

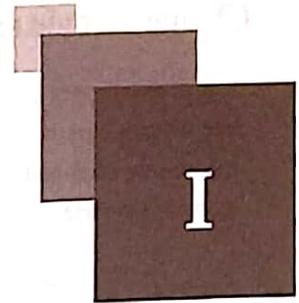
Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

**Cycle 6 - Détermination de lois
d'entrée(s)/sortie(s) d'un système complexe**

Table des matières

I - Analyse cinématique d'une chaîne de solide	3
1. Chaîne ouverte	3
2. Chaîne fermée simple	4
3. Chaîne fermée complexe	5
4. Association de liaisons en série et en parallèle	6
II - Loi d'E/S d'une chaîne fermée de solides	8
1. Loi d'E/S géométrique (position)	8
2. Loi d'E/S cinématique (vitesse)	9
3. Mobilité d'un mécanisme	9
III - Bases de la transmission de puissance	11
1. Principe de la transmission de puissance	11
2. Transmission de puissance par engrenage	12
3. Système vis-écrou	18
4. Système poulie-courroie	18
5. Système pignon-chaîne / poulie-courroie crantée	19
6. Détermination du rapport de transmission des trains d'engrenages	19

Analyse cinématique d'une chaîne de solide



Comme nous l'avons vu lors de l'introduction de ce cours, il existe plusieurs structures de mécanismes. La modélisation retenue pour le cours de cinématique des solides indéformables est la suivante :

- Les solides sont considérés comme indéformables ;
- Les liaisons reliant les solides sont considérées comme parfaites cinématiquement (sans jeu).

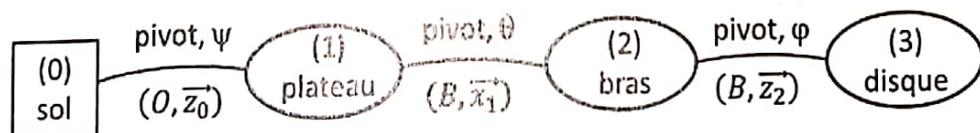
Les mécanismes étudiés sont donc modélisés par un ensemble de solides parfaitement rigides reliés par des liaisons. Nous obtenons donc une chaîne de solide. Les chaînes de solides sont classées en deux catégories : les chaînes ouvertes et les chaînes fermées. Parmi les mécanismes en chaîne fermée, il est encore possible de distinguer les chaînes simples et les chaînes complexes.

La structure du mécanisme est particulièrement bien mise en évidence lors du tracé de son graphe des liaisons.

1. Chaîne ouverte

Une chaîne ouverte est constituée d'une succession de solides et de liaison. Généralement, chacune des liaisons est motorisée et l'objectif de l'étude est de déterminer le mouvement du dernier solide par rapport au bâti en fonction des paramètres de mouvement des liaisons (des moteurs). C'est par exemple le cas du manège à sensation traité en introduction de ce cours.

Dans le cas d'une chaîne ouverte, les mouvements des liaisons restent indépendants. Le nombre de degré de liberté du système global est alors égal à la somme des degrés de liberté de chacune des liaisons.



graphe des liaisons du manège Spinfly

Pour une chaîne ouverte, il est tout à fait équivalent d'utiliser la dérivation du vecteur position ou la composition des mouvements pour déterminer la vitesse d'un point. Il vous est donc possible, à ce stade du cours de cinématique des solides indéformables de traiter ce genre de problèmes.

La partie qui suit sera donc consacrée particulièrement aux chaînes fermées simples ou complexes.

2. Chaîne fermée simple

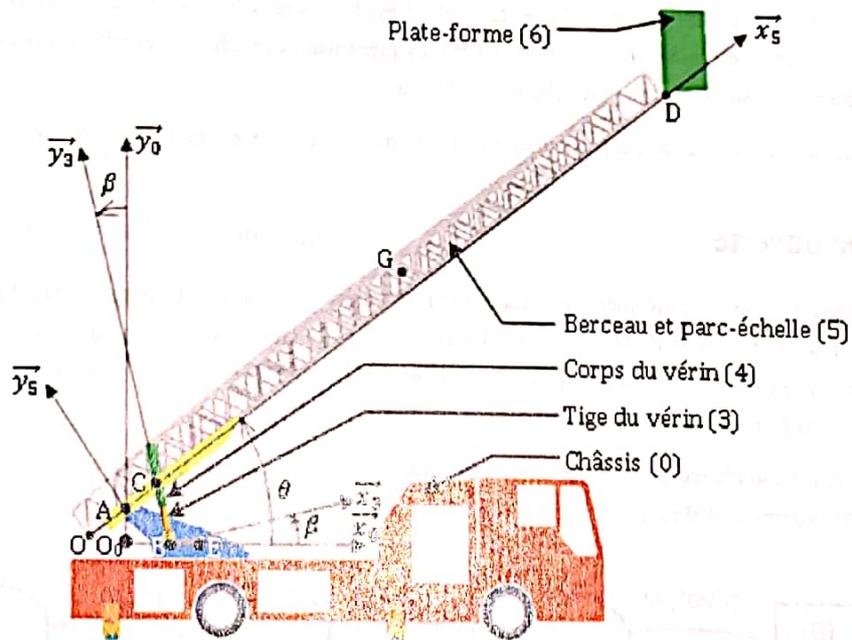
Une chaîne fermée est constituée d'un ensemble de solides reliés par de multiples liaisons. L'assemblage forme une ou plusieurs boucles. Le problème posé est généralement différent de celui d'une chaîne ouverte : le mécanisme étant motorisé au niveau de certaines liaisons (où le mouvement est alors connu), on recherche le mouvement d'une ou plusieurs autres liaisons : on parle de(s) "loi(s) entréc-sortie" du mécanisme.

Exemple : Échelle de pompier

L'analyse des surfaces de contact entre les principaux solides qui constituent le mécanisme pris deux à deux permet d'identifier les liaisons et de tracer le graphe des liaisons. Ce graphe permet de constater que le mécanisme est constitué d'une chaîne fermée à 1 cycle.

Classes d'équivalence cinématique :

- Châssis (0) ;
- Tige du vérin (3) ;
- Corps du vérin (4) ;
- Berceau et parc-échelle + plate-forme (5+6).



Dessin simplifié du mécanisme (vue de côté)

$\mathcal{L}_{0/3}$	$\mathcal{L}_{3/4}$	$\mathcal{L}_{4/5}$	$\mathcal{L}_{0/5}$	<p>graphe des liaisons du mécanisme</p>
Pivot				
D'axe (B, \vec{z}_0)				
D'angle β				

Ayant identifié les liaisons, il est ensuite possible de proposer le schéma cinématique du mécanisme, qui permet de prendre en compte sa structure spatiale.

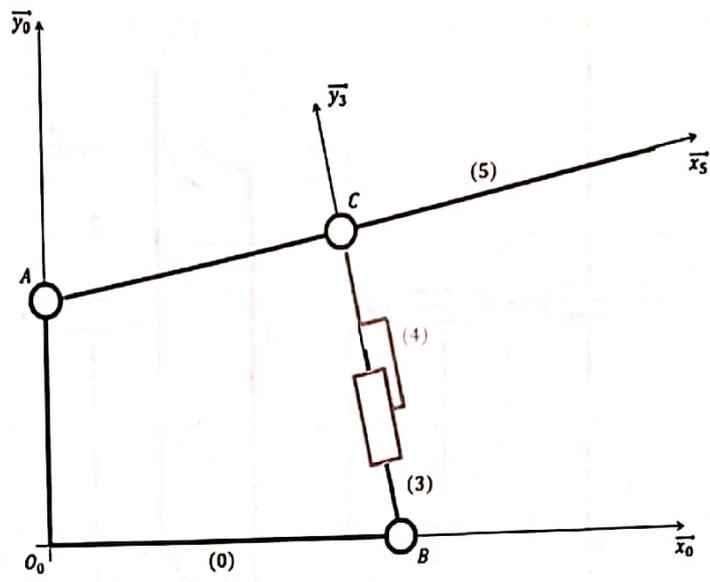
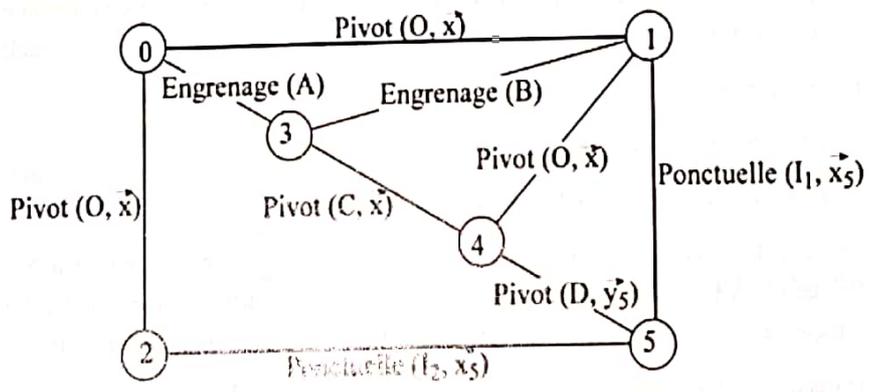


Schéma cinématique du mécanisme

3. Chaîne fermée complexe

Exemple : Variateur à galet

Le variateur, dont le schéma cinématique et le graphe des liaisons sont donnés ci-dessous, est constitué de deux sous-systèmes distincts : un réducteur épicycloïdal à engrenages de rapport fixe $(0+1+2+3+4)$ et un variateur continu à galet $\{0+1+2+4+5\}$.



