

**Cycle 7 - Modélisation des actions mécaniques
intervenant dans un système complexe**

sur un point :

~~$P(z)$~~ ~~$P(z)$~~ ~~$P(z)$~~

$$P(z) = \frac{dF}{ds}$$

$$\Rightarrow dF = P(z) \cdot ds$$

~~$P(z)$~~ \vec{F} portée par \vec{n} (\vec{e}_y)

$$d\vec{F} = P(z) \vec{n} ds$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \left(\int_S P(z) ds \right) \cdot \vec{y}$$

et $ds = dz dx$

$$\Rightarrow \vec{F} = \left(L \int_0^H P(z) dz \right) \vec{y}$$

$$= L \left(\int_0^H p g z dz \right) \vec{y}$$

$$\vec{F} = \frac{L p g H^2}{2} \vec{y}$$

1. Introduction

Jusqu'à présent nous nous sommes intéressés à la modélisation des performances cinématiques des systèmes de solides indéformables. C'est-à-dire que nous avons étudié les mouvements de ces systèmes de solides, considérés comme non déformables, sans nous intéresser aux phénomènes les ayant causés.

On associe en général le terme de « force » à ces phénomènes ayant comme conséquence physique une modification de l'accélération et donc de la vitesse d'un corps (variation de norme ou de direction). Dans le cadre plus général de la mécanique, un effort peut aussi être responsable de la déformation du corps auquel il est appliqué, mais l'étude de ce phénomène sort du cadre de l'enseignement de la mécanique en CPGE (seule la mécanique des solides *indéformables* est au programme de SII).

Nous allons ici nous attacher à la mise en équation du lien entre les forces appliquées à un solide et le déplacement qui en résulte. Il va donc être préalablement nécessaire de chercher à associer un modèle mathématique à ce concept de force. Dans le cadre du cours de mécanique, nous préférons d'ailleurs l'utilisation du terme « *action mécanique* » à celui de « force ». Les actions mécaniques appliquées à un ensemble matériel (E) peuvent être de deux types :

- Actions mécaniques de contact (actions de pression, contact entre deux solides). Ces dernières peuvent être ponctuelles, linéiques ou surfaciques, en fonction de la géométrie de la zone de contact ;
- Actions mécaniques à distance (actions magnétiques, de pesanteur). On parle alors d'actions mécaniques volumiques, c'est-à-dire qu'elles s'exercent sur chaque élément de volume du système matériel, sous forme d'une action mécanique élémentaire.

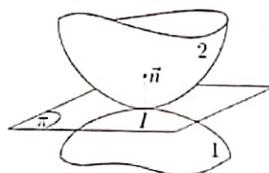
2. Action mécanique ponctuelle agissant sur un système matériel

En pratique, le contact entre deux corps n'est jamais parfaitement ponctuel : il existe toujours une surface de contact entre les deux. Cependant, cette surface peut être petite devant les dimensions des deux corps, si bien qu'il est commode de considérer l'action mécanique globalement transmise, en un point moyen au contact, ce qui revient à considérer l'action comme "ponctuelle".

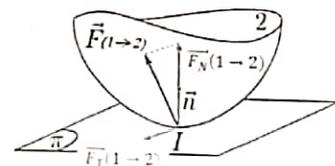
2.1 Notion de force ponctuelle

La représentation mathématique d'une force est un vecteur, défini par :

- Une direction,
- Un sens,
- Une norme,
- Un point d'application



Contact ponctuel entre les solides 1 et 2



Modélisation de l'action mécanique exercée par le solide 1 sur le solide 2

2.2 Notion de moment

L'expérience montre que la notion de force, si elle est suffisante d'un point de vue local sur un petit élément de volume, ne permet pas toujours d'explicitier le comportement d'un solide ou d'un ensemble de solides soumis globalement à une ou plusieurs forces.

D'où l'introduction de la notion de moment (ou de couple). L'outil mathématique utilisé pour calculer le moment est le produit vectoriel. Il permet de représenter correctement les phénomènes observés empiriquement (cf. exemple de l'équilibre d'un mobile).

Soit l'effort exercé au point P par un solide 1 sur un solide 2 et représenté par le vecteur $\vec{F}(1 \rightarrow 2)$. On exprime le moment exercé au point G par le solide 1 sur le solide 2 de la façon suivante :

$$\vec{M}(G, 1 \rightarrow 2) = \vec{GP} \wedge \vec{F}(1 \rightarrow 2)$$

2.3 Torseur associé à une action mécanique ponctuelle

À partir de l'écriture du moment de l'effort $\vec{F}(1 \rightarrow 2)$ au point G , on cherche à exprimer le moment exercé par le même solide 1 sur le même solide 2 au point A .

Selon la définition vue précédemment : $\vec{M}(G, 1 \rightarrow 2) = \vec{GP} \wedge \vec{F}(1 \rightarrow 2)$

$$\text{D'où, } \vec{M}(A, 1 \rightarrow 2) = \vec{AP} \wedge \vec{F}(1 \rightarrow 2) = (\vec{AG} + \vec{GP}) \wedge \vec{F}(1 \rightarrow 2) = \vec{AG} \wedge \vec{F}(1 \rightarrow 2) + \vec{GP} \wedge \vec{F}(1 \rightarrow 2)$$

On retrouve l'expression du moment au point G : $\vec{M}(G, 1 \rightarrow 2) = \vec{GP} \wedge \vec{F}(1 \rightarrow 2)$ et on obtient donc la relation suivante : $\vec{M}(A, 1 \rightarrow 2) = \vec{M}(G, 1 \rightarrow 2) + \vec{AG} \wedge \vec{F}(1 \rightarrow 2)$

Le moment exercé par le solide 1 sur le solide 2 est donc un champ antisymétrique et vérifie la formule de changement de point du moment d'un torseur. L'action mécanique de 1 sur 2 peut donc être représentée par un torseur, que l'on appellera « torseur statique associé à une action mécanique » et que l'on note :

$$\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}(1 \rightarrow 2) \\ \vec{M}(A, 1 \rightarrow 2) = \vec{M}(G, 1 \rightarrow 2) + \vec{AG} \wedge \vec{F}(1 \rightarrow 2) \end{array} \right\}_A$$

La notation ci-dessus devra être respectée car dans le cadre d'un ensemble de solides, elle permet de définir précisément quelle est l'action mécanique (quel solide sur quel autre solide) décrite par le torseur. Ce torseur sera alors appelé « torseur statique de l'action mécanique du solide 1 sur le solide 2 ».

