

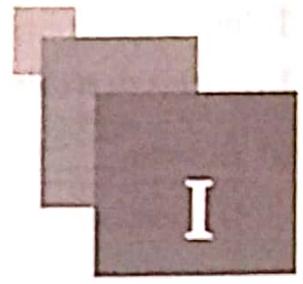
Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Cycle 4 – Modélisation des solides et liaisons d'un système complexe

Table des matières

I - Exemples d'introduction	3
1. Introduction	4
1.1. Définition et objectif	4
1.2. Train d'atterrissage d'un Airbus A340	4
2. Exemple du manège de parcs d'attraction	6
2.1. Extrait du cahier des charges fonctionnel	6
2.2. Modélisation du système	7
2.3. Graphe de structure	7
2.4. Schéma cinématique	8
2.5. Paramétrage	9
II - Référentiels et liaisons	11
1. Introduction à la cinématique : définitions	12
1.1. Solide indéformable	12
1.2. Référentiel : l'espace - temps	12
1.3. Équivalence repère solide	13
2. Positionnement d'un solide	14
2.1. Paramétrage	14
2.2. Positionnement d'un repère par rapport à un autre repère	14
3. Paramétrage et propriétés de mouvements particuliers	17
3.1. Mouvement de translation	17
3.2. Mouvement de rotation	18
3.3. Mouvement hélicoïdal	19
4. Liaisons entre solides	21
4.1. Géométrie générale des contacts entre deux solides	21
4.2. Degrés de mobilité	21
4.3. Liaisons élémentaires	21
4.4. Liaisons normalisées	22
III - Annexes	25
1. Repérages cylindrique et sphérique	26
1.1. Position d'un point dans un repère cylindrique (particulièrement adapté aux problèmes invariants par rotation autour d'un axe) ..	26
1.2. Position d'un point dans un repère sphérique (particulièrement adapté aux problèmes invariants par rotation autour d'un point O)	26
2. Orientation d'un solide par les angles d'Euler	27

Exemples d'introduction



1. Introduction

1.1. Définition et objectif

🔑 Définition

La cinématique est l'étude des mouvements, indépendamment de leurs causes.

🔑 Fondamental

L'objectif du cours de cinématique est d'introduire les outils théoriques nécessaires à cette étude. Une grande partie des mécanismes intéressant l'ingénieur sont constitués de pièces rigides (c'est à dire peu déformables) articulées entre elles à l'aide de liaisons. Les liaisons autorisent certains mouvements particuliers (de translation ou de rotation) entre les pièces.

1.2. Train d'atterrissage d'un Airbus A340

La figure suivante montre une photo du train d'atterrissage (à gauche) d'un Airbus A340 et une représentation graphique (à droite).

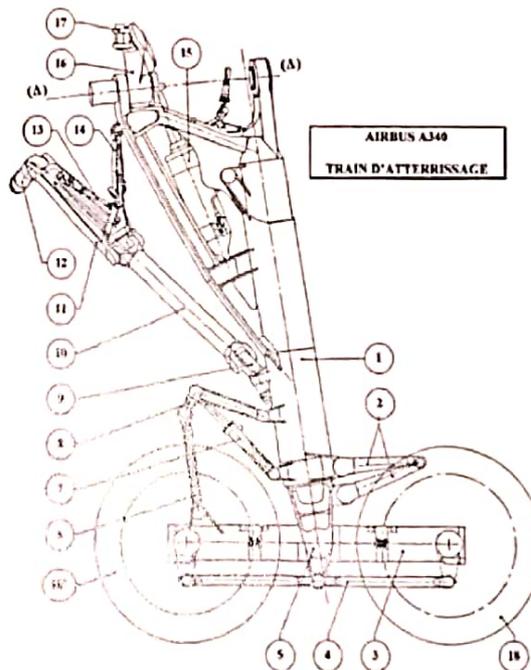
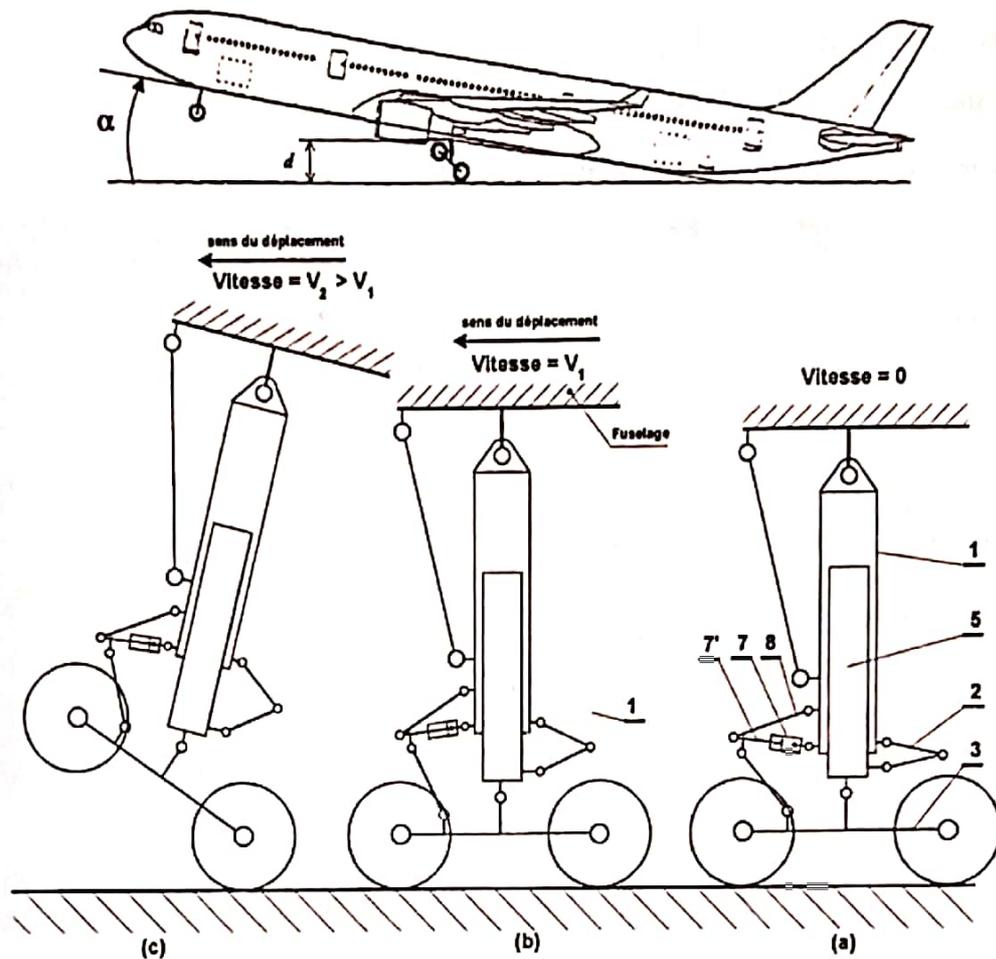


Photo et représentation graphique d'un train d'atterrissage d'A340

Le train d'atterrissage est un mécanisme complexe qui doit supporter des efforts importants lors de l'atterrissage et qui doit se replier dans le fuselage au cours du vol pour limiter la résistance aérodynamique. D'autre part, il assure une certaine progressivité lorsque l'avion touche la piste et il absorbe le choc.



