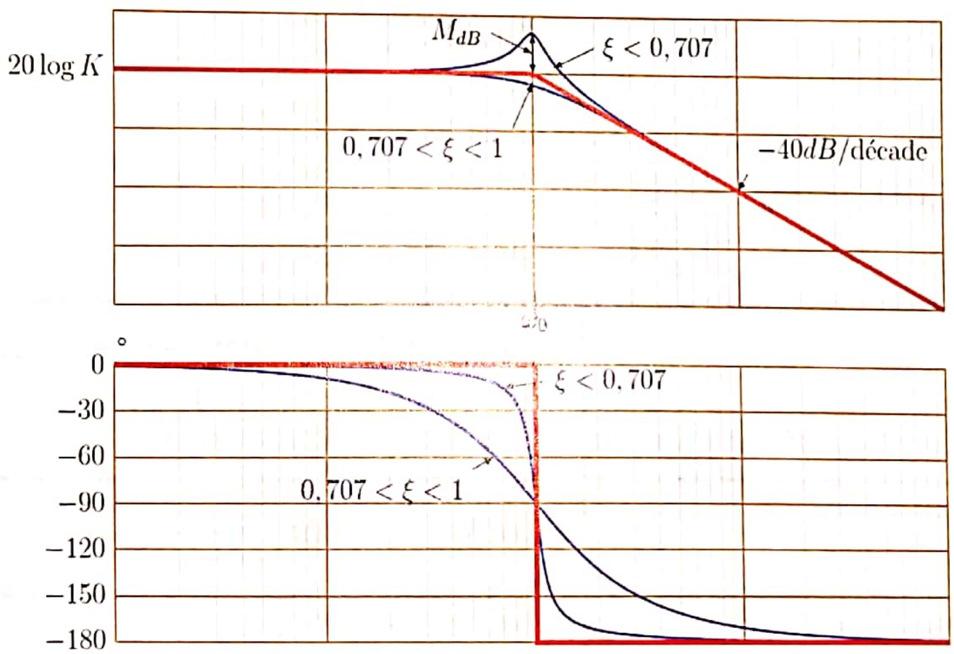


Diagramme de Bode du second ordre sous amorti

Remarque : Résonance

Il y a résonance pour $\xi < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

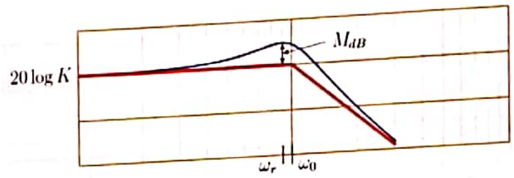
Lorsqu'il y a résonance, la courbe de gain possède une valeur maximale qui peut être déterminée à l'aide du *facteur de surtension* en dB :

$$M_{dB} = 20\log\frac{1}{2.\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

Cette valeur maximale se trouve à la *pulsation de résonance* : $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2}$

(La démonstration n'est pas donnée dans ce cours mais consiste juste à chercher le maximum à l'aide d'une dérivée de l'expression du gain).

Exemple pour $\xi = 0.3$:



Résonance

Méthode : Tracé du diagramme de Bode d'un second ordre

1. Identifier K et calculer $20\log K$;
2. Identifier ω_0;
3. Pour le gain : tracer une asymptote horizontale de gain $20\log K$ jusqu'à la pulsation ω_0 puis tracer une asymptote ayant une pente de -40dB par décade ;
4. Identifier ξ;
5. Vérifier si $\xi < 0,707$, dans ce cas calculer la pulsation de résonance ω_r et le facteur de surtension en dB M_{dB};
6. Tracer une courbe réelle en faisant apparaître la valeur de résonance à $20\log K + M_{dB}$;
7. Pour la phase : tracer une asymptote horizontale à 0° jusqu'à la pulsation ω_0 puis tracer une asymptote horizontale à -180° ;
8. La courbe réelle de phase varie en fonction de ξ.

Méthode : Identifier un second ordre sous amorti à partir de son diagramme de Bode

1. Vérifier sur la courbe de gain la pente est de -40dB/décade et que la phase tend vers -180° pour ω tendant vers $+\infty$;
2. Relever la valeur du gain $20\log K$ pour ω tendant vers 0 et en déduire K ;
3. Trouver l'intersection entre les deux asymptotes de gain, relever ω_0 . Autre solution, relever ω_0 correspondant à une phase de -90° ;
4. L'identification de ξ n'est vraiment évidente que s'il y a une résonance. En effet, dans ce cas il suffit de relever M_{dB} et de calculer ξ.