<u>Résultante du torseur d'action mécanique :</u>	<u>Moment au point O du torseur d'action mécanique :</u>
$\vec{R}(1 \rightarrow 2)$	$\vec{M}(O, 1 \rightarrow 2)$
<i>Indépendant du point O</i> choisi pour exprimer le torseur d'action mécanique	<i>Dépendant du point O</i> choisi pour exprimer le torseur d'action mécanique
Effort exercé par le solide S_i sur le solide S_k	Moment (ou couple) exercé par le solide S_i sur le solide S_k au point O
<u>Unité : N</u>	<u>Unité : N.m</u>

Cas particulier 1 : action mécanique représentée par une force en un point P

Lorsque le torseur statique d'une action mécanique est exprimé au point d'application P de la résultante, il prend la forme suivante :

$$\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}(1 \rightarrow 2) \\ \vec{0} \end{array} \right\}_P$$

Cette écriture est de plus valable en tout point de la droite d'action de la force \vec{F} .

Justification:

- Calcul du moment au point P : $\vec{M}(P, 1 \rightarrow 2) = \vec{PP} \wedge \vec{F}(1 \rightarrow 2) = \vec{0}$
- Calcul du moment en un point N situé sur la droite d'action de la force \vec{F} : $\vec{M}(N, 1 \rightarrow 2) = \vec{NP} \wedge \vec{F}(1 \rightarrow 2)$, avec \vec{NP} et $\vec{F}(1 \rightarrow 2)$ colinéaires, d'où $\vec{M}(N, 1 \rightarrow 2) = \vec{0}$.

Cas particulier 2 : action mécanique représentée par un couple

On utilisera la désignation de *couple* pour une action mécanique dont le torseur statique est de la forme

$$\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{M}(A, 1 \rightarrow 2) \end{array} \right\}_A, \forall A$$

3. Action mécanique répartie agissant sur un système matériel

Nous venons de mettre en place un modèle mathématique, le torseur statique, permettant de modéliser l'action mécanique d'un ensemble matériel (1) sur un autre ensemble matériel (2), en considérant une force ponctuelle appliquée en un point M. Cependant, cette action mécanique est en fait le résultat des effets produits par une infinité d'actions élémentaires volumiques ou surfaciques.

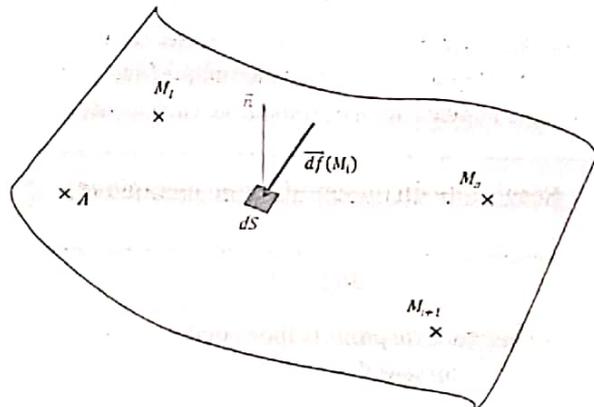
3.1 Cas d'une répartition surfacique de force

3.1.1 Densité surfacique de forces

L'action mécanique de contact exercée par le corps (1) sur un corps (2) peut être modélisée par une action élémentaire $\vec{df}(M_i)$ appliquée en tout point M_i de la surface du solide (2) en contact avec le solide (1). Son intensité est proportionnelle à l'élément de surface dS associé au point M_i .

On peut alors définir une densité surfacique d'effort $p(M_i)$, définie en tout point M_i :

$$\vec{df}_{1 \rightarrow 2}(M_i) = -p(M_i) \cdot \vec{n}(M_i) \cdot dS + \vec{df}_T(M_i)$$



Cette densité surfacique d'effort est homogène à une pression [N/m²].

Contact avec frottement : (par exemple action d'un fluide visqueux sur une paroi) $\Rightarrow \vec{df}_T(M_i) \neq \vec{0}$

Contact sans frottement : (par exemple action d'un fluide non visqueux sur une paroi) $\Rightarrow \vec{df}_T(M_i) = \vec{0}$

3.1.2 Torseur associé à une densité surfacique de forces

Dans le cadre de l'étude du comportement des solides déformables, cette modélisation locale de l'action mécanique d'un corps (1) sur un corps (2) serait indispensable. Cependant, l'objet de ce cours étant l'étude des systèmes de solides indéformables, il est suffisant de modéliser globalement l'action mécanique exercée par le corps (1) sur le corps (2). Nous allons donc associer à cette action mécanique un torseur statique défini en un point A choisi.

$$\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(1 \rightarrow 2) = \int_{M \in (S)} \overrightarrow{df_{1 \rightarrow 2}}(M) \\ \vec{M}(A, 1 \rightarrow 2) = \int_{M \in (S)} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{df_{1 \rightarrow 2}}(M) \end{array} \right\}_A$$

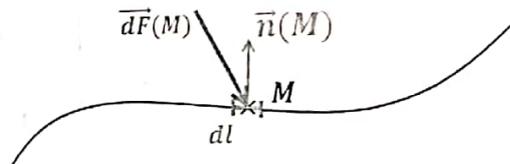
Exemples :

- action de l'eau sur un barrage ;
- action du vent sur une parabole (cf. TD) ;
- pression de contact dans une liaison pivot (cf. TD).

3.2 Cas d'une répartition linéique de force

3.2.1 Densité linéique de forces

Dans certains cas plus particuliers, l'action mécanique exercée par le corps (1) sur un corps (2) peut être modélisée par une action élémentaire $\overrightarrow{df}(M_i)$ appliquée en tout point M_i d'une ligne du solide (2).



L'intensité de cette action élémentaire est alors proportionnelle à l'élément de surface dl associé au point M_i .