Avion en phase d'atterrissage (en haut), et modélisation cinématique d'un train d'atterrissage d'A340 (en bas)

Sur ce type de système, on souhaite pouvoir déterminer les positions et les vitesses des pièces, par exemple au cours de la phase d'atterrissage ou encore lorsque le train se replie dans le fuselage. Le train d'atterrissage est constitué d'un grand nombre de pièces métalliques dont la déformation est très faible devant le mouvement autorisé par les liaisons. Le système est donc modélisé par un ensemble de solides supposés parfaitement rigides, reliés par des liaisons dont le mouvement est supposé parfait (c'est à dire sans jeux). La figure précédente (du bas) constitue un modèle cinématique du mécanisme dans les différentes phases de l'atterrissage.

2. Exemple du manège de parcs d'attraction

2.1. Extrait du cahier des charges fonctionnel

On retrouve dans de nombreuses fêtes foraines des manèges similaires à celui ci-dessous.



Photographie d'un manège de parc d'attraction

Le principe de ces manèges est procurer aux passagers des sensations de vitesse, d'envol et de lui faire tourner la tête. Bien que la vitesse, pour des raisons de sécurité, ne soit pas très élevée dans l'absolu, les sensations de vitesse sont obtenues en alternant les passages en hauteur et les passages au ras du sol. L'impression d'envol est obtenue par la combinaison d'une accélération en translation et d'une prise de hauteur. Enfin on fait « tourner la tête » du passager en le désorientant par des rotations multiples qui lui font perdre le sens de la verticale.

On s'intéresse plus particulièrement à la validation de la fonction principale décrite ci-dessous avec l'extrait du cahier des charges qui lui est associé.

	Fonction	Critère	Niveau
FP 1	Donner des sensations aux passagers, sous le contrôle du forain	Vitesse maximale	$30 \text{ km/h} < V_{\max} < 50 \text{ km/h}$
		Accélération maximale	$1,2 \text{ g} < \Gamma_{\max} < 1,8 \text{ g}$
		Nombre de rotations du passager	A déterminer
		Hauteur maximale atteinte	$H_{\max} < 10 \text{ m}$

Le cours de cinématique doit nous permettre d'étudier le mouvement du mécanisme afin de déterminer si les performances attendues dans le cahier des charges sont atteintes.

Pour déterminer ces performances, l'ingénieur doit modéliser le système, pour décrire son mouvement manège et calculer les positions, les vitesses et les accélérations subies par le passager. Modéliser un système, c'est donner une représentation simplifiée de ce système pour faire apparaître plus clairement les propriétés intéressantes du point de vue de l'étude. En cinématique, seuls les mouvements des pièces sont étudiés. On utilise donc des représentations laissant apparaître uniquement les solides et les liaisons entre solides.

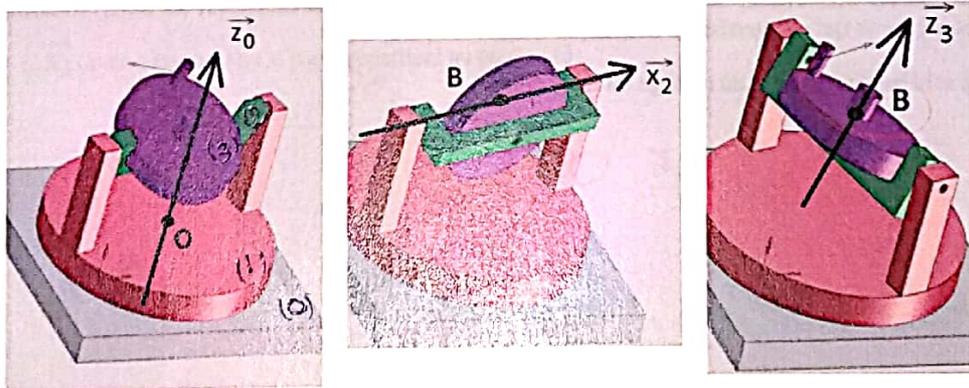
2.2. Modélisation du système

On remarquera que dans tous les mécanismes couramment étudiés, pour chaque liaison entre solides, le mouvement est relativement simple et se décompose en quelques rotations ou translations bien déterminées. Il est ainsi possible de proposer des modèles cinématiques de liaisons, autorisant certaines rotations et/ou certaines translations. Ces modèles seront étudiés en détail dans la suite du cours de cinématiques des systèmes de solides. On retiendra d'ores et déjà la *liaison pivot* qui autorise une unique rotation, et la *liaison glissière* qui autorise une unique translation.

Dans un premier temps, on commence donc par définir les solides indéformables constituant le mécanisme et par étudier les mouvements autorisés par les liaisons entre ces solides.

Dans le cas particulier du manège, le système est constitué de quatre solides en rotation les uns par rapport aux autres :

- estrade ou plancher (0), fixe par rapport au sol ;
- plateau (1) : en rotation par rapport au solide (0) autour de l'axe (O, \vec{z}_0) ;
- bras (2) : en rotation par rapport au plateau (1) autour de l'axe (B, \vec{x}_2) ;
- disque (3) : en rotation par rapport au bras (2) autour de l'axe (B, \vec{z}_3) .



Axes de rotation entre les solides (0) et (1) (gauche), (1) et (2) (milieu), et (2) et (3) (droite)

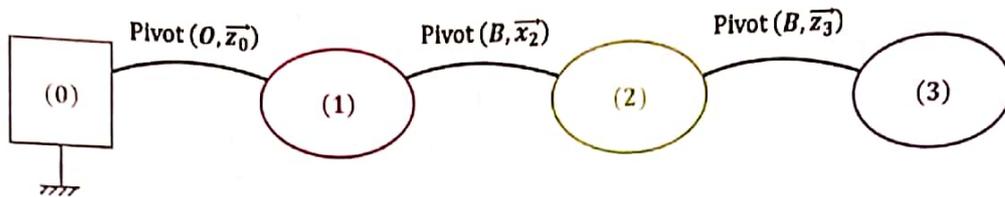
2.3. Graphe de structure

Une première représentation utilisée pour décrire les mouvements des différents solides composant un système est le graphe de structure, parfois appelé graphe des liaisons. Dans ce graphe, chaque solide est représenté par une ellipse (ou éventuellement un rectangle lorsqu'il s'agit d'un solide fixe) et chaque liaison est représentée par un arc entre deux solides.