Graphe des liaisons du variateur à galet

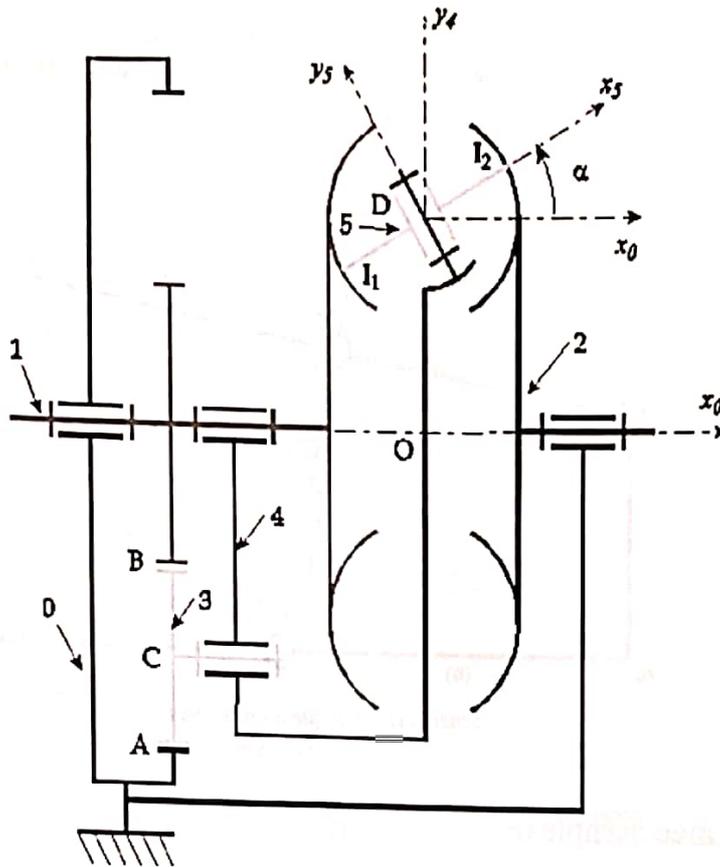


Schéma cinématique du variateur à galet

Particularité des chaînes fermées complexes

Dans le cas d'un mécanisme en chaîne fermée, on appelle cycle, un chemin fermé du graphe ne passant pas deux fois par le même sommet. Parmi les cycles qui peuvent être mis en évidence dans un graphe, un certain nombre sont indépendants. Leur nombre μ appelé aussi nombre cyclomatique peut être calculé par la relation :

$$\mu = n_L - n_P + 1, \text{ avec :}$$

- n_P le nombre de solides (bâti compris) constituant ce mécanisme ;
- n_L nombre de liaisons reliant ces solides.

La mise en évidence des cycles indépendants est particulièrement intéressante pour étudier le comportement géométrique et cinématique d'un mécanisme. Dans le cas d'un mécanisme en chaîne fermée, le nombre cyclomatique permet traduire le nombre de relations de fermetures cinématiques à respecter.

Dans le cas du variateur présenté ci-dessus, on dénombre 6 solides (bâti compris) et 9 liaisons, soit un nombre cyclomatique μ égal à 4. Ceci correspond à quatre cycles indépendants sur le graphe de structure.

4. Association de liaisons en série et en parallèle

L'étude d'un mécanisme peut mettre en évidence une association de plusieurs liaisons :

- Soit selon une chaîne continue ouverte entre plusieurs solides, tous les solides étant reliés deux à deux par une seule liaison. Il s'agit alors d'une association de liaisons en série ;

- Soit entre deux solides par l'intermédiaire de plusieurs liaisons. Il s'agit alors d'une association de liaisons en parallèle.

On peut alors définir une liaison cinématiquement équivalente à l'ensemble des liaisons associées. Une liaison entre les deux solides S_j et S_k est cinématiquement équivalente à l'ensemble des liaisons situées entre ces deux solides si elle autorise les mêmes mouvements relatifs entre eux.

Liaisons en parallèle	Liaisons en série
<p>Le torseur cinématique de la liaison cinématiquement équivalente doit être compatible avec les torseurs des deux liaisons (a) et (b) :</p> $\{V(2/1)\} = \{V(2(a)/1)\} = \{V(2(b)/1)\}$	<p>Le torseur cinématique de la liaison cinématiquement équivalente doit être égal à la somme des torseurs des deux liaisons (composition des mouvements) :</p> $\{V(2/1)\} = \{V(2/1')\} + \{V(1'/1)\}$

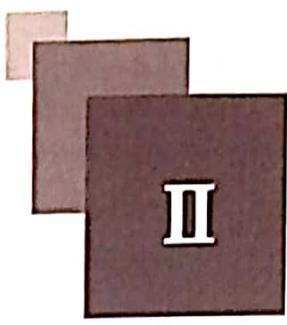
Remarque

Attention, il est indispensable de préciser le terme " cinématiquement équivalente " car nous verrons qu'une liaison autorisant les mêmes mouvements relatifs entre deux solides qu'un ensemble de liaisons ne permet pas forcément de transmettre les mêmes efforts. Dans ce cas-là, la liaison est bien cinématiquement équivalente mais pas statiquement équivalente.

Le tableau ci-dessous donne quelques exemples courants d'association de liaisons en parallèle et la liaison cinématiquement équivalente qui leurs sont associées.

Association de liaisons élémentaires	Liaison composée équivalente
Deux « sphère-plan »	Liaison linéaire rectiligne
Deux « sphère-cylindre »	Liaison pivot glissant
Une « rotule » et une « sphère-cylindre » coaxiales	Liaison pivot

Loi d'E/S d'une chaîne fermée de solides


 II

Dans le cadre de ce cours, nous nous intéresserons à l'analyse géométrique et cinématique des chaînes fermées. Cette étude permet d'identifier la mobilité du mécanisme ainsi que la relation cinématique d'entrée sortie. Un autre point de vue d'étude est l'analyse statique, qui permet d'identifier le degré d'hyperstaticité du mécanisme ainsi que les conditions géométriques de positionnement des différentes liaisons qui assurent son montage correct. Ce point fait partie de la suite du programme de SII en CPGE et sera vu l'an prochain.

1. Loi d'E/S géométrique (position)

Objectifs

L'analyse géométrique permet :

- D'établir les relations liant les paramètres géométriques inconnus du mécanisme et les paramètres géométriques donnés ;
- De déterminer la relation cinématique d'entrée-sortie.

✂ Méthode : Fermeture géométrique et résolution

La fermeture géométrique traduit, grâce à la relation de Chasles, la position relative des liaisons dans le mécanisme.

Si on appelle A_i le centre géométrique de la liaison $\mathcal{L}_{i/i-1}$ avec $i \in [1 ; n_L]$, la fermeture géométrique s'écrit, par exemple :

$$\overrightarrow{A_1 A_{n_L}} = \sum_{i=1}^{n_L-1} \overrightarrow{A_i A_{i+1}}$$

En projetant l'équation vectorielle écrite ci-dessus sur les axes d'un repère $R_0(A_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ par exemple, on obtient un système (E) de 3 équations scalaires à N paramètres géométriques inconnus.