On peut alors définir une densité linéique d'effort $\lambda(M_i)$, définie en tout point M_i :

$$\overrightarrow{df_{1 \rightarrow 2}}(M_i) = -\lambda(M_i) \cdot \vec{n}(M_i) \cdot dl + \overrightarrow{df_T}(M_i)$$

Cette densité surfacique d'effort est homogène à une force par unité de longueur [N/m].

Contact avec frottement : $\Rightarrow \overrightarrow{df_T}(M_i) \neq \vec{0}$

Contact sans frottement : $\Rightarrow \overrightarrow{df_T}(M_i) = \vec{0}$

3.2.2 Torseur associé à une densité linéique de forces

Dans le cas d'une répartition linéique de force, comme dans le cas d'une répartition surfacique, nous pouvons associer à l'action mécanique de (1) sur (2) un torseur statique défini en un point A choisi.

$$\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(1 \rightarrow 2) = \int_{M \in (L)} \overrightarrow{df_{1 \rightarrow 2}}(M) \\ \vec{M}_A(1 \rightarrow 2) = \int_{M \in (L)} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{df_{1 \rightarrow 2}}(M) \end{array} \right\}_A$$

Exemples :

- action de l'eau sur un barrage dans une modélisation plane ;
- action de la pesanteur sur une poutre.

3.3 Cas d'une répartition volumique de force**3.3.1 Densité volumique de forces**

Dans le cas d'une action mécanique à distance (par exemple l'action de la pesanteur ou d'un champ électromagnétique sur un corps), chaque élément de volume de ce corps est soumis à une action mécanique élémentaire $\overrightarrow{df}_{1 \rightarrow 2}(M_i)$ appliquée au point M_i .

Cette action mécanique élémentaire est liée à la densité volumique de force $\mu(M_i)$ en tout point M_i par la relation :

$$\overrightarrow{df}_{1 \rightarrow 2}(M_i) = \vec{\mu}(M_i) \cdot dV$$

Cette densité volumique d'effort est homogène à une force par unité de volume $[N/m^3]$.

3.3.2 Torseur associé à une densité volumique de forces

Comme précédemment, nous pouvons associer à l'action mécanique de (1) sur (2) un torseur statique défini en un point A choisi.

$$\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(1 \rightarrow 2) = \int_{M \in (V)} \overrightarrow{df}_{1 \rightarrow 2}(M) \\ \vec{M}_A(1 \rightarrow 2) = \int_{M \in (V)} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{df}_{1 \rightarrow 2}(M) \end{array} \right\}_A$$

Exemples :

- action de la pesanteur sur une parabole (cf. TD).

3.3.3 Définition de la masse et du centre de gravité d'un solide

Soit un solide soumis à l'action de la pesanteur. On a alors :

$$\vec{R}(pes \rightarrow S) = \int_{M \in (V)} \overrightarrow{df}_{pes}(M), \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{df}_{pes}(M) = dm \cdot \vec{g} = \rho \cdot \vec{g} \cdot dV$$

Si on pose l'hypothèse que la masse volumique du solide est constant :

$$\vec{R}(pes \rightarrow S) = \int_{M \in (V)} \rho \cdot \vec{g} \cdot dV = \rho \cdot \vec{g} \cdot \int_{M \in (V)} dV$$

Soit : $\vec{R}(pes \rightarrow S) = \rho \cdot \vec{g} \cdot V = m_{solide} \cdot \vec{g}$	avec	$m_{solide} = \rho \cdot \int_{M \in (V)} dV = \int_{M \in (V)} dm$
---	------	---

On cherche alors à définir le point d'application de cette force. Il s'agit de trouver le point où le moment s'annule, soit en notant G ce point particulier :

$$\vec{M}(G, pes \rightarrow S) = \int_{M \in (V)} \overrightarrow{GM} \wedge d\vec{f}_{pes}(M) = \int_{M \in (V)} (\overrightarrow{GM} \wedge dm \cdot \vec{g}) = \left[\int_{M \in (V)} \overrightarrow{GM} \cdot dm \right] \wedge \vec{g} \quad (\text{car } \vec{g} = \text{cste})$$

On cherche donc à résoudre l'équation vectorielle : $\left[\int_{M \in (V)} \overrightarrow{GM} \cdot dm \right] \wedge \vec{g} = \vec{0}$

3 solutions sont possibles : $\begin{cases} \left[\int_{M \in (V)} \overrightarrow{GM} \cdot dm \right] = \vec{0} \\ \vec{g} = \vec{0} \\ \left[\int_{M \in (V)} \overrightarrow{GM} \cdot dm \right] \text{ colinéaire à } \vec{g} \end{cases}$ et $\int_{M \in (V)} \overrightarrow{GM} \cdot dm$ étant a priori quelconque,

on retient : $\left[\int_{M \in (V)} \overrightarrow{GM} \cdot dm \right] = \vec{0} \Leftrightarrow \int_{M \in (V)} (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM}) \cdot dm = \vec{0} \Leftrightarrow \int_{M \in (V)} \overrightarrow{OG} \cdot dm = \int_{M \in (V)} \overrightarrow{OM} \cdot dm$

Comme le vecteur \overrightarrow{OG} est constant, on en déduit finalement la définition du centre de gravité du solide :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\int_{M \in (V)} dm} \cdot \int_{M \in (V)} \overrightarrow{OM} \cdot dm = \frac{1}{m_{\text{solide}}} \cdot \int_{M \in (V)} \overrightarrow{OM} \cdot dm$$

4. Prise en compte du frottement dans les contacts

4.1 Contact ponctuel entre solides indéformables

Comme énoncé en introduction, le contact entre deux solides n'est jamais parfaitement ponctuel (solides localement déformés \Rightarrow surface de contact). Cependant, cette surface peut être suffisamment petite devant les dimensions des solides, ce qui permet de considérer l'action mécanique globalement transmise comme « ponctuelle », appliquée en un point moyen au contact.

Il faut néanmoins garder à l'esprit qu'il existe toujours une petite répartition de pression au voisinage du point moyen.