Dans le cas du manège étudié ici, le graphe de structure est donc le suivant :



Schéma cinématique



Grphe de structure du manège

On précise en général sur le graphe de structure les caractéristiques géométriques des liaisons, comme par exemple l'axe de rotation pour une liaison pivot ou la direction de translation pour une liaison glissière.

Le graphe de structure du manège montre que ce mécanisme fonctionne en *chaîne ouverte*. Des mécanismes fonctionnant en *chaîne bouclée* seront étudiés dans la suite de ce cours.

Chaîne ouverte	Chaîne bouclée (autre que le manège)

2.4. Schéma cinématique

Le graphe de structure est un bon outil pour présenter l'organisation du système, mais il est insuffisant pour expliciter le paramétrage (les points géométriques, les bases, les paramètres angulaires et de longueur, etc...).

On lui préfère alors le schéma cinématique, qui utilise une représentation normalisée des liaisons. Les solides sont eux représentés par des traits, entre les liaisons. Un exemple de schéma cinématique est donné en début de cours pour le train d'atterrissage de l'A340.

Le schéma cinématique du manège est le suivant :

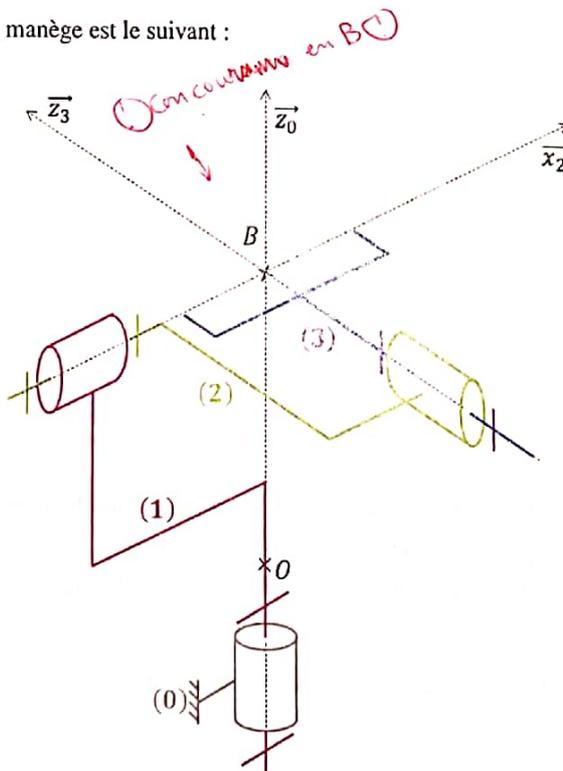


Schéma cinématique du manège

Remarque

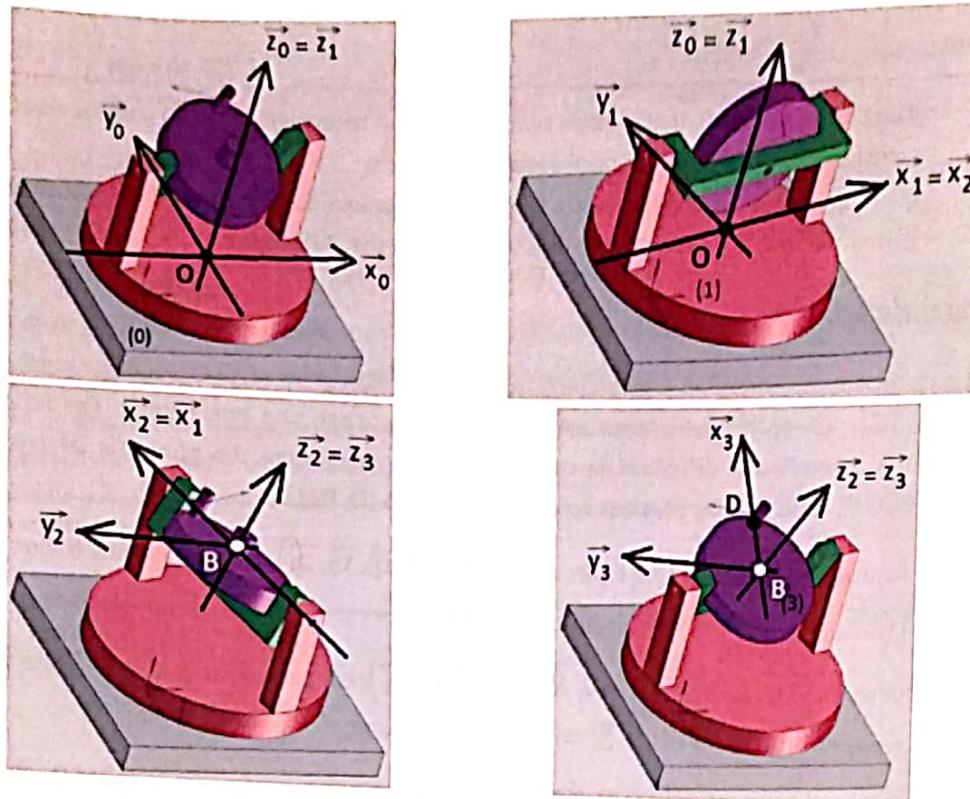
- dans ce cas particulier, le schéma ne comprend que des liaisons pivots car les seuls mouvements autorisés entre les solides composant le manège sont des rotations ;
- quelle que soit la liaison représentée, le schéma cinématique doit prendre en compte la direction de cette liaison : ici, les trois directions des trois liaisons pivot sont différentes.

2.5. Paramétrage

Afin de décrire sans ambiguïté le mouvement des solides du manège les uns par rapport aux autres, on associe à chacun d'eux un repère spatial constitué d'une origine et d'une base orthonormée. On définit ainsi les paramètres associés aux différents mouvements (angles de rotation). La géométrie du mécanisme est caractérisée en définissant les positions des points particuliers (O, B et D).