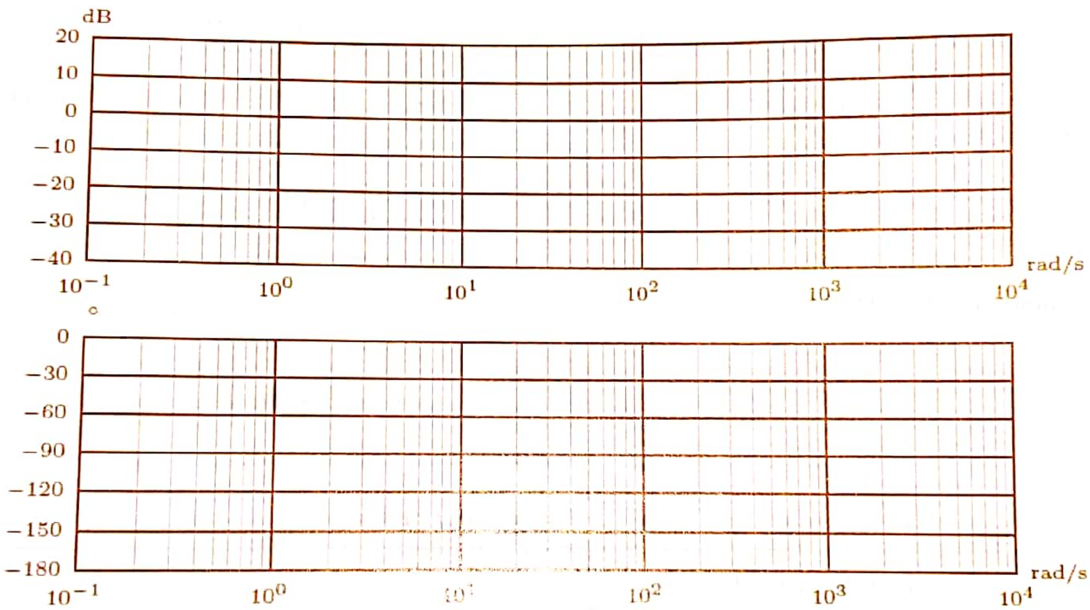
6. Exercice : Tracé du diagramme de Bode d'un second ordre sous amorti

Soit la fonction de transfert $H(p) = \dfrac{6}{1 + 0,4p + p^2}$:

Question

[solution n°5 p.31*]*

Tracez le diagramme de Bode correspondant à la fonction de transfert.



Échelle logarithmique

7. Exercice : Identifier un second ordre sous amorti à partir de son diagramme de Bode

Soit le tracé de Bode suivant :

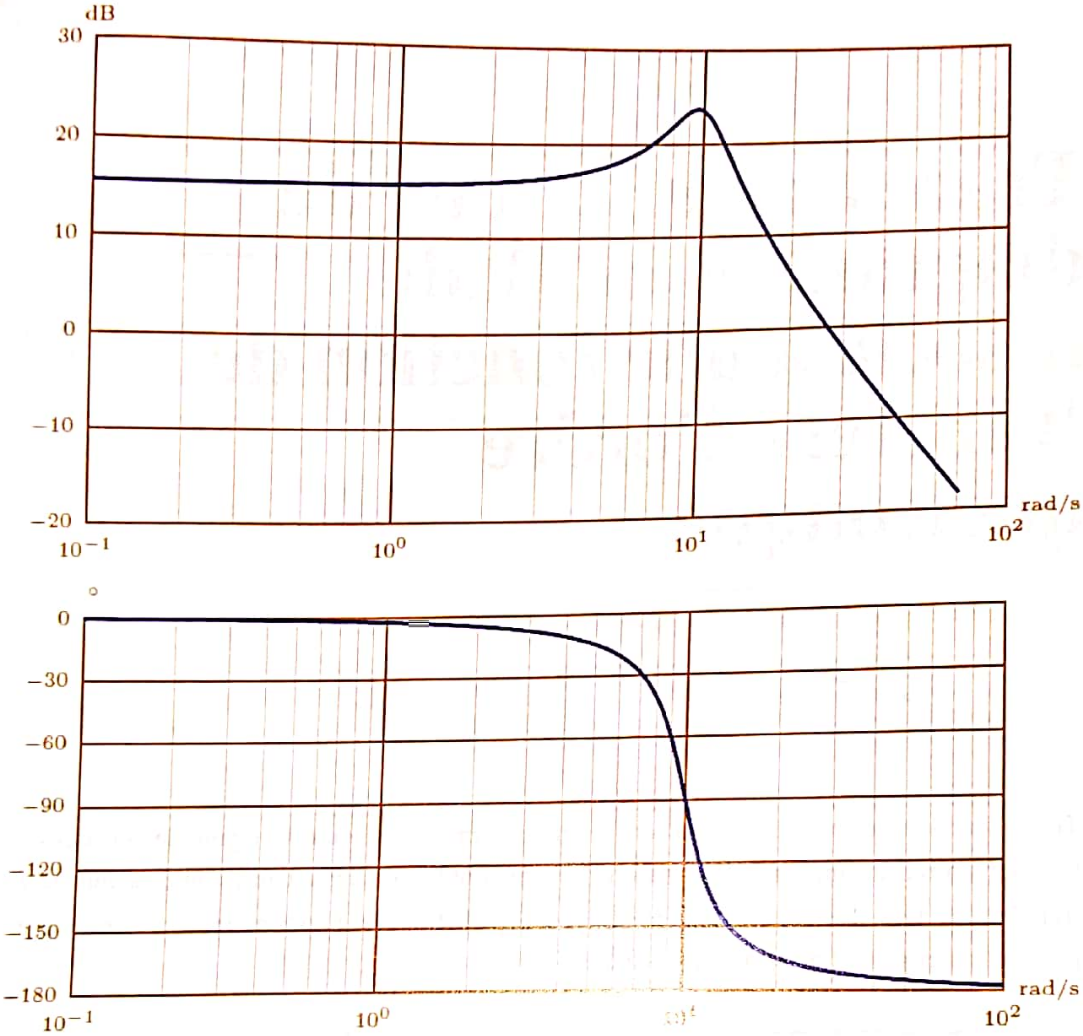


Diagramme de Bode

Question

[solution n°6 p.32*]*

Déterminez la fonction de transfert $H(p)$ correspondante.