La résolution de ce système permet d'écrire la loi entrée/sortie du mécanisme étudié. La relation ainsi obtenue porte sur les paramètres géométriques. Il est ensuite possible d'en déduire par dérivation une relation entrée/sortie portant sur les paramètres cinématiques.

2. Loi d'E/S cinématique (vitesse)

Objectifs

L'analyse cinématique des mécanismes permet principalement de déterminer la relation cinématique d'entrée sortie du mécanisme étudié. C'est-à-dire de :

- Établir les relations liant les paramètres cinématiques inconnus du mécanisme et les paramètres cinématiques donnés ;
- Déterminer la mobilité du mécanisme.

Deux situations se présentent couramment :

- Soit l'analyse est effectuée en vue de concevoir un mécanisme et le concepteur détermine alors les conditions cinématiques correctes de fonctionnement ;
- Soit l'analyse est effectuée en vue de vérifier les performances d'un mécanisme déjà existant et le concepteur détermine alors les relations cinématiques d'entrée sortie.

✂ Méthode : Fermeture cinématique et résolution

Soit $\{\mathcal{V}(S_k/S_i)\}_A$ le torseur cinématique, au point A, du solide S_k dans son mouvement par rapport au solide S_i .

La fermeture cinématique s'écrit alors: $\{\mathcal{V}(S_{np}/S_0)\}_A \equiv \sum_{i=1}^{np} \{\mathcal{V}(S_i/S_{i-1})\}_A$, soit :

$$\vec{\Omega}(S_{np}/S_0) = \sum_{i=1}^{np} \vec{\Omega}(S_i/S_{i-1})$$

$$\vec{V}(A, S_{np}/S_0) = \sum_{i=1}^{np} \vec{V}(A, S_i/S_{i-1})$$

En projetant le système d'équations vectorielles écrit ci-dessus sur les axes d'un repère $R_0(A_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ par exemple, on obtient un système de 6 équations scalaires pour chaque chaîne fermée. Le système total (E) contient donc $6 \cdot \mu$ équations à N_c paramètres cinématiques inconnus, avec :

$$N_c = \sum_{i=1}^{nL} n_{ci} \text{ où } n_{ci} \text{ désigne le nombre de paramètres cinématiques indépendants de chaque liaison } \mathcal{L}_{ij}.$$

On note r_c le rang cinématique du système. Il s'agit du nombre d'équations indépendantes du système (E). On a bien sûr $r_c \leq 6 \cdot \mu$.

3. Mobilité d'un mécanisme

🔑 Définition

On appelle mobilité d'un mécanisme, notée m , le nombre de paramètres cinématiques à fixer pour déterminer les r_c inconnues cinématiques restantes. On peut écrire: $m = N_c - r_c$.

Signification de m

Les mécanismes étudiés peuvent être classés en 3 catégories en fonction de leur mobilité.

Mobilité m	Conclusions
$m = 0$	le mécanisme est bloqué
$m = 1$	le mécanisme est à transformation de mouvement (mobilité utile)
$m > 1$	le mécanisme est à composition de mouvement et/ou à mobilités internes.

Pour un mécanisme de mobilité supérieure à un, on distingue la mobilité utile de la mobilité interne :

- On appelle mobilité utile, notée m_u , le nombre d'inconnues cinématiques indépendantes à fixer pour déterminer les relations entrées/sorties du mécanisme ;
- On appelle mobilité interne, notée m_i , le nombre d'inconnues cinématiques indépendantes du mécanisme quand on immobilise les relations d'entrée/sortie du mécanisme.

Exemple

- Échelle de pompier : si on bloque un paramètre (par exemple la translation du vérin), plus aucun mouvement n'est possible dans le système. Ce mécanisme présente une mobilité égale à 1 ;
- Variateur à galet : le fait de bloquer un paramètre, par exemple la rotation de l'arbre d'entrée (1) ne bloqu l'ensemble du mécanisme que si l'on considère les relations de roulement sans glissement. La mobilité de ce mécanisme dépend des conditions de fonctionnement prises en compte.

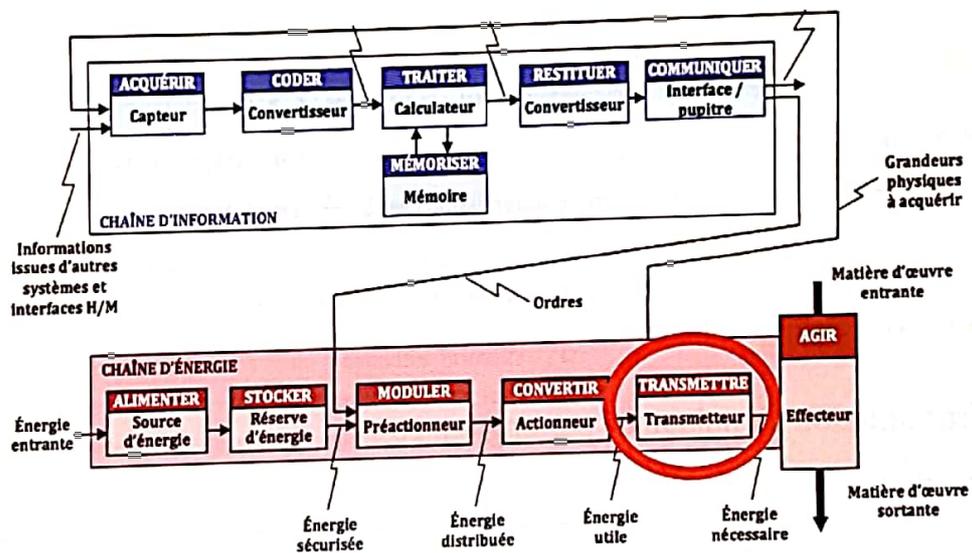
Bases de la transmission de puissance

III

1. Principe de la transmission de puissance

🔗 Définition

Les systèmes étudiés dans ce chapitre réalisent la fonction " TRANSMETTRE " de la chaîne d'énergie. Ils reçoivent une énergie mécanique et fournissent une énergie mécanique.



Dans certains cas, il peut y avoir un changement de type de mouvement (rotation à translation) ou le mouvement peut être le même (rotation en rotation).

Caractérisation des paramètres d'entrée et de sortie

Ces mécanismes peuvent être étudiés de différents points de vue : géométrique, cinématique ou énergétique. Le point de vue énergétique sera vu en seconde année, les points de vue géométrique et cinématique vont être étudiés dans le présent cours. Pour chaque point de vue, les paramètres d'entrée et de sortie du système sont différents.

Paramètres " géométriques " :

- Déplacement linéaire X (exprimé en mètre (m)) ;
- Angle de rotation θ (exprimé en radian (rad)).

Paramètres " cinématiques " :

Transmission de puissance par engrenage

- Vitesse linéaire V (exprimé en mètre par seconde (m/s)) ;
- Vitesse de rotation ω (exprimé en radian par seconde (rad/s)).

Paramètres " énergétiques " :

- Force F (exprimée en newton (N)) et vitesse linéaire V (m/s) ;
- Couple C (exprimé en newton mètre (N.m)) et vitesse de rotation ω (rad/s).

Rapport de transmission

Le rapport de transmission r d'un transmetteur de puissance est défini par le rapport des paramètres de sortie et d'entrée :

- Du point de vue géométrique : $r = \frac{\theta_s}{\theta_e}$;
- Du point de vue cinématique : $r = \frac{\omega_s}{\omega_e}$.

Observations :

- Si l'engrenage est réducteur de vitesse, $\omega_s < \omega_e$, alors : $r < 1$;
- Si l'engrenage est multiplicateur de vitesse, $\omega_s > \omega_e$, alors : $r > 1$.

Remarque : cette définition du rapport de transmission tient compte de l'usage habituel, mais on peut aussi rencontrer dans certains cas un rapport de transmission égal à $\frac{\omega_e}{\omega_s}$. De plus, par abus de langage, le terme " rapport de réduction " est souvent utilisé à la place de celui de rapport de transmission, que le transmetteur soit multiplicateur ou réducteur. Il faut donc être très attentif au sens physique des relations que vous pouvez être amené à écrire à la lecture d'un énoncé.