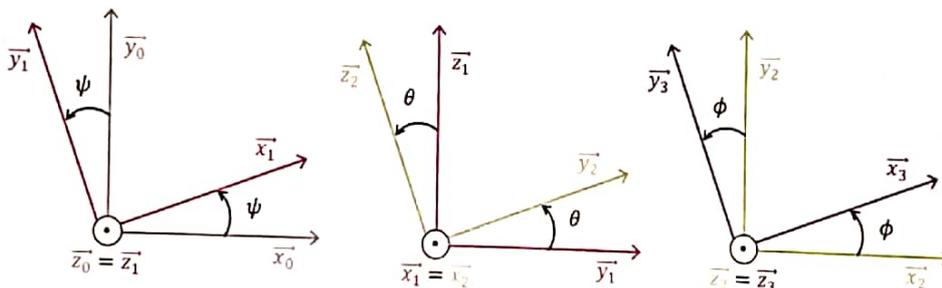
- l'estrade (0) ou plancher, de repère associé $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, fixe par rapport à la terre tel que l'axe (O, \vec{z}_0) soit dirigé suivant la verticale ascendante ;
- le plateau (1), de repère associé $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, en mouvement de rotation d'axe (O, \vec{z}_0) par rapport à l'estrade (0) tel que $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$ et $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = \psi$;
- le bras (2), de repère associé $R_2(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$, en mouvement de rotation d'axe (B, \vec{x}_1) par rapport au plateau (1) tel que $\vec{OB} = b \cdot \vec{z}_0$ (avec b constant), $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$ et $(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = \theta$;
- le disque (3), de repère associé $R_3(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$, en mouvement de rotation d'axe (B, \vec{z}_2) par rapport au bras (2) tel que $\vec{z}_2 = \vec{z}_3$ et $(\vec{x}_2, \vec{x}_3) = \phi$.

La position du point D, représentant le passager dont on souhaite étudier le mouvement est définie par : $\vec{BD} = c \cdot \vec{x}_3$ (avec c constant). Ce point appartient au plateau (3).



Repères associés aux solides (0), (1), (2) et (3)

Pour définir plus clairement les paramètres angulaires, on peut dessiner des figures de changement de bases, qui faciliteront les calculs dans la suite de l'étude. Pour le cas du manège, ces figures sont les suivantes :



Figures de changements de bases

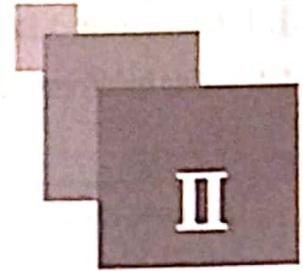
La définition des bases, des paramètres et des points permet donc de caractériser complètement la géométrie et les mouvements du mécanisme étudié. Cet ensemble d'informations est appelé *paramétrage* du système.

Remarque

Dans la suite du cours de cinématique, nous serons amenés à vérifier les performances attendues dans le cahier des charges du manège en répondant aux points suivants :

- déterminer la position du point D par rapport au sol ;
- déterminer la vitesse du point D appartenant au disque (3) par rapport au sol ;
- déterminer l'accélération du point D appartenant au disque (3) par rapport au sol.

Référentiels et liaisons



1. Introduction à la cinématique : définitions

1.1. Solide indéformable

🔑 Définition

On appelle système matériel un ensemble de points matériels. Un solide indéformable S est un système matériel, tel que la distance entre deux points A et B appartenant à ce système, reste constante au cours du temps.

$$\forall A \in (S) \text{ et } \forall B \in (S), \|\vec{AB}\| = cste$$



Solides indéformables

1.2. Référentiel : l'espace – temps

La problématique initiale lors de l'étude des performances cinématiques d'un système est de fournir les informations nécessaires et suffisantes pour repérer, à chaque instant, un point dans l'espace.

Repère d'observation

Il s'agit pour commencer de définir quel est le repère dans lequel on souhaite décrire la position et/ou le mouvement d'un point. Il est indispensable de définir un repère de référence (à rapprocher de la notion d'observateur du mouvement). La position d'un point ou son mouvement seront différents selon le repère d'observation choisi.

🔑 Exemple

- le mouvement d'un voyageur se déplaçant dans un train sera différent si on l'observe dans un repère lié au train ou dans un repère lié à la Terre ;
- pour l'étude de la trajectoire d'un satellite dans l'espace, la trajectoire sera différente si elle est décrite dans un repère lié à la Terre ou dans un repère lié au système solaire.

Un repère est défini par une origine O_r et par une base orthonormée directe de trois vecteurs

. L'ensemble $\{origine + base\}$ forme un repère spatial d'observation.

Chronologie

En plus du repère de l'espace, il est nécessaire de définir une chronologie, pour le paramétrage du temps. Une position est définie par sa date, appelée instant. La différence entre deux instants est appelée durée. En mécanique classique, le repère temporel est unique.

↳ Définition : Référentiel

L'ensemble formé par le repère spatial et le repère temporel est nommé référentiel.

1.3. Équivalence repère solide

Dans un repère spatial, les points extrémités des vecteurs unitaires sont à des distances constantes de l'origine.
Un repère est donc équivalent à un solide.

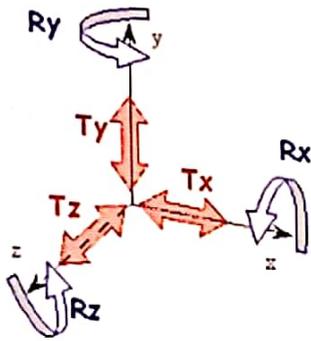
L'étude des mouvements d'un solide S_k par rapport à un solide S_j est identique à :

- l'étude des mouvements du solide S_k par rapport à un repère R_i lié au solide S_j ;
- l'étude des mouvements du repère R_k lié au solide S_k par rapport au solide S_j ;
- l'étude des mouvements du repère R_k lié au solide S_k par rapport au repère R_i lié au solide S_j .

2. Positionnement d'un solide

2.1. Paramétrage

La position d'un solide S_k par rapport à un repère R_i , dans un espace à trois dimensions, est définie par trois points non alignés donc par neuf paramètres. Mais ces trois points restent à des distances invariables les unes des autres. Il convient donc d'ajouter trois équations de liaison de ces paramètres.



Degrés de liberté

La position d'un solide S_k par rapport à un repère R_i dépend donc de six paramètres indépendants. Il est usuel en Mécanique de considérer :

- les trois coordonnées du point origine du repère R_k dans le repère R_i ;
- les trois angles qui définissent la position de la base $(\vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ du repère R_k par rapport à celle du repère R_i .

Les possibilités de variation de ces six paramètres correspondent aux possibilités de mouvement du solide S_k par rapport au repère R_i .

Une possibilité de mouvement est appelée degré de liberté. Il existe donc au maximum six degrés de liberté (trois translations et trois rotations).