Tracé asymptotique du diagramme de Bode associé à une fonction de transfert d'ordre quelconque

IV

Toute fonction de transfert peut s'écrire sous la forme du produit d'un gain, de fonctions de transfert du premier ordre, de fonctions de transfert du second ordre, de dérivateurs, d'intégrateurs et de fonctions de transfert du type $1 + \tau_k.p$ ou $1 + (2.\xi_l/\omega_l).p + p^2/(\omega_l^2)$ appelés respectivement premier ordre au numérateur et second ordre au numérateur. C'est-à-dire :

$$H_1(p) = K \cdot p^{\alpha} \cdot \frac{\prod\limits_k (1+\tau_k.p)^{n_k}}{\prod\limits_i (1+\tau_i.p)^{n_i}} \cdot \frac{\prod\limits_l \left(1 + 2 \cdot \frac{\xi_l}{\omega_l} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_l^2}\right)^{n_l}}{\prod\limits_j \left(1 + 2 \cdot \frac{\xi_j}{\omega_j} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_j^2}\right)^{n_j}}$$

ou :

$$H_2(p) = K \cdot \frac{1}{p^{\alpha}} \cdot \frac{\prod\limits_k (1+\tau_k.p)^{n_k}}{\prod\limits_i (1+\tau_i.p)^{n_i}} \cdot \frac{\prod\limits_l \left(1 + 2 \cdot \frac{\xi_l}{\omega_l} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_l^2}\right)^{n_l}}{\prod\limits_j \left(1 + 2 \cdot \frac{\xi_j}{\omega_j} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_j^2}\right)^{n_j}}$$

Le diagramme de Bode du système modélisé par une fonction de transfert d'ordre quelconque peut ainsi être facilement tracé en *sommant des diagrammes de Bode connus.*

1. Intégrateur pur

A partir de : $H(p) = \dfrac{K}{p}$

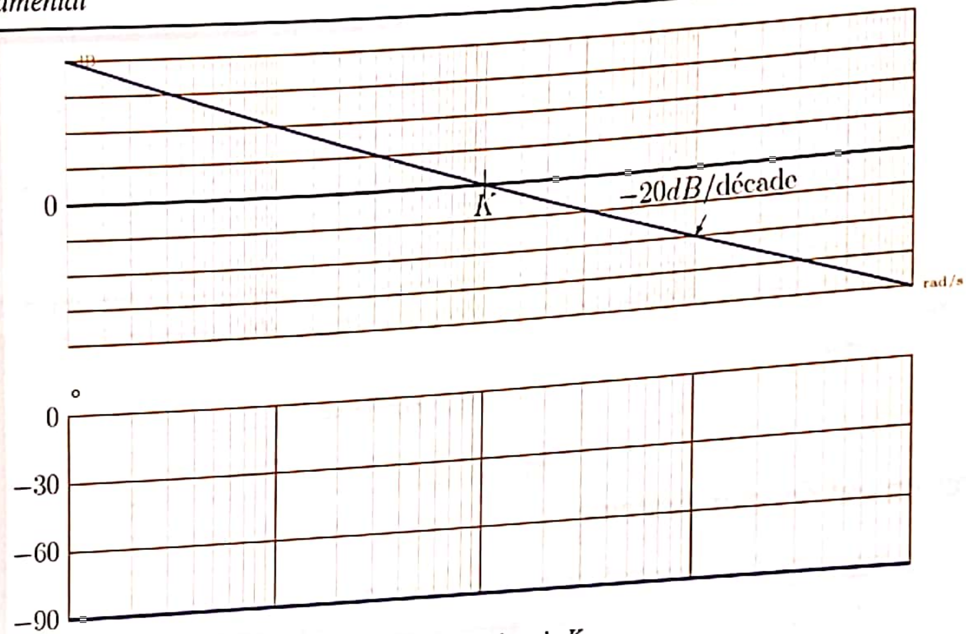
on écrit :

$$H(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$$

On en déduit :

Gain en dB	$\lvert H(j\omega)\rvert_{dB} = 20\log\left(\frac{K}{\omega}\right)$
Phase	$arg\,(H(j\omega)) = -\pi/2$