2. Transmission de puissance par engrenage

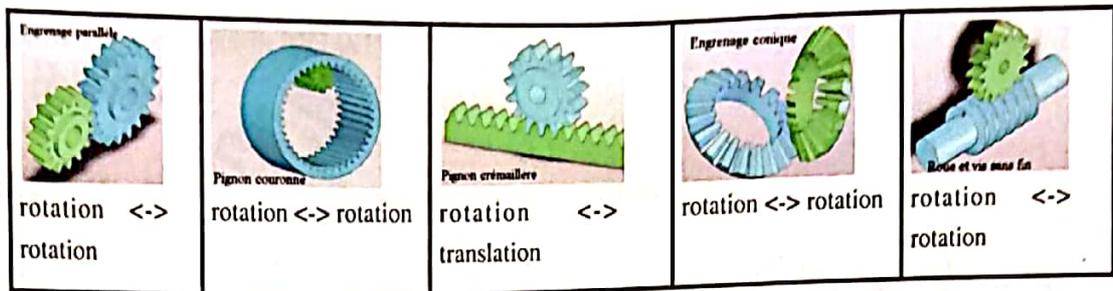
Définition

Un ENGRENAGE est un mécanisme constitué de deux roues dentées, chacune étant en rotation autour d'un axe, les deux axes restant fixes l'un par rapport à l'autre, de sorte qu'une des roues entraîne l'autre, par action de dents successivement en contact. La plus petite des roues est appelée PIGNON. La plus grande est appelée ROUE. Par extension, on parle aussi d'engrenage pour un système pignon-crémaillère bien que le deuxième solide en contact ne soit pas une roue (cf. ci-dessous).

Quelques types d'engrenages

La position relative des axes permet de classifier les types d'engrenages : engrenages à axes parallèles / concourants / engrenages gauches (pour lesquels les axes ne sont pas dans le même plan).

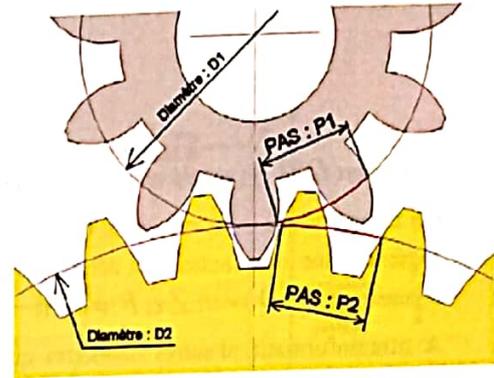
Axes parallèles		Engrenage Pignon-crémaillère	Axes concourants	Axes non coplanaires
Denture extérieure	Denture intérieure		Engrenages coniques	Roue et vis sans fin



Condition d'engrènement

Pour assurer l'engrènement on doit faire en sorte que les dents d'une roue s'intercalent bien entre les dents de l'autre roue ; pour cela, il faut introduire la notion de " PAS " de la denture.

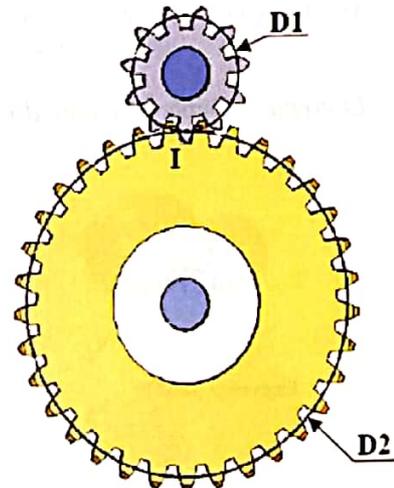
Le " PAS " doit être identique sur chacune des deux roues : $P_1 = P_2$.



Diamètre primitif et Module

On appelle " cercles primitifs ", ou " cylindres primitifs ", le contour de roues cylindriques qui remplaceraient les roues dentées, en transmettant le mouvement sans glissement, de la même façon que l'engrenage; on appelle " diamètres primitifs " les diamètres de ces roues cylindriques fictives.

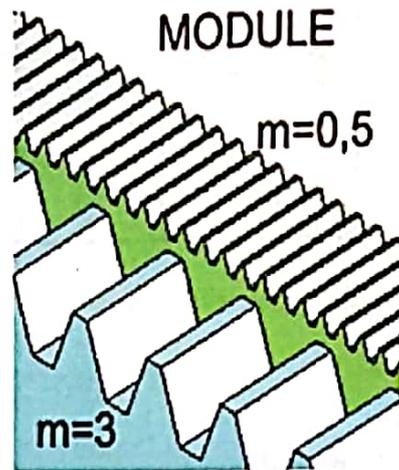
- Soit D_1 le diamètre primitif de la roue 1 ;
- Soit D_2 le diamètre primitif de la roue 2 ;
- Soit Z_1 le nombre de dents de la roue 1 ;
- Soit Z_2 le nombre de dents de la roue 2.



Le pas s'exprime en fonction de la circonférence et du nombre de dent sur chaque roue :

$$P_1 = \frac{\pi \cdot D_1}{Z_1} \text{ et } P_2 = \frac{\pi \cdot D_2}{Z_2}$$

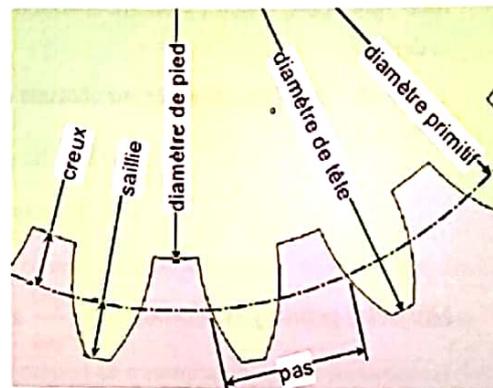
Et lorsqu'on exprime la relation $P_1 = P_2$, on obtient: $\frac{D_1}{Z_1} = \frac{D_2}{Z_2}$.



Ce rapport D/Z est appelé module de la denture.

On retiendra que pour que deux roues dentées puissent engrener l'une avec l'autre il est nécessaire qu'elles aient le même module : $D = m \cdot Z$ et $P = \pi \cdot m$.

A titre informatif, d'autres diamètres que le diamètre primitif sont définis sur une roue dentée, comme par exemple le " diamètre de pied " (diamètre au fond des dents) ou le " diamètre de tête " (diamètre en haut des dents). Les relations entre ces différents diamètres sont normalisées, mais le programme de CPGE ne porte pas sur l'étude détaillée de la géométrie des engrenages.



Engrenage simple à denture droite extérieure

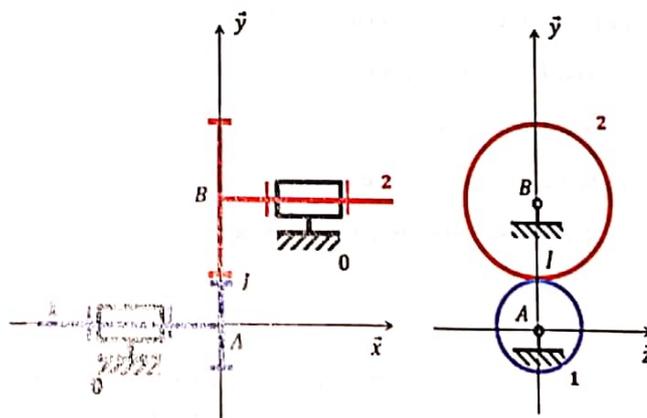
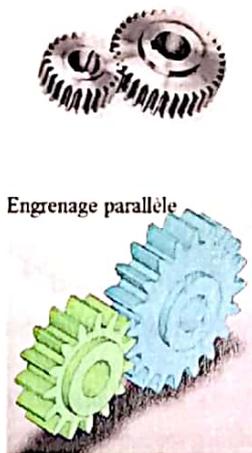


Photo et maquette numérique (à gauche), schéma cinématique (à droite)

Expression des torseurs cinématiques $\{V(1/0)\}$ et $\{V(2/0)\}$:

-
-

Ecriture de la condition de RSG en I :

- VC

Conséquence :