Lorsqu'il existe des liaisons entre plusieurs solides (une liaison annule p degrés de liberté avec $0 < p < 6$), il convient de paramétrer la position des différents solides. Un paramétrage mal choisi conduit à des calculs longs et fastidieux.

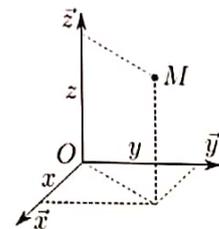
2.2. Positionnement d'un repère par rapport à un autre repère

Définition des coordonnées de l'origine d'un repère

On cherche en premier lieu à positionner l'origine O_k du repère $R_k (O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ dans un repère $R_i (O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$. Il existe trois systèmes de coordonnées classiques, les coordonnées, cartésiennes, cylindriques et sphériques. Nous nous contenterons dans ce cours des coordonnées cartésiennes.

Le repère cartésien est défini par un point et une base orthonormée directe.

Les coordonnées cartésiennes, notées (x, y, z) , du point M dans le repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ sont les projections du vecteur \vec{OM} sur chacun des axes $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:



$$\text{Soit } x = \vec{OM} \cdot \vec{x}; y = \vec{OM} \cdot \vec{y} \text{ et } z = \vec{OM} \cdot \vec{z}.$$

Les systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques sont définis en annexe.

Définition de l'orientation relative de deux bases : angles de Cardan

Dans un deuxième temps on cherche à définir l'orientation de la base $(\vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ du repère $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ par rapport à la base $(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ du repère $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$. Cette orientation est toujours définie par trois paramètres (angles).

- le paramétrage par les angles d'Euler est présenté à titre indicatif en annexe. Ce paramétrage ne sera que très rarement utilisé en Sciences et de l'Ingénieur ;
- le paramétrage par les angles de Cardan intervient plus couramment pour le paramétrage des mouvements d'un véhicule, il est décrit ci-dessous.

Orientation d'un solide par les angles de Cardan :

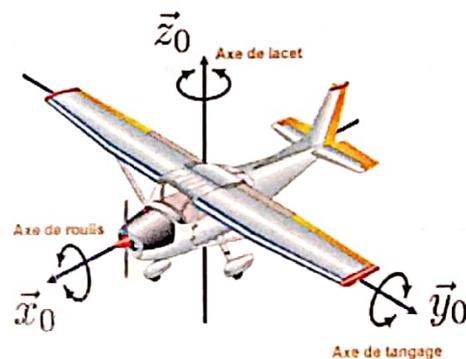
Les trois angles de Cardan (roulis, tangage, lacet) correspondent à la composition de trois rotations planes successives qui permettent d'orienter une base $(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ par rapport à une base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$:

- la première rotation d'angle θ , autour de l'axe \vec{x}_0 permet de passer de la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ à une première base intermédiaire $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ avec $\vec{x}_1 = \vec{x}_0$. L'angle θ est appelé "angle de roulis" ;
- une seconde rotation d'angle ψ , est alors appliquée autour de l'axe \vec{y}_1 , de la première base intermédiaire, ce qui permet de définir une seconde base intermédiaire $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ avec $\vec{y}_2 = \vec{y}_1$. L'angle ψ est appelé "angle de tangage" ;
- la dernière rotation, d'angle μ , est appliquée autour de l'axe \vec{z}_2 de la seconde base intermédiaire, ce qui permet de positionner la base $(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ liée au véhicule, avec $\vec{z}_3 = \vec{z}_2$. L'angle μ est appelé "angle de lacet".

Ce paramétrage est habituellement employé pour paramétrer de petits mouvements d'un véhicule autour d'une base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ définie à l'aide de la trajectoire de son centre de gravité dans le référentiel du mouvement. Le paramétrage employé est alors le suivant :

- l'axe de roulis \vec{x}_0 est confondu avec la direction de la trajectoire du centre de gravité du véhicule par rapport au référentiel du mouvement ;
- l'axe de tangage \vec{y}_0 est orthogonal à \vec{x}_0 , dans le plan local défini par la trajectoire du centre de gravité du véhicule par rapport au référentiel du mouvement ;
- l'axe de lacet \vec{z}_0 est orthogonal au plan local défini par la trajectoire du centre de gravité du véhicule par rapport au référentiel du mouvement.

L'application de ce paramétrage au cas de l'étude du comportement d'un avion en vol est donnée sur la figure ci-contre.



Paramétrage de l'orientation d'un avion par les angles de Cardan

3. Paramétrage et propriétés de mouvements particuliers

3.1. Mouvement de translation

🔑 Définition

Un solide S_k est animé d'un mouvement de translation par rapport à un repère R_i , si deux vecteurs non parallèles \vec{AB} et \vec{AC} appartenant à S_k restent constants au cours du mouvement. Attention, pour que deux vecteurs soient constants, ils doivent bien évidemment être constants en direction, en sens et en norme.

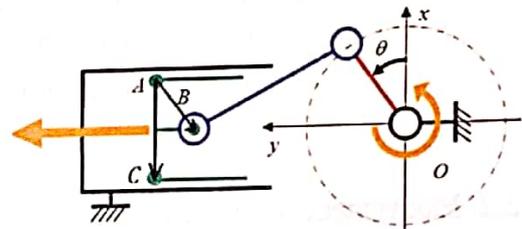
📦 Complément

Conséquence : quels que soient les points A et B appartenant à un solide S_k , en translation par rapport à un repère R_i , la trajectoire du point B est celle du point A traduite du vecteur \vec{AB} .

En effet nous avons : $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$. Or, par définition du mouvement de translation, $\forall A \in S$ et $\forall B \in S, \vec{AB} = \vec{cste}$.

👉 Exemple : Translation rectiligne

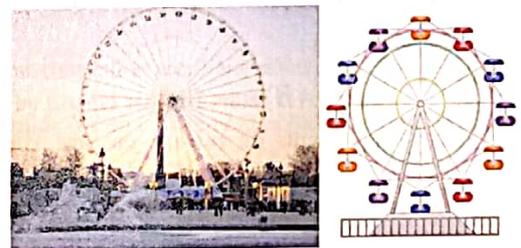
Si la trajectoire de ces points est une droite, alors la translation est dite rectiligne. Ce mouvement caractérise une liaison rencontrée couramment en construction mécanique : la liaison glissière.



Cas d'un solide en translation rectiligne : le piston constitué des points ABC d'un système bielle-manivelle

👉 Exemple : Translation curviligne ou circulaire

Si la trajectoire des points du solide est une courbe, alors la translation est dite curviligne. Très souvent, la translation est circulaire (la trajectoire est un arc de cercle ou un cercle).