Fondamental



Intégrateur de gain K

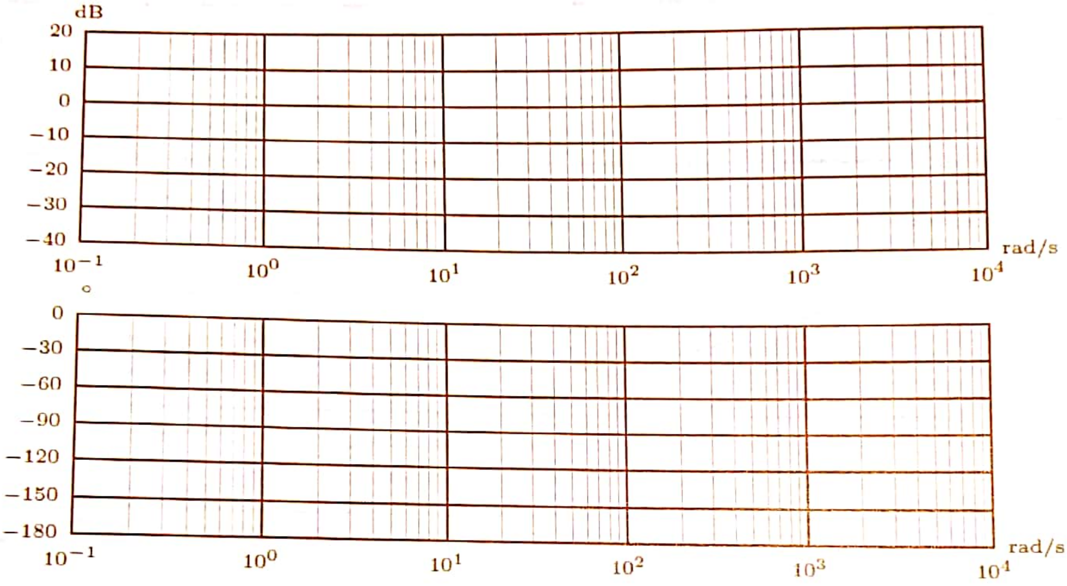
2. Exercice : Tracé du diagramme de Bode d'une fonction de transfert possédant un intégrateur

Soit la fonction de transfert $H(p) = \frac{8}{p(1+p)}$.

Question

[solution n°7 p.32]

Tracer le diagramme de Bode correspondant à cette fonction de transfert.



Échelle logarithmique

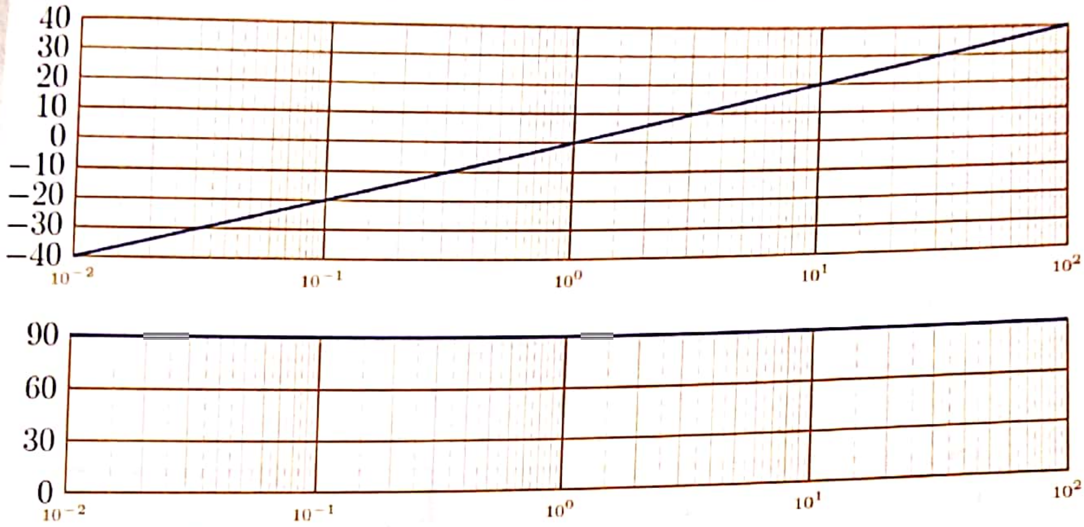
3. Traitement des numérateurs

Une fonction de transfert peut posséder un numérateur du type :

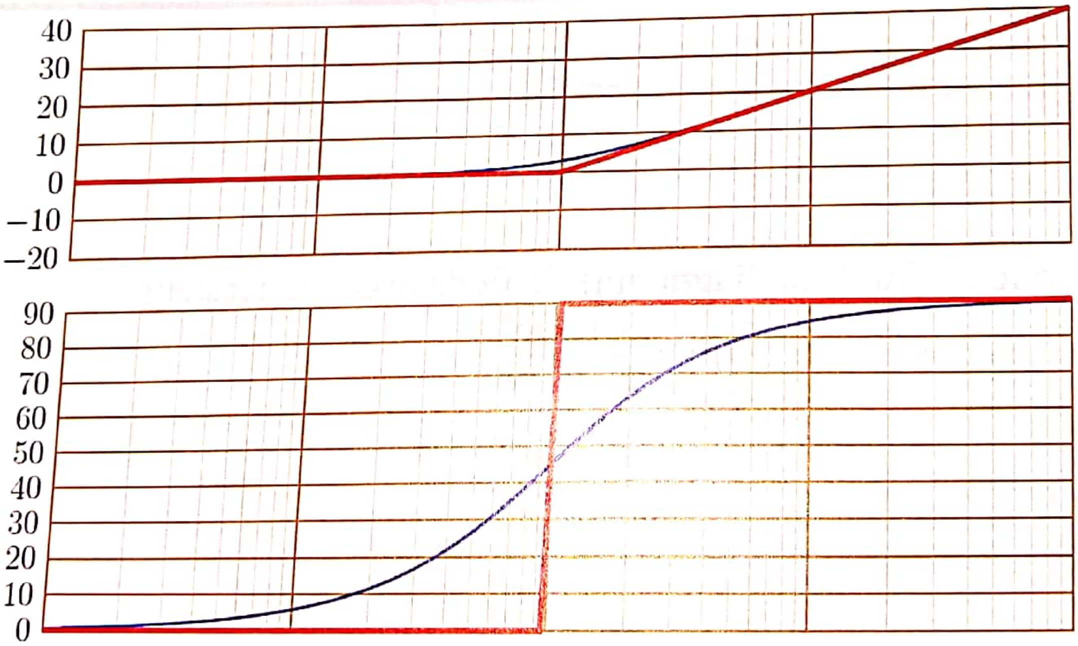
- p : dérivateur.
- $1 + \tau p$: premier degré.
- $1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}$: second degré.