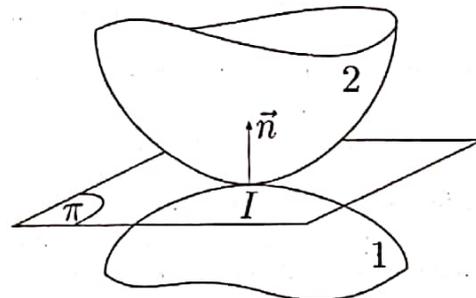


Figure 1. : paramétrage du contact entre deux solides

La pression maximale dans cette zone permet de conclure sur la dégradation des surfaces. Les forces surfaciques autour du point moyen peuvent être responsables de résistances au roulement ou au pivotement que nous chercherons à modéliser globalement par la suite.

Soient 1 et 2 deux solides en contact ponctuel en I. On définit ce contact par les entités géométriques suivantes :

- (π) , plan tangent au contact I
- \vec{n} , normale orientée de 1 vers 2 en I

On peut définir l'action de 2 sur 1 : $\{ \mathcal{F}(1 \rightarrow 2) \}$

$$= \left\{ \begin{matrix} \vec{F}(1 \rightarrow 2) \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_I$$

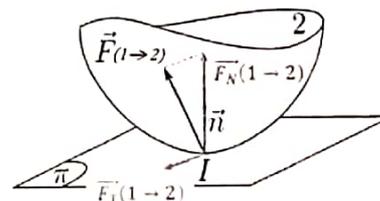


Figure 2. : définition de l'action mécanique exercée par le solide 1 sur le solide 2

Avec : $\vec{F}(1 \rightarrow 2) = (1 \rightarrow 2) + \vec{F}_T(1 \rightarrow 2)$

- $\vec{F}_N(1 \rightarrow 2) = \left((\vec{F}(1 \rightarrow 2)) \cdot \vec{n} \right) \cdot \vec{n} \Rightarrow$ **composante normale**
- $\vec{F}_T(1 \rightarrow 2) = \vec{n} \wedge \left((\vec{F}(1 \rightarrow 2)) \wedge \vec{n} \right) \Rightarrow$ **composante tangentielle**, $\vec{F}_T \in (\pi)$

4.2 Cas du contact sans frottement

Le contact sans frottement impose :

- $\vec{F}(1 \rightarrow 2)$ colinéaire à \vec{n} (non frottement),
- $\vec{F}(1 \rightarrow 2)$ de même sens que \vec{n} (condition de contact unilatéral : possibilité de décollement, mais pas de pénétration des solides),
- $\vec{V}(I \in 1/2) \cdot \vec{n} = 0$ (condition de contact persistant) ou $\vec{V}(I \in 1/2) \cdot \vec{n} > 0$ (condition de contact non persistant).

4.3 Cas du contact avec frottement : modèle de Coulomb

4.3.1 Contact avec frottement, cas du glissement : $\vec{V}(I \in 1/2) \neq \vec{0}$

- Première loi de Coulomb : $\vec{F}_T(1 \rightarrow 2) \wedge \vec{V}(I \in 1/2) = \vec{0}$
- Deuxième loi de Coulomb : $\vec{F}_T(1 \rightarrow 2) \cdot \vec{V}(I \in 1/2) < 0$
- Troisième loi de Coulomb : $\|\vec{F}_T(1 \rightarrow 2)\| = f_g \cdot \|\vec{F}_N(1 \rightarrow 2)\|$

Avec f_g , coefficient de frottement (grandeur sans unité).

Ce coefficient dépend des matériaux en contact, de la qualité des surfaces, des lubrifiants présents. Ce coefficient de frottement est en général déterminé expérimentalement. Dans le modèle de Coulomb, il est considéré comme constant pour un couple de matériaux donné.

Ce modèle est le plus simple permettant de tenir compte du phénomène de frottement. Il est bien évident que la réalité est plus complexe : souvent, ce coefficient dépend de beaucoup d'autres paramètres comme température, la rugosité des surfaces, la vitesse de glissement, etc..

4.3.2 Contact avec frottement, cas de l'adhérence : $\vec{V}(I \in 1/2) = \vec{0}$

- La troisième loi de Coulomb est alors : $\|\vec{F}_T(1 \rightarrow 2)\| \leq f_a \cdot \|\vec{F}_N(1 \rightarrow 2)\|$

Avec f_a , coefficient de frottement d'adhérence (grandeur sans unité). Ce coefficient est légèrement supérieur au coefficient de frottement f_g . On rencontre souvent l'approximation $f_a \approx f_g$.

4.3.3 Représentation graphique, cône de frottement

Les conditions de frottement peuvent se représenter graphiquement, sous la forme d'une action tangentielle maximale proportionnelle à l'action normale, c'est à dire sous la forme d'une inclinaison maximale de la force transmise au contact par rapport à la normale. Si on considère φ_a tel que $f_a = \tan \varphi_a$, cet angle représente l'inclinaison maximale (de même pour φ_g tel que $f_g = \tan \varphi_g$).

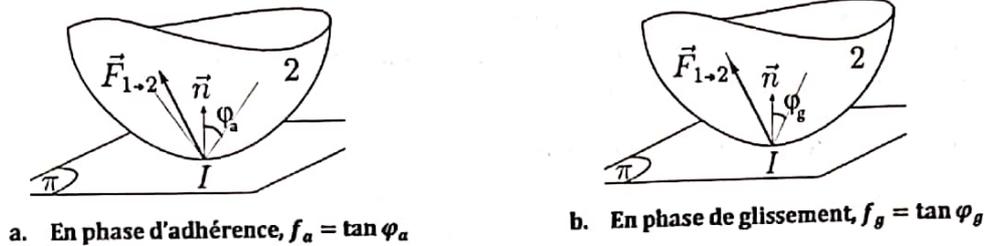


Figure 3. : interprétation graphique des lois de Coulomb

En phase d'adhérence (figure 3.a), la condition de Coulomb impose que $\vec{F}(1 \rightarrow 2)$ soit « dans le cône de frottement » ou, à la limite du glissement, « sur le cône ».

En phase de glissement (figure 3.b), la condition de Coulomb impose que $\vec{F}(1 \rightarrow 2)$ soit « sur le cône » et opposé à la vitesse de glissement.

Le modèle de Coulomb interdit à la force $\vec{F}(1 \rightarrow 2)$ d'être hors du cône.