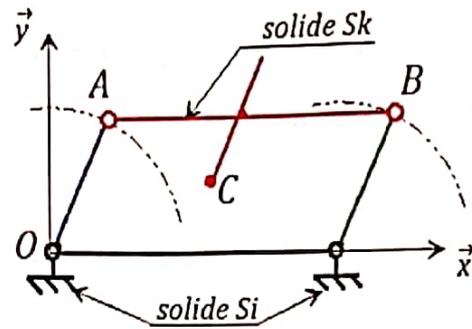


Cas d'un solide en translation circulaire : les nacelles de la grande roue

- trajectoire du point A : cercle de centre O et de rayon OA

Mouvement de rotation

- trajectoire du point B : trajectoire de A translaturée du vecteur \vec{AB}
- trajectoire du point C : trajectoire de A translaturée du vecteur \vec{AC}
- les vecteurs non parallèles \vec{AB} et \vec{AC} restent au cours du mouvement parallèles à eux-mêmes. Le mouvement est donc un mouvement de translation. Les trajectoires des points A, B et C étant des cercles, la translation est dite circulaire.

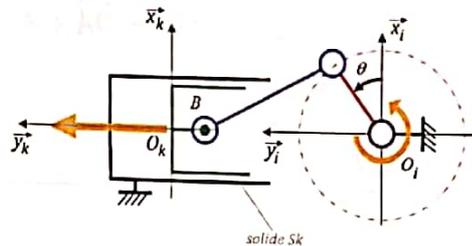


Cas d'un solide en translation circulaire : le solide S_k dans un système d'essuie-glace

Repérage et paramétrage d'un mouvement de translation

Pour décrire au mieux le déplacement d'un solide S_k en translation par rapport à un repère R_i , il suffit de choisir un repère R_k lié au solide S_k et tel que deux de ses axes restent parallèles à deux axes du repère R_i tout au long du mouvement.

Le paramètre décrivant le mouvement du repère R_k par rapport au repère R_i au cours du temps sera alors le scalaire $\lambda(t) = \overrightarrow{O_i O_k} \cdot \vec{y}_k$ (scalaire variable au cours du temps).



Exemple de paramétrage choisi pour l'étude du mouvement du solide S_k (le piston) par rapport au repère R_i dans le cas d'un système bielle-manivelle

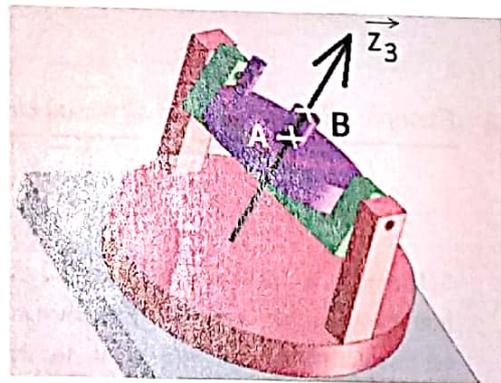
3.2. Mouvement de rotation

🔗 Définition

Un solide S_k est animé d'un mouvement de rotation par rapport à un repère R_i autour de la droite (AB) si tous les points situés à l'intersection du solide S_k et de la droite (AB) restent fixes au cours du mouvement. La droite (AB) est alors appelée axe de rotation.

Conséquences :

- l'axe (AB) étant fixe par rapport au repère R_i , tous les points de cet axe ont une vitesse nulle par rapport au repère R_i
- la trajectoire d'un point M quelconque appartenant au solide S_k en rotation autour de l'axe (AB) est un cercle centré sur cet axe et perpendiculaire à cet axe



Cas d'un solide en rotation – le manège étudié en introduction du cours présente plusieurs mouvements de rotation autour de différents axes

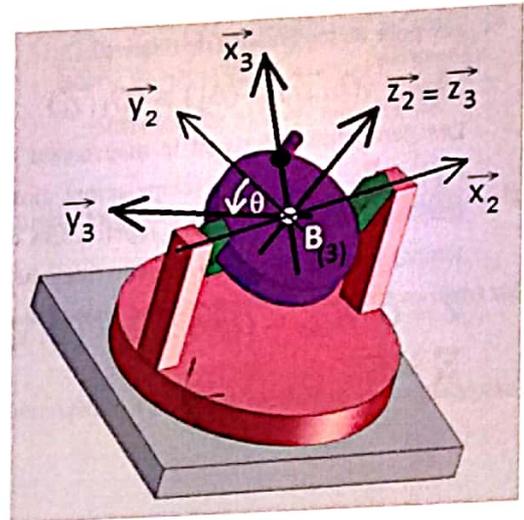
Remarque

Ce mouvement caractérise une liaison rencontrée couramment en construction mécanique, appelée la *liaison pivot*.

Repérage et paramétrage d'un mouvement de rotation

Pour décrire au mieux le déplacement d'un solide S_k en rotation par rapport à un repère R_i , il suffit de choisir le repère R_k lié au solide S_k tel que l'un de ses axes (par exemple l'axe (O_k, \vec{z}_k)) soit confondu avec l'un des axes du repère R_i (par exemple l'axe (O_i, \vec{z}_i)) ET avec l'axe de rotation (AB) tout au long du mouvement. Le point O_k est choisi SUR l'axe de rotation (AB) .

Le paramètre décrivant le mouvement du repère R_k par rapport au repère R_i au cours du temps sera alors l'angle de rotation θ entre les deux repères. Cet angle est une fonction du temps.



Exemple de paramétrage choisi pour l'étude d'un mouvement de rotation

3.3. Mouvement hélicoïdal

Définition

Un solide S_k est animé d'un mouvement hélicoïdal par rapport à un repère R_i si :

- une droite (Δ_k) du solide S_k reste en coïncidence avec une droite (Δ_i) du repère R_i
- l'angle θ qui repère la rotation autour de l'axe commun porté par (Δ_i) et (Δ_k) est proportionnel à la cote Z qui relie le déplacement d'un point O_k de (Δ_k) par rapport à un point O_i de (Δ_i) :

$$Z = \lambda \cdot \theta = \frac{\text{pas}}{2\pi} \cdot \theta$$
, où *pas* est le pas du mouvement hélicoïdal

Conséquence :

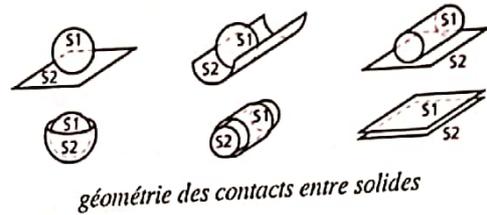
- la trajectoire d'un point I appartenant à l'axe (Δ_k) est une translation rectiligne selon cet axe
- la trajectoire d'un point M quelconque appartenant au solide S_k en mouvement hélicoïdal autour de l'axe (Δ_k) est une hélice d'axe (Δ_k)

Remarque : ce mouvement caractérise une liaison rencontrée couramment en construction mécanique, la liaison hélicoïdale.