- VC

Engrenage simple à denture droite intérieure

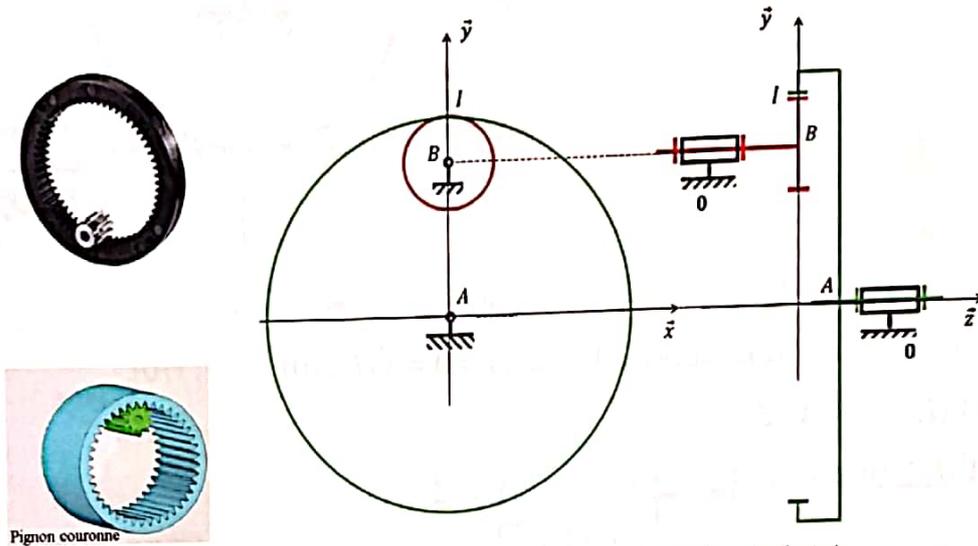


Photo et maquette numérique (à gauche), schéma cinématique (à droite)

Selon le même raisonnement : $\vec{V}(I, 2/1) = \vec{0} = \vec{V}(I, 2/0) - \vec{V}(I, 1/0)$.

Or : $\vec{V}(I, 2/0) = \vec{V}(B, 2/0) + \vec{IB} \wedge \vec{\Omega}(2/0) = R_2 \cdot \omega_2 \cdot \vec{z}$

et $\vec{V}(I, 1/0) = \vec{IA} \wedge \vec{\Omega}(1/0) = R_1 \cdot \omega_1 \cdot \vec{z}$.

D'où la relation $R_2 \cdot \omega_2 \cdot \vec{z} = R_1 \cdot \omega_1 \cdot \vec{z}$ et on en déduit le rapport de transmission :

$$r = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{Z_1}{Z_2} \quad \checkmark$$

Engrenage pignon - crémaillère

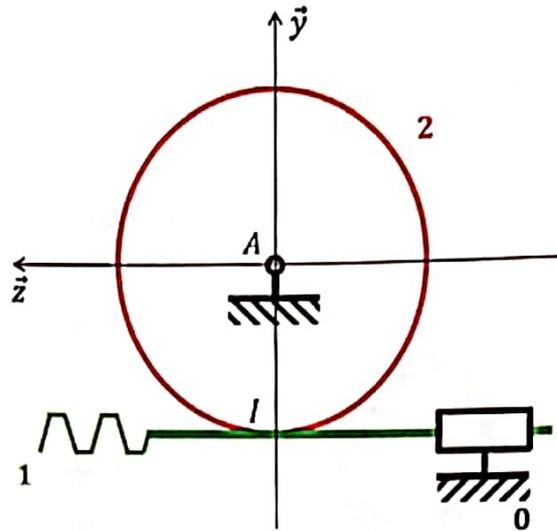
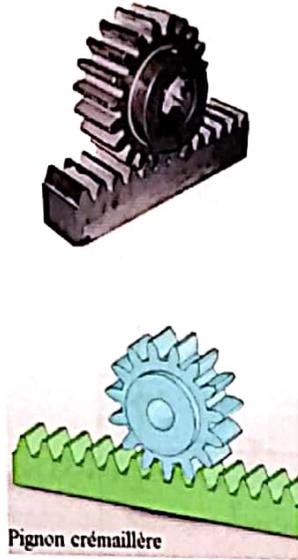


Photo et maquette numérique (à gauche), schéma cinématique (à droite)

Toujours selon le même raisonnement : $\vec{V}(I, 2/1) = \vec{0} = \vec{V}(I, 2/0) - \vec{V}(I, 1/0)$.

Or $\vec{V}(I, 1/0) = V_1 \cdot \vec{z}$

et $\vec{V}(I, 2/0) = -R_2 \cdot \omega_2 \cdot \vec{z}$.

D'où le rapport de transmission : $r = \frac{\omega_2}{V_1} = -\frac{1}{R_2}$.

Remarque : le signe du rapport de réduction dépend du paramétrage du problème (orientation des axes).

Engrenages coniques

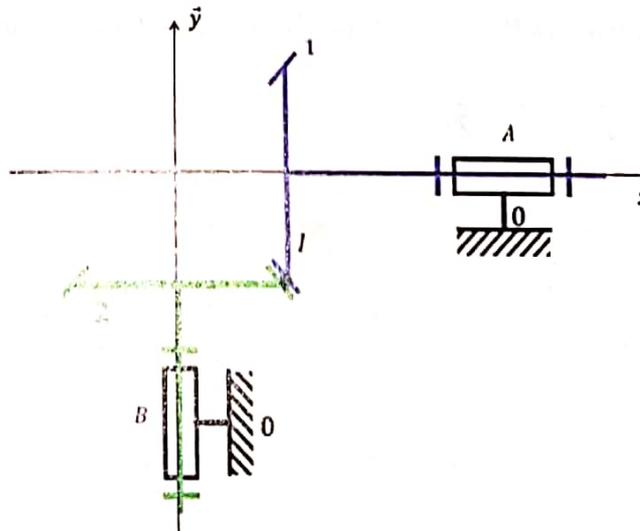
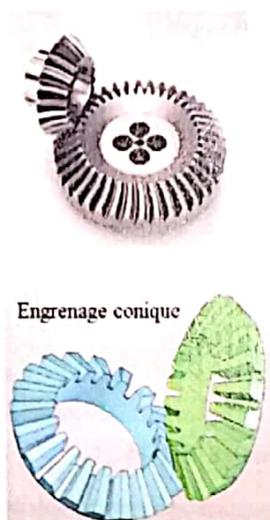


Photo et maquette numérique (à gauche), schéma cinématique (à droite)

$$\begin{aligned} \vec{V}(I, 2/0) &= \vec{V}(B, 2/0) + \vec{IB} \wedge \vec{\pi}(2/0) \\ &= R_2 \vec{x} \wedge \omega_2 \vec{y} \\ &= -R_2 \omega_2 \vec{z} \end{aligned}$$

$$\vec{V}(I, 1/0) = R_1 \omega_1 \vec{z}$$

Hypothèse : les axes des deux roues sont concourants et perpendiculaires. On pose $\vec{BI} = d.\vec{y} + R_2./vec{x}$ et $\vec{AI} = -l.\vec{x} - R_1./vec{y}$.

Sous cette hypothèse, on exprime le RSG en I : $\vec{V}(I, 2/1) = \vec{0} = \vec{V}(I, 2/0) - \vec{V}(I, 1/0)$.

Or : $\vec{V}(I, 2/0) = \vec{IB} \wedge \vec{\Omega}(2/0) = (-d.\vec{y} - R_2.\vec{x}) \wedge \omega_2\vec{y} = -R_2.\omega_2.\vec{z}$

et $\vec{V}(I, 1/0) = -R_1.\omega_1.\vec{z}$.

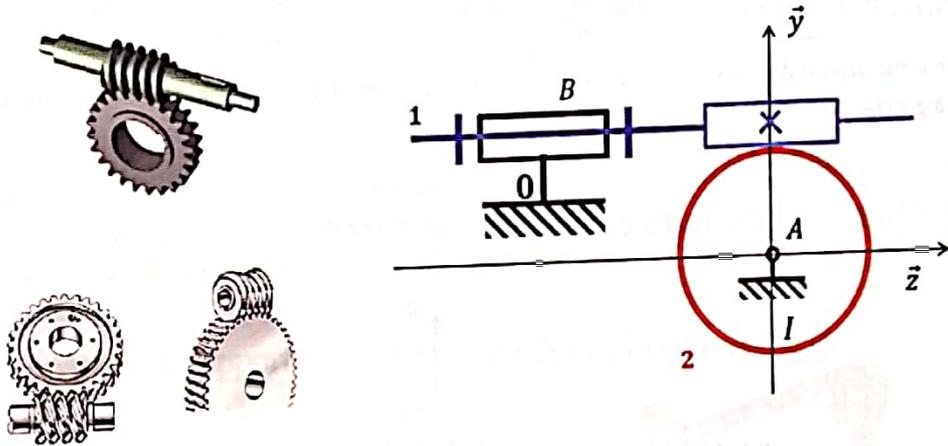
D'où la relation $-R_2.\omega_2.\vec{z} + R_1.\omega_1.\vec{z} = \vec{0}$, qui nous permet d'exprimer le rapport de transmission :

$$r = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{Z_1}{Z_2}$$

Remarque : de nouveau, le signe du rapport de réduction dépend du paramétrage du problème.