Dans ce cas, il faut juste remarquer que ces fonction sont inverses de celle présentées précédemment. Or grâce aux propriétés du logarithme et de l'argument d'un nombre complexe, il suffit de prendre les résultats opposés des courbes précédentes.

Fondamental : Dérivateur

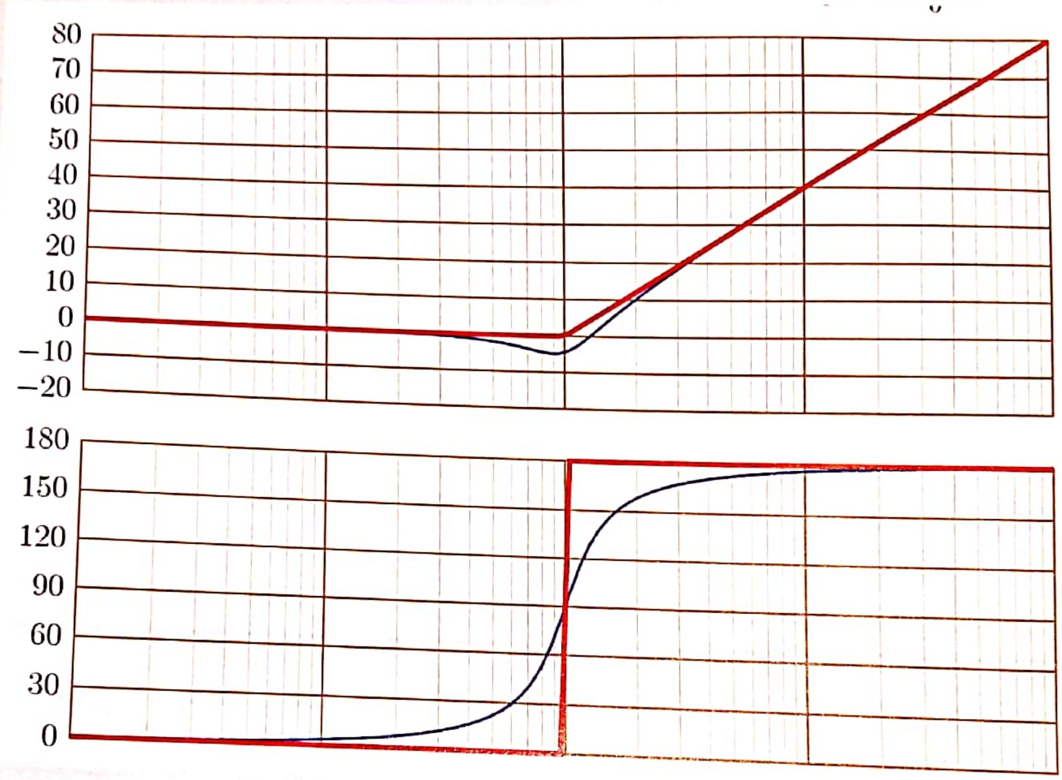


Fondamental : Premier ordre au numérateur



Premier ordre au numérateur

Fondamental : Second ordre au numérateur



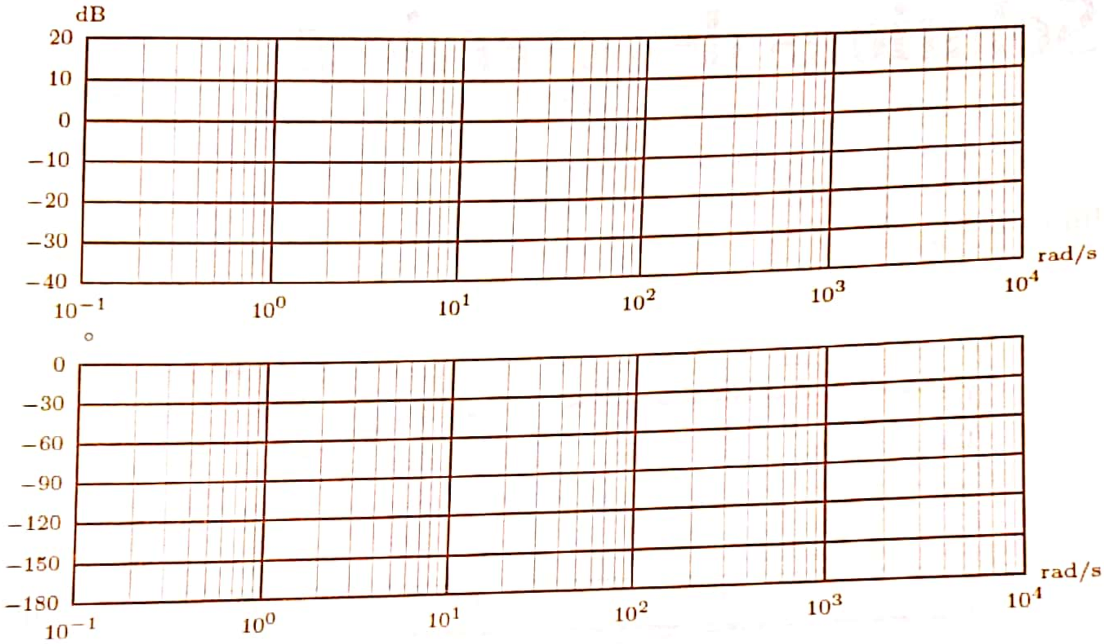
Second ordre au numérateur

4. Exercice : Tracé du diagramme de Bode avec numérateur

Soit la fonction de transfert $H(p) = \dfrac{1 + 10p}{1 + 0,1p}$

Question [solution n°8 p.33]

Tracer le diagramme de Bode correspondant à cette fonction de transfert.