4. Liaisons entre solides

4.1. Géométrie générale des contacts entre deux solides

Deux solides S_i et S_k sont en contact lorsqu'une surface géométrique élémentaire liée à S_i s'appuie sur une surface géométrique élémentaire liée à S_k . Les surfaces de contact géométriques élémentaires sont le plan, le cylindre de révolution et la sphère. Dans le cadre de ce cours, elles sont supposées indéformables.



Les contacts entre deux solides sont classés en contacts ponctuels, linéaires ou surfaciques, en fonction de la surface de contact observée entre les deux solides.

- lorsque l'aire de la surface de contact tend vers zéro, le contact est dit ponctuel (cas sphère/plan) ou linéaire (cas sphère/cylindre et cas cylindre/plan)
- dans les autres cas, le contact est dit surfacique (cas sphère/sphère, cas cylindre/cylindre et cas plan/plan)

4.2. Degrés de mobilité

🔗 Définition

On appelle degré de mobilité, ou degré de liberté, l'un des 6 paramètres indépendants variables au cours du déplacement dans l'espace du solide S_k par rapport au solide S_i , notés $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $\theta_x(t)$, $\theta_y(t)$, $\theta_z(t)$.

Ces degrés de mobilité subsistants dans un contact entre deux solides S_i et S_k correspondent aux mouvements relatifs indépendants autorisés au sein de ce contact. Ainsi, aux paramètres $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ sont associés des mouvements relatifs de translation du solide S_k selon des directions parallèles aux axes du repère R_i alors qu'aux paramètres $\theta_x(t)$, $\theta_y(t)$, $\theta_z(t)$ sont associés des mouvements relatifs de rotation du solide S_k autour des axes du repère R_i .

4.3. Liaisons élémentaires

L'observation de la surface (ou des surfaces) de contact entre deux solides permet de proposer une liaison modélisant le comportement cinématique possible entre ces solides. Les liaisons élémentaires sont obtenues à partir du contact entre deux surfaces géométriques élémentaires (sphère, cylindre, plan).

Les différentes liaisons élémentaires sont définies à partir du tableau ci-dessous :

S1 \ S2	Sphère	Cylindre	Plan
Sphère	a Liaison rotule 	b Liaison sphère-cylindre 	c Liaison sphère-plan
Cylindre	d Liaison cylindre-sphère 	e Liaison pivot glissant 	f Liaison linéaire rectiligne
Plan	g Liaison cylindre-plan 	h Liaison rotule rectiligne 	i Liaison appui plan

liaisons issues de l'association de surfaces géométriques élémentaires

- liaison sphérique (ou liaison rotule) ;
- liaison sphère-cylindre (ou linéaire annulaire) ;
- liaison sphère-plan (ou ponctuelle) ;
- liaison pivot glissant ;
- liaison cylindre-plan (ou linéaire rectiligne) ;
- liaison appui plan.

En plus de ces liaisons élémentaires, il existe en construction mécanique plusieurs autres liaisons, obtenues par la combinaison des 6 précédentes. Une norme définit certaines de ces liaisons (les plus couramment utilisées).

4.4. Liaisons normalisées

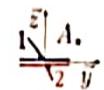
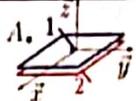
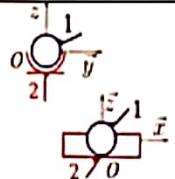
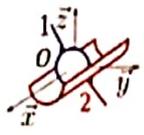
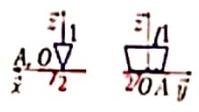
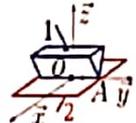
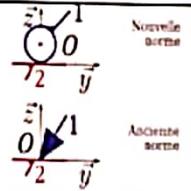
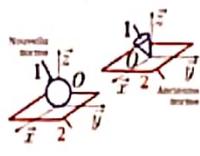
Les liaisons les plus courantes rencontrées en construction mécanique sont normalisées par l'AFNOR. À chaque liaison sont associés un nom et une schématisation. Ces schématisations sont nécessaires pour établir, par exemple, le schéma cinématique d'un mécanisme.

Les hypothèses sont les suivantes :

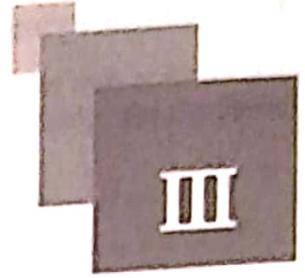
- les solides S_i et S_k sont indéformables et en mouvement relatif ;
- les surfaces de liaison entre les deux solides S_i et S_k sont géométriquement parfaites et leur positionnement géométrique relatif parfait ;
- les solides S_i et S_k sont en contact sans aucun jeu ;
- un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est associé à chaque liaison.

Nb. ddl	Désignation (norme AFNOR)	Schématisation		Caractéristiques géométriques
		2D	3D	
0	Liaison encastrement (liaison fixe)			Aucune
1	Liaison pivot			Axe (O, \vec{x})
1	Liaison glissière			Direction \vec{x}
1	Liaison hélicoïdale			Axe (O, \vec{x})
2	Liaison pivot glissant			Axe (O, \vec{x})
2	Liaison sphérique à doigt			Centre O + plan de la rainure + direction du doigt
3	Liaison sphérique (liaison rotule)			Centre O

Liaisons normalisées

3	Liaison appui plan			Normale \vec{z}
4	Liaison sphère-cylindre (liaison linéaire annulaire)			Axe (O, \vec{x})
4	Liaison cylindre-plan (liaison linéaire rectiligne)			Droite de contact (O, \vec{y}) + normale \vec{z} du plan tangent au contact
5	Liaison sphère-plan (liaison ponctuelle)			Point de contact O + normale \vec{z} du plan tangent au contact

Annexes



1. Repérages cylindrique et sphérique

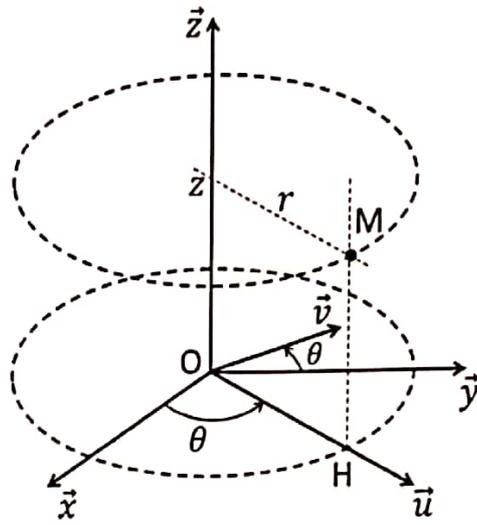
1.1. Position d'un point dans un repère cylindrique (particulièrement adapté aux problèmes invariants par rotation autour d'un axe)

Le repère cylindrique $R_c(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ se définit par rapport à un repère cartésien $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

- \vec{u} est un vecteur unitaire appartenant aux plans (\vec{x}, \vec{y}) et (\vec{OM}, \vec{z}) ;
- \vec{v} complète la base, soit $\vec{v} = \vec{z} \wedge \vec{u}$.