Système roue et vis sans fin

La transmission est réalisée à l'aide d'une vis à un ou plusieurs filets engrenant avec une roue. Usuellement, la vis entraîne la roue.

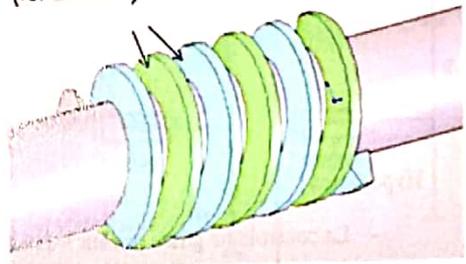


Maquette numérique (à gauche), schéma cinématique (à droite)

$$r = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\omega_{roue}}{\omega_{vis}} = \frac{Z_{vis}(\text{nbr de filets})}{Z_{roue}}$$

Remarque : en fonction du choix des matériaux (coefficient de frottement) et de la géométrie de la vis (hélice), le système pourra être réversible ou non. Le système est dit "réversible" si la roue peut entraîner la vis. Sinon, il est dit "irréversible".

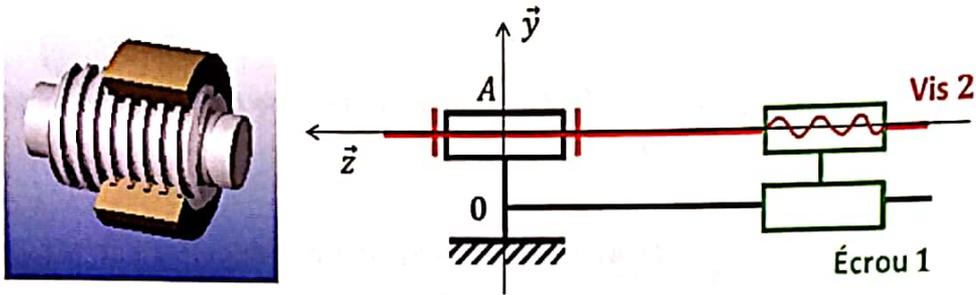
La vis est définie par son nombre de filets : 1 filet = 1 enroulement (ici 2 filets)



$\theta = 1,2\pi$
pour
 $\lambda = \frac{G \text{ pas}}{2\pi}$

3. Système vis-écrou

Ce transmetteur transforme la rotation d'une vis à un ou plusieurs filets en une translation d'un écrou. L'écrou doit être bloqué en rotation (liaison glissière) pour que la translation ait lieu.



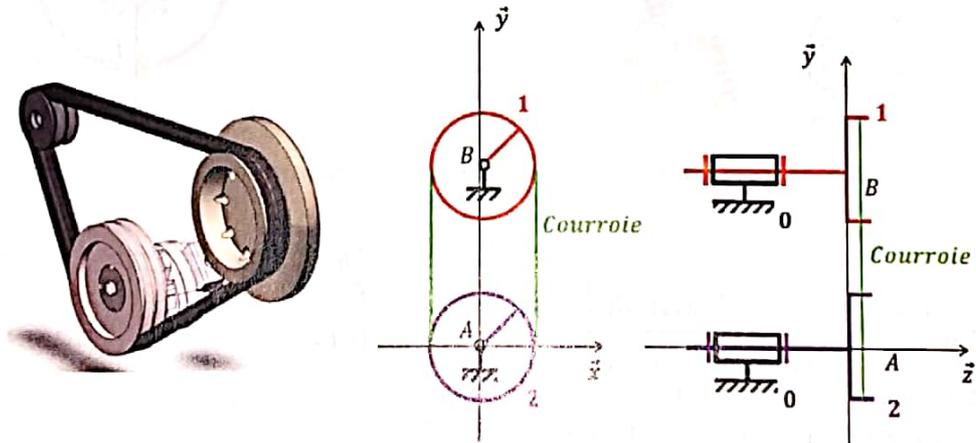
Maquette numérique (à gauche), schéma cinématique (à droite)

La vis est définie par son pas (en général exprimé en mm/tour). La vitesse linéaire de l'écrou s'exprime en fonction de la vitesse angulaire de la vis :

$$V_{\text{écrou}} = \pm \frac{\text{Pas}}{2\pi} \cdot \omega_{\text{vis}}$$

Le signe dépend de la vis : positif pour un pas de vis " à droite " (cas le plus courant), négatif pour un pas de vis " à gauche " (rare).

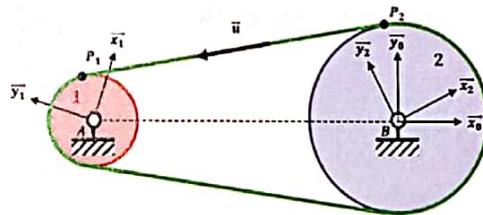
4. Système poulie-courroie



Maquette numérique (à gauche), schéma cinématique (à droite)

Hypothèses :

- La courroie ne glisse pas sur les poulies ;
- La courroie est inextensible ;
- Poulie motrice 1 de rayon R_1 ;
- Poulie motrice 2 de rayon R_2 .



Selon l'hypothèse que la courroie ne se déforme pas, on a :

$$\|\vec{V}(P_1, \text{courroie}/0)\| = \|\vec{V}(P_2, \text{courroie}/0)\|$$

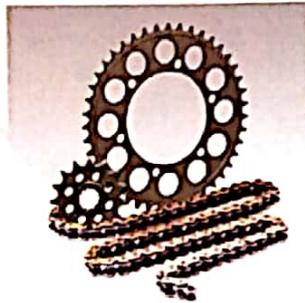
Selon l'hypothèse que la courroie ne glisse pas sur les poulies, on a :

$$\vec{V}(P_1, \text{courroie}/0) = \vec{V}(P_1, 1/0) \text{ et } \vec{V}(P_2, \text{courroie}/0) = \vec{V}(P_2, 2/0),$$

$$\text{avec } \|\vec{V}(P_1, 1/0)\| = R_1 \cdot \omega_1 \text{ et } \|\vec{V}(P_2, 2/0)\| = R_2 \cdot \omega_2.$$

$$\text{D'où la relation } R_1 \cdot \omega_1 = R_2 \cdot \omega_2 \text{ et le rapport de réduction : } r = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_2}.$$

5. Système pignon-chaîne / poulie-courroie crantée



Pignon-chaîne (à gauche), Poulie-courroie crantée (à droite)

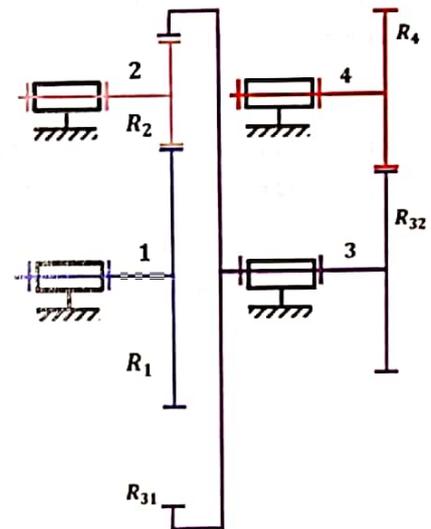
La présence des dents sur le pignon ou des crans sur la poulie garantit le non glissement entre les éléments. Les hypothèses et le raisonnement sont les mêmes que dans le cas du système poulie courroie étudié précédemment. Le rapport de réduction est identique.