Ces représentations planes sont à interpréter en trois dimensions. Le secteur angulaire est alors effectivement un cône, de demi-angle au sommet φ (figure 4.).

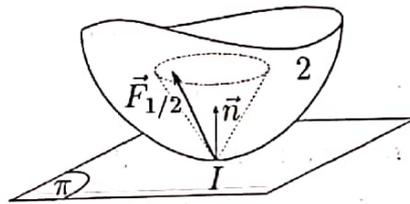


Figure 4. : interprétation graphique en 3D des lois de Coulomb

4.4 Contact ponctuel avec résistance au roulement ou au pivotement

L'hypothèse d'un contact ponctuel entre deux solides est une vue de l'esprit. Dans les faits, le contact réel entre ces derniers a lieu sur un petit élément de surface dS contenant le point I.

Le torseur modélisant l'action mécanique de contact du solide 1 sur le solide 2 s'écrit sous la forme suivante :

$$\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}(1 \rightarrow 2) \\ \vec{M}(I, 1 \rightarrow 2) \end{array} \right\}_I$$

Nous avons étudié précédemment les composantes de la résultante de ce torseur. De la même façon, on peut décomposer le moment du torseur : $\vec{M}(I, 1 \rightarrow 2) = \vec{M}_N(I, 1 \rightarrow 2) + \vec{M}_T(I, 1 \rightarrow 2)$

- $\vec{M}_N(I, 1 \rightarrow 2) = (\vec{M}(I, 1 \rightarrow 2) \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n}$ est la composante normale, appelée **moment de pivotement**
- $\vec{M}_T(I, 1 \rightarrow 2)$, avec $\vec{M}_T \in (\pi)$ est la composante tangentielle appelée **moment de roulement**

De plus, nous avons défini lors de l'étude cinématique du contact ponctuel entre deux solides 1 et 2 :

- $\vec{\Omega}_N(2/1)$, composante normale de la vitesse de rotation $\vec{\Omega}(2/1)$, appelée vecteur-pivotement du solide 2 par rapport au solide 1
- $\vec{\Omega}_T(2/1)$, composante tangentielle de la vitesse de rotation $\vec{\Omega}(2/1)$, appelée vecteur-roulement du solide 2 par rapport au solide 1, $\vec{\Omega}_T \in (\pi)$

Des relations analogues à celles des lois de Coulomb peuvent être mises en évidence entre les composantes normales et tangentielles du moment résultant de l'action du solide 1 sur le solide 2 au point I et de la vitesse de rotation du solide 2 par rapport au solide 1.

4.4.1 Résistance au pivotement

Si $\vec{\Omega}_N(2/1) \neq \vec{0}$:	• Si $\vec{\Omega}_N(2/1) = \vec{0}$:
$\vec{M}_N(I, 1 \rightarrow 2) \cdot \vec{\Omega}_N(2/1) < 0$ $\ \vec{M}_N(I, 1 \rightarrow 2)\ = \delta \cdot \ \vec{F}_N(1 \rightarrow 2)\ $	$\ \vec{M}_N(I, 1 \rightarrow 2)\ \leq \delta \cdot \ \vec{F}_N(1 \rightarrow 2)\ $

δ est le paramètre de résistance au pivotement (homogène à une longueur).

4.4.2 Résistance au roulement

Si $\vec{\Omega}_T(2/1) \neq \vec{0}$:	• Si $\vec{\Omega}_T(2/1) = \vec{0}$:
$\vec{M}_T(I, 1 \rightarrow 2) \wedge \vec{\Omega}_T(2/1) = \vec{0}$ $\vec{M}_T(I, 1 \rightarrow 2) \cdot \vec{\Omega}_T(2/1) < 0$ $\ \vec{M}_T(I, 1 \rightarrow 2)\ = \eta \cdot \ \vec{F}_N(1 \rightarrow 2)\ $	$\ \vec{M}_T(I, 1 \rightarrow 2)\ \leq \eta \cdot \ \vec{F}_N(1 \rightarrow 2)\ $

η est le paramètre de résistance au roulement (homogène à une longueur).

4.5 Contact surfacique entre deux solides.

Lorsque la surface de contact n'est pas petite devant la géométrie des solides, il n'est plus possible de faire l'hypothèse de contact ponctuel. L'action mécanique entre les deux solides est surfacique et on définit alors en tout point M une force élémentaire $d\vec{F}(1 \rightarrow 2)$ et une répartition surfacique de force $p(M)$ (cf. paragraphe 3.1). Dans ce cas-là, les lois de Coulomb doivent être écrites localement (de façon similaire à celles du contact ponctuel). On note $\vec{n}(M)$ la normale de 1 vers 2 en M.

4.5.1 Contact surfacique sans frottement

En l'absence de frottement, $d\vec{F}(1 \rightarrow 2)$ est colinéaire à $\vec{n}(M)$ et de même sens.

4.5.2 Contact surfacique avec frottement : modèle de Coulomb

$$d\vec{F}(1 \rightarrow 2) = dF_N(1 \rightarrow 2) \cdot \vec{n} + d\vec{F}_T(1 \rightarrow 2)$$

Cas de l'adhérence :

- Non glissement : $\vec{V}(M \in 1/2) = \vec{0}$
- Limite sur l'action tangentielle : $\|d\vec{F}_T(1 \rightarrow 2)\| \leq f_a \|d\vec{F}_N(1 \rightarrow 2)\|$

Cas du glissement :

- Condition de contact et glissement : $\vec{V}(M \in 1/2) \in (\pi)$ et $\vec{V}(M \in 1/2) \neq \vec{0}$
- Action tangentielle : $\|\overline{dF_T}(1 \rightarrow 2)\| = f_g \|\overline{dF_N}(1 \rightarrow 2)\|$
- Sens de l'action tangentielle : $\overline{dF_T}(1 \rightarrow 2)$ est de même direction et de sens opposé à $\vec{V}(M \in 2/1)$.