Échelle logarithmique

Solutions des exercices

> Solution n°1

Exercice p. 13

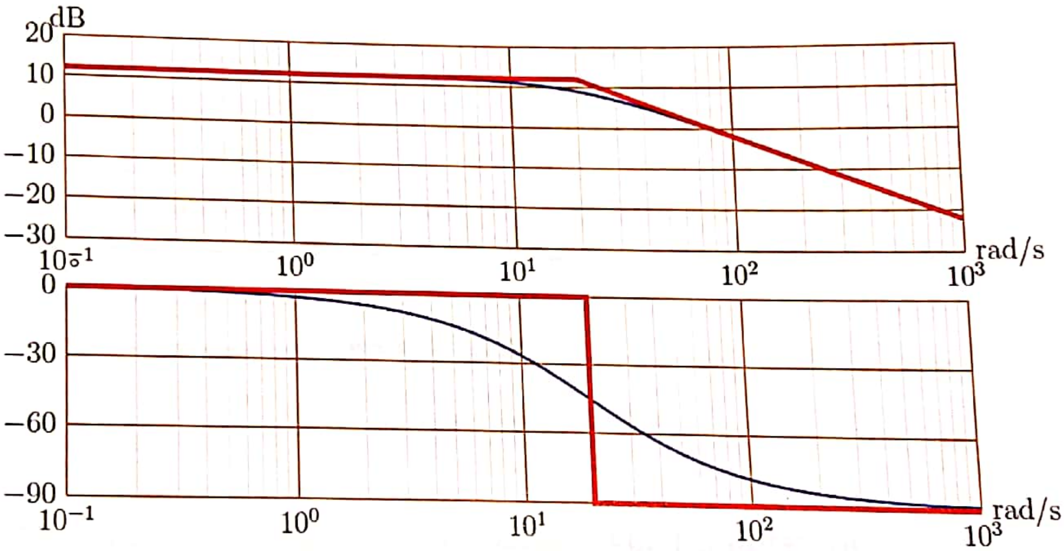


Diagramme de Bode

> Solution n°2

Exercice p. 14

$$H(p) = \frac{4}{1 + 20p}$$

Solution n°3

Exercice p. 17

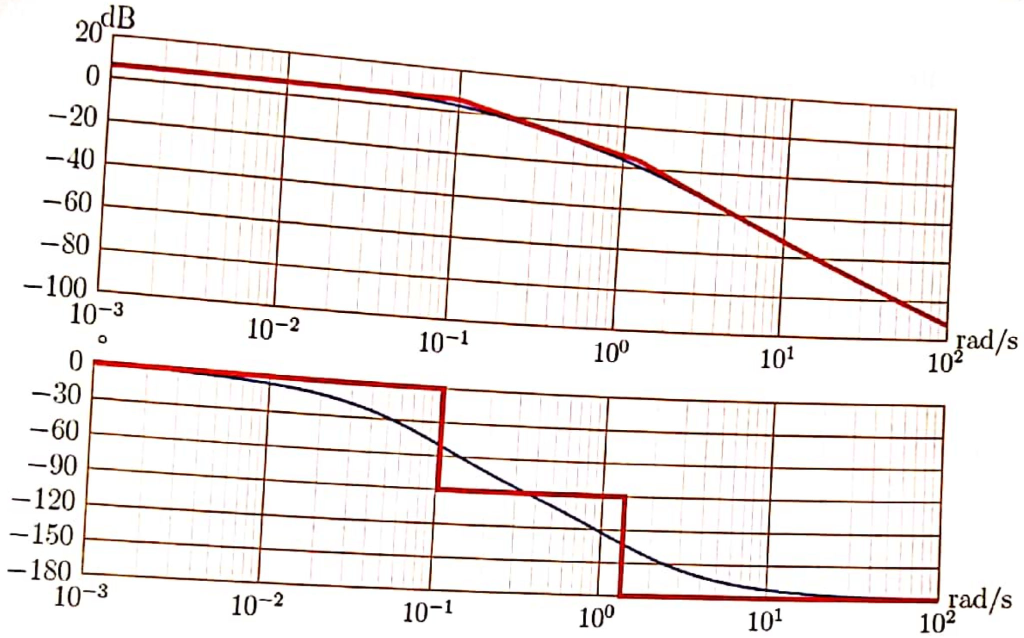


Diagramme de Bode