On définit deux paramètres :

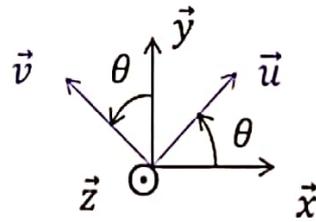
- la distance $r = \vec{OM} \cdot \vec{u} = \|\vec{OH}\|$, H étant la projection orthogonale du point M dans le plan (O, \vec{x}, \vec{y}) ;
- l'angle orienté $\theta = (\vec{x}, \vec{u})$ dans le plan de normale \vec{z} .



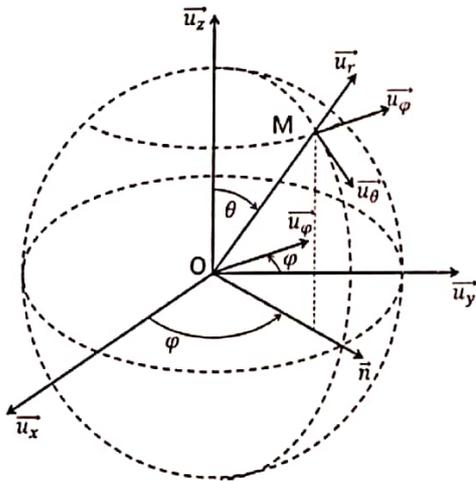
Les trois paramètres de position sont r , θ et z et le vecteur position s'écrit : $\vec{OM} = r \cdot \vec{u} + z \cdot \vec{z}$.

Par projection:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos(\theta) \\ y = r \cdot \sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$



1.2. Position d'un point dans un repère sphérique (particulièrement adapté aux problèmes invariants par rotation autour d'un point O)



Le repère sphérique $R_s(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ se définit par rapport à un repère cartésien $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

- \vec{u}_r est un vecteur unitaire colinéaire et de même sens que \vec{OM} ;
- \vec{u}_φ est un vecteur unitaire du plan (\vec{x}, \vec{y}) normal à \vec{u}_r ;
- \vec{u}_θ complète la base, soit : $\vec{u}_\theta = \vec{u}_\varphi \wedge \vec{u}_r$.

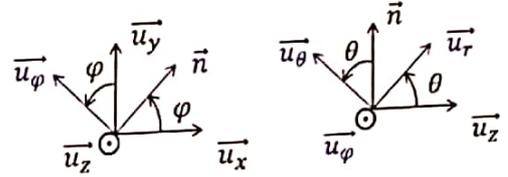
On utilise un vecteur \vec{n} équivalent au vecteur \vec{u} de la base cylindrique ci-dessus et on définit trois paramètres de position :

- la distance $R = \|\vec{OM}\|$;
- l'angle orienté $\varphi = (\vec{u}_x, \vec{n}) = (\vec{u}_y, \vec{u}_\varphi)$ dans le plan de normale \vec{u}_z ;
- l'angle orienté $\theta = (\vec{u}_z, \vec{u}_r) = (\vec{n}, \vec{u}_\theta)$ dans le plan de normale \vec{u}_φ .

Les trois paramètres de position sont R , θ et φ et le vecteur position s'écrit : $\vec{OM} = R.\vec{u}_r$.

Par projection :

$$\begin{cases} x = R.\sin(\theta).\cos(\varphi) \\ y = R.\sin(\theta).\sin(\varphi) \\ z = R.\cos(\theta) \end{cases}$$

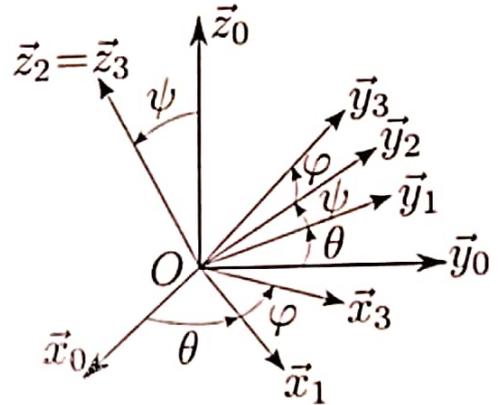


2. Orientation d'un solide par les angles d'Euler

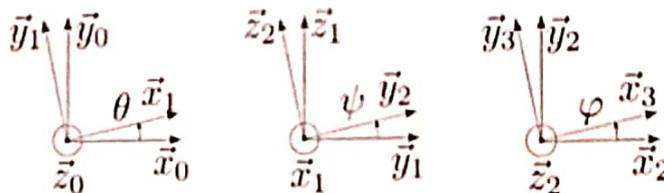
Attention : le paramétrage d'Euler ne définit pas la position d'un point mais l'orientation d'un solide.

Les trois angles d'Euler correspondent à la composition de trois rotations planes successives qui permettent de faire coïncider la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ avec la base $(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$:

- la première rotation d'angle θ , autour de l'axe \vec{z}_0 permet de passer à une première base intermédiaire $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1 = \vec{z}_0)$. L'angle θ est appelé « angle de précession » ;



- une seconde rotation d'angle ψ , est alors appliquée autour de l'axe \vec{x}_1 , de la première base intermédiaire, ce qui permet de définir une seconde base intermédiaire $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$. L'angle ψ est appelé « angle de nutation » ;
- la dernière rotation, d'angle φ est appliquée autour de l'axe \vec{z}_2 de la seconde base intermédiaire, ce qui permet de positionner la base $(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3 = \vec{z}_2)$. L'angle φ est appelé « angle de rotation propre ».



En Sciences de l'Ingénieur, l'étude des mécanismes nécessite plus rarement ce type de paramétrage car les mécanismes possèdent des liaisons qui guident généralement les rotations : il est alors naturel de s'appuyer sur ces liaisons pour paramétrer les rotations.