5. Modélisation des actions mécaniques de liaison

De la même manière que nous nous sommes intéressés aux mouvements autorisés par les liaisons mécaniques usuelles lors du cours de cinématique, nous allons maintenant nous intéresser aux efforts transmissibles par ces liaisons. Le torseur modélisant une action mécanique de contact, appelé torseur statique, peut s'écrire, dans le cas le plus général et lorsqu'il est écrit au point O et projeté dans une base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$\{\mathcal{T}(S_i \rightarrow S_k)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(S_i \rightarrow S_k) \\ \vec{M}(O, S_i \rightarrow S_k) \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{ll} X_{ik} & L_{ik} \\ Y_{ik} & M_{ik} \\ Z_{ik} & N_{ik} \end{array} \right\}_{O, (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Résultante du torseur statique : $\vec{R}(S_i \rightarrow S_k)$		Moment au point O du torseur statique : $\vec{M}(O, S_i \rightarrow S_k)$	
Composante sur l'axe \vec{x}	X_{ik}	Composante au point O sur l'axe \vec{x}	L_{ik}
Composante sur l'axe \vec{y}	Y_{ik}	Composante au point O sur l'axe \vec{y}	M_{ik}
Composante sur l'axe \vec{z}	Z_{ik}	Composante au point O sur l'axe \vec{z}	N_{ik}

Lorsque les deux solides sont liés par une liaison normalisée (les mêmes que celles vues en cinématique), ce torseur d'action mécanique transmissible prend une forme particulière, spécifique à chacune des liaisons, s'il est écrit en un point et projeté dans une base tous deux judicieusement choisis.

En effet, comme dans les torseurs cinématiques, la géométrie des surfaces de contact entre les deux solides impose la nullité de certaines composantes du torseur d'actions mécaniques transmissibles. Ce sont ces composantes nulles que nous allons chercher à mettre en évidence pour chacune des liaisons dans la suite de ce cours. Les composantes non nulles sont à priori inconnues et devront être déterminées par l'écriture des théorèmes généraux de la dynamique et/ou de la statique (cf. 3^{ème} partie du cours). Nous n'allons pas chercher à les expliciter tout de suite.

Pour chacune des liaisons, deux cas seront envisagés : avec et sans frottement. Bien que tout contact entre solides se fasse avec frottement, sa prise en compte complique le modèle. Il ne sera donc pris en compte que dans les cas où cela est nécessaire. Il revient au concepteur de déterminer si la prise en compte du frottement est pertinente ou non dans son étude.

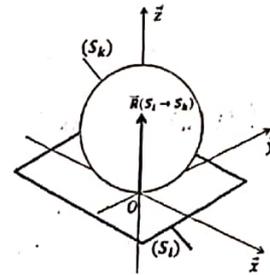
5.1 Cas 1 – liaison ponctuelle de normale (O, \vec{z})

5.1.1 En l'absence de frottement

En l'absence de frottement, l'action mécanique exercée par le solide S_i sur le solide S_k est normale au plan tangent commun aux deux solides au point de contact O . La seule composante non nulle (pour le cas étudié ici) est donc la composante selon l'axe \vec{z}

$$\text{D'où : } \vec{R}(S_i \rightarrow S_k) = Z_{ik} \cdot \vec{z}$$

Le moment calculé au centre de la liaison (au point O) est nul (point d'application de la force).



La forme du torseur statique associé à cette liaison, en l'absence de frottement, est alors la suivante :

$$\{\mathcal{T}(S_i \rightarrow S_k)\} = \left\{ \begin{matrix} Z_{ik} \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_O = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{ik} & 0 \end{matrix} \right\}_{O, (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

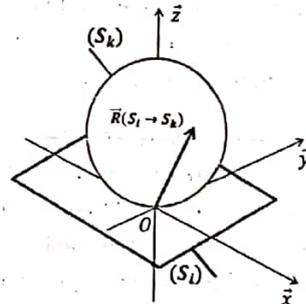
La forme de ce torseur est valable pour tout point $P \in (O; \vec{z})$ et dans toute base ayant le vecteur unitaire \vec{z} comme troisième vecteur (mêmes conditions qu'en cinématique).

5.1.2 En présence de frottement

En présence de frottement, l'action mécanique exercée par le solide S_i sur le solide S_k est de direction quelconque. Elle possède une composante normale selon \vec{z} et une composante tangentielle dans le plan (\vec{x}, \vec{y}) . Cette composante pourrait par exemple être modélisée grâce aux lois de Coulomb. On a alors trois composantes possibles :

$$\vec{R}(S_i \rightarrow S_k) = X_{ik} \cdot \vec{x} + Y_{ik} \cdot \vec{y} + Z_{ik} \cdot \vec{z}$$

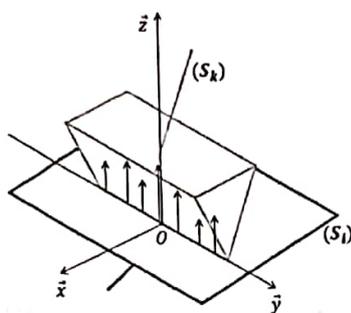
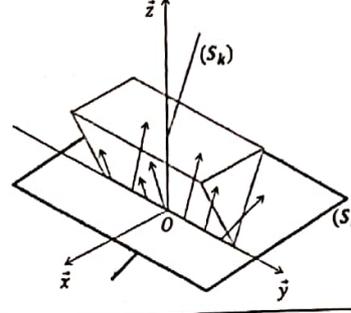
Le moment calculé au centre de la liaison reste nul (il s'agit toujours du point d'application de la force).