> Solution n°4

Exercice p. 19

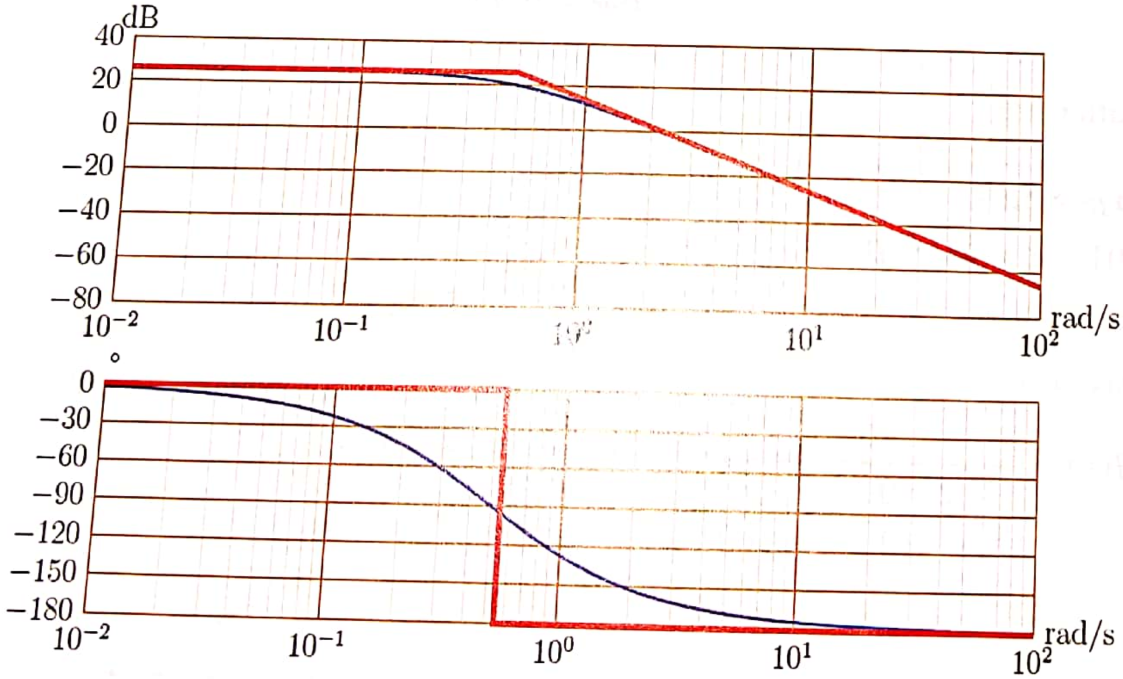


Diagramme de Bode

> Solution n°5

Exercice p. 22

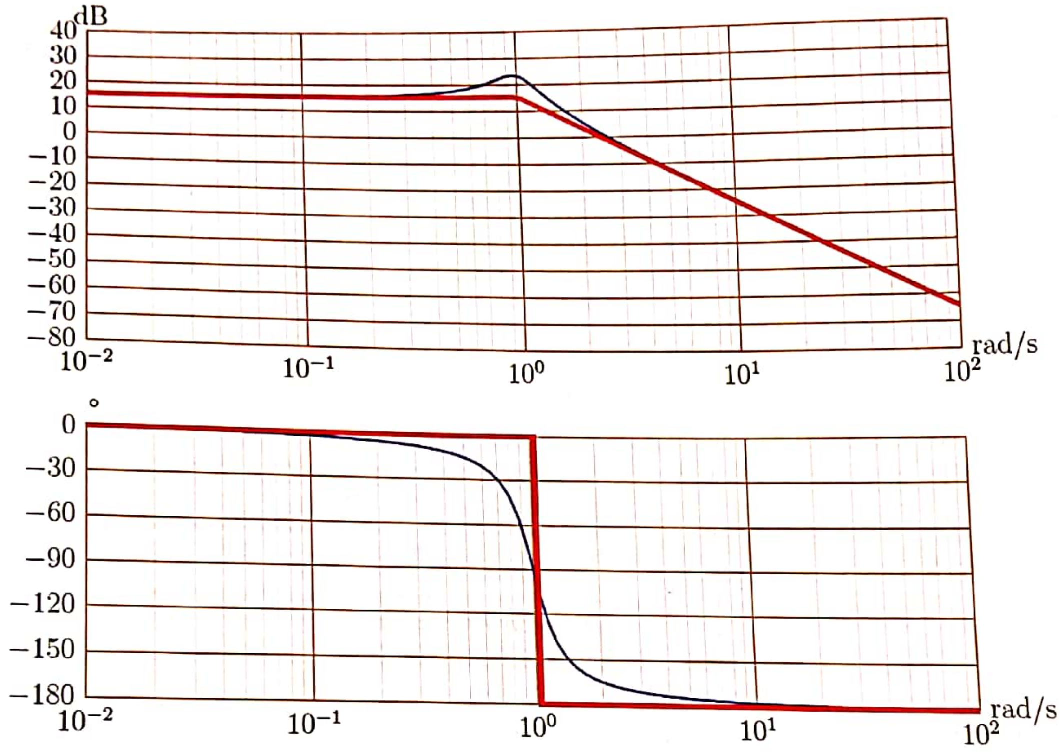


Diagramme de Bode

> Solution n°6

Exercice p. 23

$$M_{dB} \simeq 8dB$$

$$20\log K \simeq 15,5dB$$

$$\omega_n = 10rd/s$$

On en déduit :