6. Détermination du rapport de transmission des trains d'engrenages

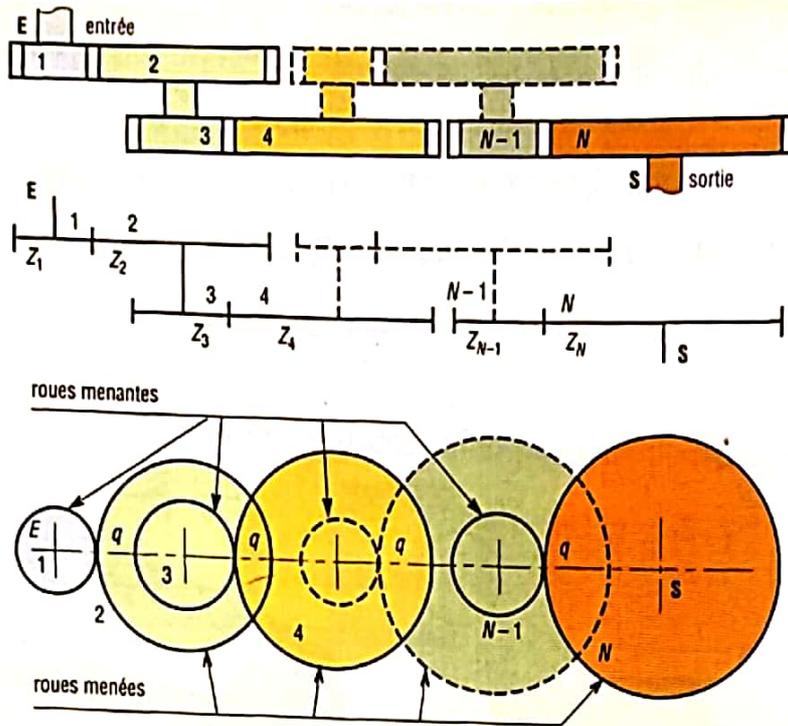
Trains d'engrenages à axes fixes

En utilisant les résultats démontrés précédemment pour un engrenage à denture droite extérieure, on retrouve rapidement le rapport de transmission de ce train d'engrenages :

-
-
-
-
-
...



Ce résultat peut être généralisé à un train comportant n engrenages en série :



$$r = \frac{\omega_N}{\omega_1} = (-1)^n \cdot \frac{Z_1 \cdot Z_3 \dots Z_{N-1}}{Z_2 \cdot Z_4 \dots Z_N}, \text{ où } n \text{ est le nombre de contacts extérieurs.}$$

$$r = \frac{\omega_N}{\omega_1} = (-1)^n \cdot \frac{\text{produit du nombre de dents des roues menantes}}{\text{produit du nombre de dents des roues menées}}$$

Attention : ce résultat n'est valable que dans le cas où tous les pignons et roues sont en rotation autour d'un axe fixe par rapport au référentiel du mouvement.

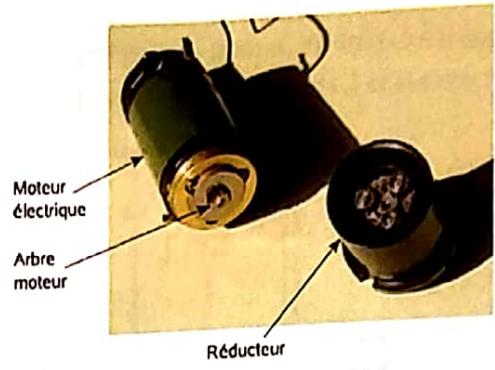
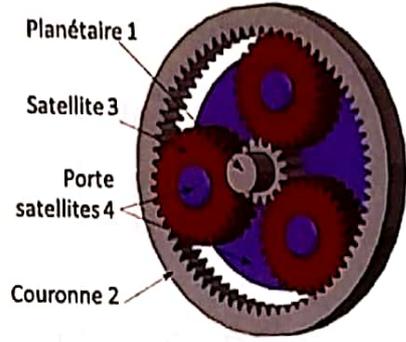
Trains épicycloïdaux

Les trains épicycloïdaux sont des trains d'engrenages particuliers : l'axe de rotation de certains pignons est mobile. On trouve ce type d'engrenage dans bon nombre de réducteur à forte réduction et faible encombrement (par exemple sur la plate-forme Stewart du labo de SII). Les boîtes de vitesses automatiques disposent elles aussi de trains épicycloïdaux.

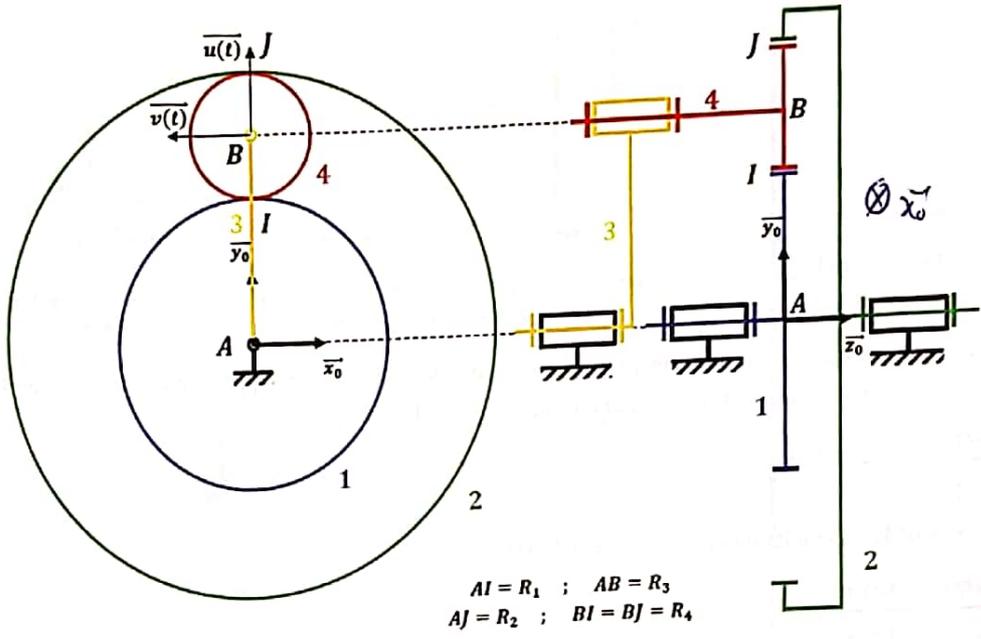
Cas d'école :

On étudie le train épicycloïdal de la ci-dessous. On appelle 1 le planétaire, 2 la couronne (parfois aussi appelée planétaire extérieur), 3 le porte-satellite et 4 le satellite.

Sur le schéma cinématique, on retrouve les 4 solides mobiles. Un seul satellite parmi les 3 est représenté car ils sont redondants d'un point de vue cinématique (il y en a trois pour répartir les efforts).



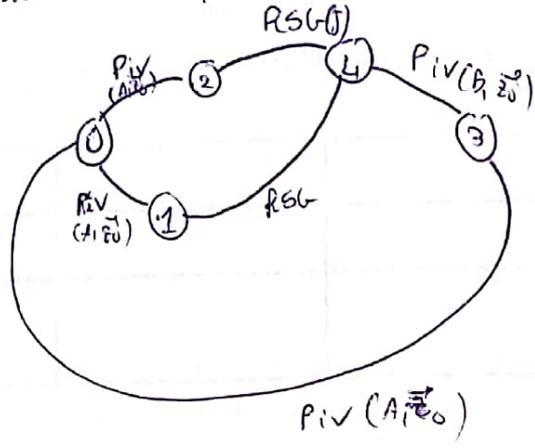
À droite, train épicycloïdal du réducteur du vérin de la plate-forme Stewart



Nombre de mobilités du mécanisme : 2

On remarque qu'en plaçant le repère de l'observateur accroché au porte-satellite (3), le train est réduit à un train simple (à axes fixes).