La forme du torseur statique associé à cette liaison est alors la suivante :

$$\{\mathcal{T}(S_i \rightarrow S_k)\} = \left\{ \begin{matrix} X_{ik} \cdot \vec{x} + Y_{ik} \cdot \vec{y} + Z_{ik} \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_O = \left\{ \begin{matrix} X_{ik} & 0 \\ Y_{ik} & 0 \\ Z_{ik} & 0 \end{matrix} \right\}_{O, (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

5.2 Cas 2 - liaison cylindre plan, direction \vec{y} et normale (O, \vec{z})

Actions mécaniques locales transmissibles en absence de frottement	Actions mécaniques locales transmissibles en présence de frottement
	
<p>En l'absence de frottement, l'action mécanique exercée par le solide S_i sur le solide S_k est une répartition linéique de force le long de la ligne de contact. Chaque effort élémentaire est orienté selon la normale au plan tangent commun aux deux solides, ici \vec{z}.</p>	<p>En présence de frottement, l'action mécanique exercée par le solide S_i sur le solide S_k est encore une répartition linéique de force, mais chaque effort élémentaire est dans une direction quelconque (composante normale selon \vec{z} + composante tangentielle selon \vec{x} et \vec{y}).</p>
<p>D'où, l'effort élémentaire appliqué en un point M du contact $d\vec{F}_M(S_i \rightarrow S_k)$ et le moment élémentaire dû à cet effort élémentaire exprimé au point O $d\vec{M}_M(O, S_i \rightarrow S_k)$:</p>	
$d\vec{F}_M(S_i \rightarrow S_k) = dZ_{ik} \cdot \vec{z}$ $d\vec{M}_M(O, S_i \rightarrow S_k) = \vec{OM} \wedge d\vec{F}_M(S_i \rightarrow S_k)$ $= \vec{OM} \wedge dZ_{ik} \cdot \vec{z}$	$d\vec{F}_M(S_i \rightarrow S_k) = dX_{ik} \cdot \vec{x} + dY_{ik} \cdot \vec{y} + dZ_{ik} \cdot \vec{z}$ $d\vec{M}_M(O, S_i \rightarrow S_k) = \vec{OM} \wedge d\vec{F}_M(S_i \rightarrow S_k)$ $= \vec{OM} \wedge (dX_{ik} \cdot \vec{x} + dY_{ik} \cdot \vec{y} + dZ_{ik} \cdot \vec{z})$
<p>Or $\vec{OM} = y \cdot \vec{y}$ (l'intégration se fait le long de la ligne de contact)</p>	
<p>d'où $d\vec{M}_M(O, S_i \rightarrow S_k) = y \cdot dZ_{ik} \cdot \vec{x}$</p> <p>Le moment élémentaire ne possède qu'une composante selon \vec{x}, que l'on choisit de noter dL_{ik}</p>	<p>d'où $d\vec{M}_M(O, S_i \rightarrow S_k) = y \cdot (-dX_{ik} \cdot \vec{z} + dZ_{ik} \cdot \vec{x})$</p> <p>Le moment élémentaire possède alors deux composantes : une selon \vec{x}, notée dL_{ik} et une selon \vec{z}, notée dN_{ik}</p>
<p>En l'absence de toute symétrie de répartition de la charge et en intégrant sur toute la longueur du contact, on obtient alors :</p>	
$\vec{R}(S_i \rightarrow S_k) = \int_L dZ_{ik} \cdot \vec{z} = Z_{ik} \cdot \vec{z}$ $\vec{M}(O, S_i \rightarrow S_k) = \int_L dL_{ik} \cdot \vec{x} = L_{ik} \cdot \vec{x}$ <p>Remarque: comme précisé en introduction, les composantes de la force et du moment résultants sont inconnues - elles sont notées Z_{ik}, L_{ik}, etc. selon la notation présentée page 10.</p>	$\vec{R}(S_i \rightarrow S_k) = \int_L (dX_{ik} \cdot \vec{x} + dY_{ik} \cdot \vec{y} + dZ_{ik} \cdot \vec{z})$ $= X_{ik} \cdot \vec{x} + Y_{ik} \cdot \vec{y} + Z_{ik} \cdot \vec{z}$ $\vec{M}(O, S_i \rightarrow S_k) = \int_L (dL_{ik} \cdot \vec{x} + dN_{ik} \cdot \vec{z})$ $= L_{ik} \cdot \vec{x} + N_{ik} \cdot \vec{z}$

La forme du torseur statique associé à cette liaison est la suivante :

$\{T(S_i \rightarrow S_k)\} = \begin{Bmatrix} Z_{ik} \cdot \vec{z} \\ M_{ik} \cdot \vec{y} \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} 0 & L_{ik} \\ 0 & 0 \\ Z_{ik} & 0 \end{Bmatrix}_{O,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	$\{T(S_i \rightarrow S_k)\} = \begin{Bmatrix} X_{ik} & L_{ik} \\ Y_{ik} & 0 \\ Z_{ik} & N_{ik} \end{Bmatrix}_{O,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
---	---

La forme de ce torseur est conservée en tout point du plan (O, \vec{y}, \vec{z}) (sans frottement) et en tout point de la droite (O, \vec{y}) (avec frottement)

Cette invariance se démontre en écrivant la relation de changement de point avec un point M quelconque $\vec{OM} = x_M \cdot \vec{x} + y_M \cdot \vec{y} + z_M \cdot \vec{z}$ et en cherchant quelles sont les conditions à imposer sur x_M, y_M et z_M pour que le torseur reste inchangé.