$$H(p) = \frac{6}{1 + \frac{2\times 0,2}{10}p + \frac{p^2}{100}}$$

...ution n°7

Exercice p. 26

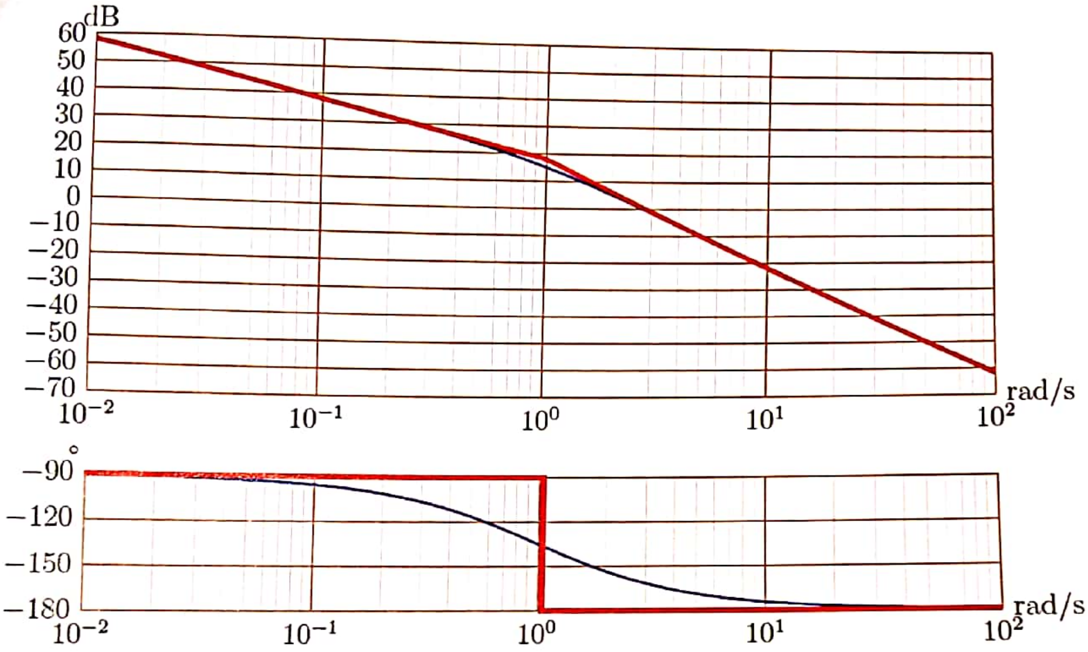


Diagramme de Bode

> **Solution** n°8

Exercice p. 29

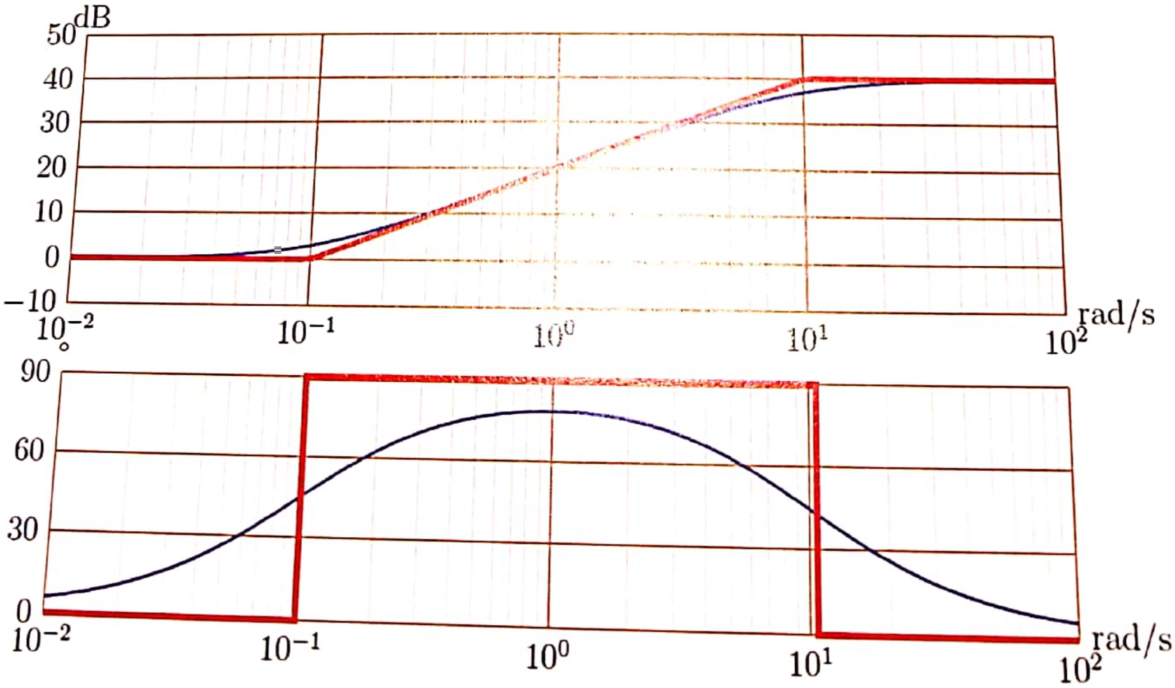


Diagramme de bode