6 paramètres cinématiques



$\mu = 2$

$$\vec{v}(B, 4/2) + \vec{v}(B, 4/0) + \vec{v}(B, 0/2) + \vec{v}(B, 2/4) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{BI} \wedge \vec{\Omega}(4/1) + \vec{v}(A, 1/0) + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}(4/0) + \vec{v}(A, 0/2) + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}(0/2) = \vec{v}(B, 4/2) \vec{0}$$

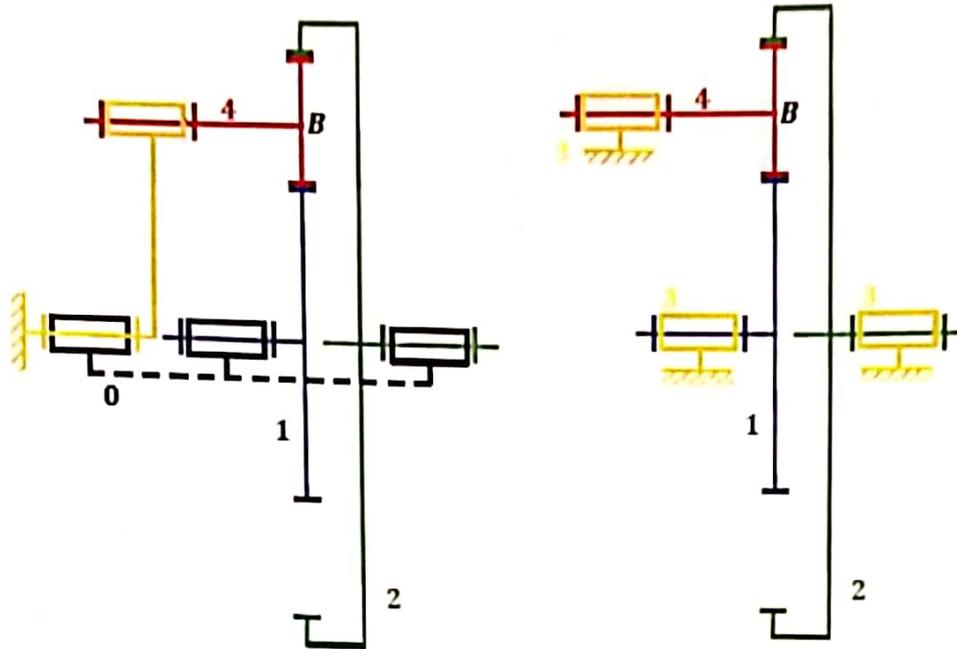


Schéma cinématique en choisissant le bâti (0) comme référentiel (à gauche), et le porte-satellite (3) comme référentiel (à droite)

Les relations établies précédemment permettent alors de déterminer le rapport de transmission en fonction du nombre de dents, lorsque l'observateur est "accroché" à 4 :

$$\frac{\omega_{2/3}}{\omega_{1/3}} = \frac{z_1}{z_2}$$

On en déduit une relation appelée relation de Willis :

$$\frac{\omega_{2/0} - \omega_{3/0}}{\omega_{1/0} - \omega_{3/0}} = \lambda = -\frac{R_1}{R_2}$$

La constante λ est appelée raison du train.

Nous obtenons donc une relation (la relation de Willis) entre trois paramètres cinématiques (la mobilité du système est bien égale à deux). Parmi ces trois paramètres, il est nécessaire d'en fixer un pour déterminer la loi entrée/sortie (ou le rapport de transmission) du train épicycloïdal, qui relie les deux autres paramètres (vitesse de rotation de l'arbre d'entrée et vitesse de rotation de l'arbre de sortie).

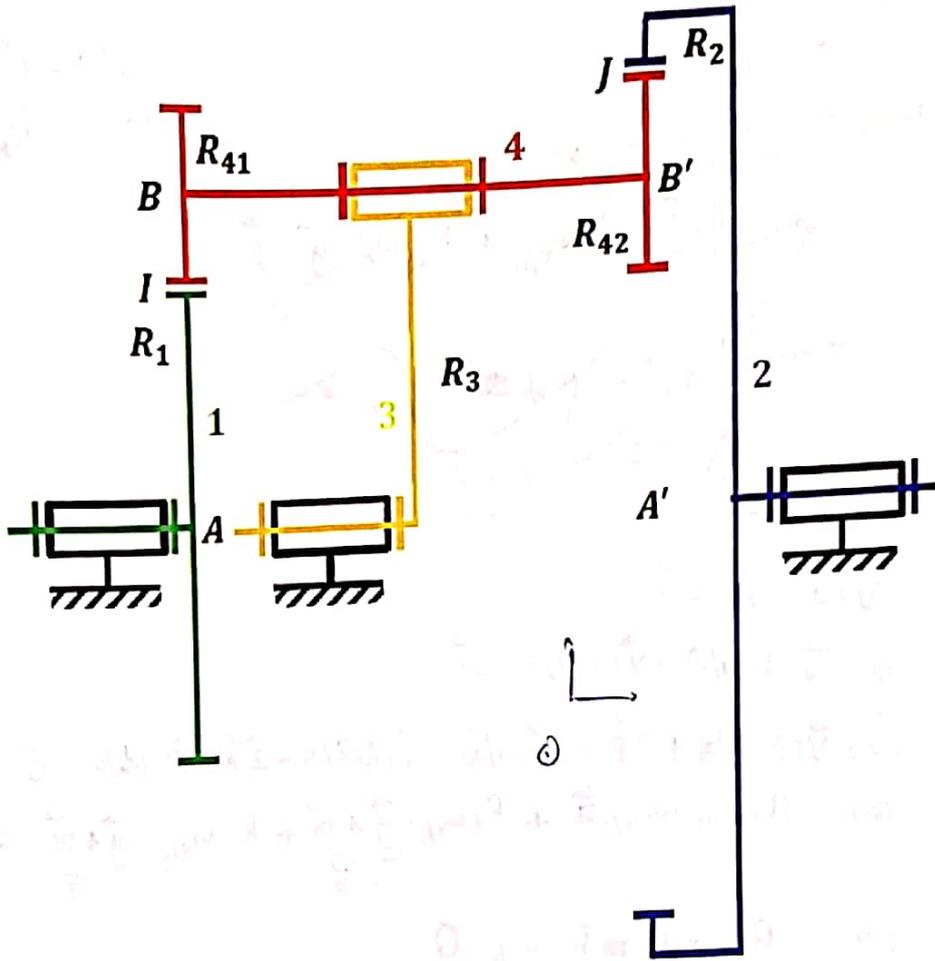
Un même train épicycloïdal peut donc être utilisé dans différentes configurations, avec différents rapports de transmission (quelques exemples ci-dessous) :

	Cas 1	Cas 2	Cas 3
Solide fixe par rapport à 0			
Loi entrée/sortie - rapport de transmission			

Ces résultats ne sont bien évidemment pas à connaître par cœur : il faut savoir les retrouver !

Deuxième exemple de train épicycloïdal :

De la même façon, écrire la formule de Willis pour le train épicycloïdal ci-dessous. En déduire son rapport de transmission lorsque le planétaire 2 est supposé fixe par rapport à 0 (l'entrée est l'arbre 1 et la sortie le porte-satellite 3).



Solution: $r = \frac{\omega_{3/0}}{\omega_{1/0}} = \frac{R_1 \cdot R_{42}}{R_1 \cdot R_{42} + R_2 \cdot R_{41}}$

$\rightarrow \frac{\omega_{3/0}}{\omega_{1/0}} = \frac{R_1 R_{42}}{R_2 R_{41} + R_1 R_{42}}$

$\frac{\omega_{4/3}}{\omega_{1/3}} = -\frac{R_1}{R_{42}}$

$\frac{\omega_{2/3}}{\omega_{2/3}} = \frac{R_2}{R_{42}}$

$\rightarrow \frac{\omega_{2/0}}{\omega_{2/3}} = \frac{R_2}{R_{42}}$

$\rightarrow \frac{\omega_{2/0}}{\omega_{2/3}} = \frac{R_2 - R_{42}}{R_{42}}$

$\Rightarrow \frac{\omega_{4/0} + \omega_{2/3}}{\omega_{1/0} + \omega_{2/3}} = -\frac{R_1}{R_{42}}$

$\Rightarrow \omega_{4/0} + \omega_{2/3} = -\frac{R_1}{R_{42}} (\omega_{1/0} + \omega_{2/3})$

$\Rightarrow \omega_{2/3} + \left(\frac{R_{42} + R_1}{R_1}\right) \omega_{2/3} = -\frac{R_1}{R_{42}} \omega_{1/0}$

$\Rightarrow \omega_{2/3} \left(\frac{R_2 - R_{42}}{R_{42}} + \frac{R_{42} + R_1}{R_1}\right) = -\frac{R_1}{R_{42}} \omega_{1/0}$

$\Rightarrow \frac{\omega_{3/0}}{\omega_{1/0}} = \frac{\frac{R_1}{R_{42}}}{\left(\frac{R_2 - R_{42}}{R_{42}}\right) R_1 + \left(\frac{R_{42} + R_1}{R_1}\right) R_{42}} = \frac{\frac{R_1^2 R_{42}}{R_{42}}}{R_1 R_{42} + R_2 R_{42}}$