5.3 Cas 3 - liaison appui plan de normale (O, \vec{z})

<u>Actions mécaniques locales transmissibles en absence de frottement</u>	<u>Actions mécaniques locales transmissibles en présence de frottement</u>
<p>En l'absence de frottement, l'action mécanique exercée par le solide S_i sur le solide S_k est une répartition surfacique de force, chaque effort élémentaire étant orienté selon la normale au plan tangent commun aux deux solides, ici \vec{z}.</p>	<p>En présence de frottement, l'action mécanique exercée par le solide S_i sur le solide S_k est une répartition surfacique de force, mais chaque effort élémentaire est dans une direction quelconque (composante normale + composante tangentielle).</p>
<p>D'où, l'effort élémentaire appliqué en un point M du contact $\vec{dF}_M(S_i \rightarrow S_k)$ et le moment élémentaire dû à cet effort élémentaire exprimé au point O, $\vec{dM}_M(O, S_i \rightarrow S_k)$:</p>	
$\vec{dF}_M(S_i \rightarrow S_k) = dZ_{ik} \cdot \vec{z}$ $\vec{dM}_M(O, S_i \rightarrow S_k) = \vec{OM} \wedge \vec{dF}_M(S_i \rightarrow S_k)$ $= \vec{OM} \wedge dZ_{ik} \cdot \vec{z}$	$\vec{dF}_M(S_i \rightarrow S_k) = dX_{ik} \cdot \vec{x} + dY_{ik} \cdot \vec{y} + dZ_{ik} \cdot \vec{z}$ $\vec{dM}_M(O, S_i \rightarrow S_k) = \vec{OM} \wedge \vec{dF}_M(S_i \rightarrow S_k)$ $= \vec{OM} \wedge (dX_{ik} \cdot \vec{x} + dY_{ik} \cdot \vec{y} + dZ_{ik} \cdot \vec{z})$
<p>Or $\vec{OM} = x \cdot \vec{x} + y \cdot \vec{y}$ (l'intégration se fait sur la surface de contact)</p>	
<p>d'où $\vec{dM}_M(O, S_i \rightarrow S_k) = -x \cdot dZ_{ik} \cdot \vec{y} + y \cdot dZ_{ik} \cdot \vec{x}$</p> <p>Le moment élémentaire possède alors deux composantes : une selon \vec{x}, notée dL_{ik} et une selon \vec{y}, notée dM_{ik}</p>	<p>d'où $\vec{dM}_M(O, S_i \rightarrow S_k) = x \cdot dY_{ik} \cdot \vec{z} - x \cdot dZ_{ik} \cdot \vec{y} - y \cdot dX_{ik} \cdot \vec{z} + y \cdot dZ_{ik} \cdot \vec{x}$</p> <p>Le moment élémentaire possède alors trois composantes : une selon \vec{x}, notée dL_{ik}, une selon \vec{y}, notée dM_{ik} et une selon \vec{z}, notée dN_{ik}</p>
<p>En l'absence de toute symétrie de répartition de la charge et en intégrant sur toute la surface du contact, on obtient :</p>	
$\vec{R}(S_i \rightarrow S_k) = \int_S dZ_{ik} \cdot \vec{z} = Z_{ik} \cdot \vec{z}$	$\vec{R}(S_i \rightarrow S_k) = \int_L (dX_{ik} \cdot \vec{x} + dY_{ik} \cdot \vec{y} + dZ_{ik} \cdot \vec{z})$ $= X_{ik} \cdot \vec{x} + Y_{ik} \cdot \vec{y} + Z_{ik} \cdot \vec{z}$

$\vec{M}(O, S_i \rightarrow S_k) = \int_S dL_{ik} \cdot \vec{x} + \int_S dM_{ik} \cdot \vec{y}$ $= L_{ik} \cdot \vec{x} + M_{ik} \cdot \vec{y}$	$\vec{M}(O, S_i \rightarrow S_k) = \int_L (dL_{ik} \cdot \vec{x} + dM_{ik} \cdot \vec{y} + dN_{ik} \cdot \vec{z})$ $= L_{ik} \cdot \vec{x} + M_{ik} \cdot \vec{y} + N_{ik} \cdot \vec{z}$
La forme du torseur statique associé à cette liaison est la suivante :	
$\{\mathcal{T}(S_i \rightarrow S_k)\} = \left\{ \begin{matrix} Z_{ik} \cdot \vec{z} \\ L_{ik} \cdot \vec{x} + M_{ik} \cdot \vec{y} \end{matrix} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} 0 & L_{ik} \\ 0 & M_{ik} \\ Z_{ik} & 0 \end{matrix} \right\}_{A, (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$	$\{\mathcal{T}(S_i \rightarrow S_k)\} = \left\{ \begin{matrix} X_{ik} & L_{ik} \\ Y_{ik} & M_{ik} \\ Z_{ik} & N_{ik} \end{matrix} \right\}_{A, (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$
La forme de ce torseur est conservée en tout point A de l'espace et dans toute base ayant le vecteur unitaire \vec{z} comme troisième vecteur.	

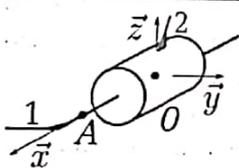
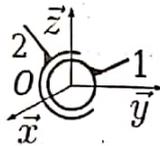
5.4 Cas 4 - liaison sphère cylindre d'axe (O, \vec{x})

<u>Actions mécaniques locales transmissibles en absence de frottement</u>	<u>Actions mécaniques locales transmissibles en présence de frottement</u>
<p>En l'absence de frottement, l'action mécanique exercée par le solide S_i sur le solide S_k est une répartition linéique de force, chaque effort élémentaire étant orienté selon la normale à la ligne de contact entre les deux solides. Ici, il est plus simple d'utiliser les coordonnées polaires, et la normale à la ligne de contact est alors selon l'axe \vec{e}_r.</p> <p>L'effort élémentaire en tout point M exercé par le solide S_i sur le solide S_k est donc orienté selon le vecteur \vec{MO} porté par $-\vec{e}_r$. Par projection, ces efforts présenteront des composantes sur les axes \vec{y} et \vec{z}.</p>	<p>En présence de frottement, l'action mécanique exercée par le solide S_i sur le solide S_k est une répartition linéique de force, mais chaque effort élémentaire est dans une direction quelconque (cf. schéma ci-dessus). Par projection, ces efforts présenteront donc des composantes sur les axes \vec{x}, \vec{y} et \vec{z}. D'où :</p>
D'où, l'effort élémentaire appliqué en un point M du contact $d\vec{F}_M(S_i \rightarrow S_k)$ et le moment élémentaire dû à cet effort élémentaire exprimé au point O, $d\vec{M}_M(O, S_i \rightarrow S_k)$:	
$d\vec{F}_M(S_i \rightarrow S_k) = dF_M \cdot \vec{e}_r = dY_{ik} \cdot \vec{y} + dZ_{ik} \cdot \vec{z}$ $d\vec{M}_M(O, S_i \rightarrow S_k) = \vec{OM} \wedge d\vec{F}_M(S_i \rightarrow S_k)$	$d\vec{F}_M(S_i \rightarrow S_k) = dX_{ik} \cdot \vec{x} + dY_{ik} \cdot \vec{y} + dZ_{ik} \cdot \vec{z}$ $d\vec{M}_M(O, S_i \rightarrow S_k) = \vec{OM} \wedge d\vec{F}_M(S_i \rightarrow S_k)$
Or $\vec{OM} = R \cdot \vec{e}_r$ (l'intégration se fait sur la ligne de contact entre la sphère et le cylindre)	
d'où $d\vec{M}_M(O, S_i \rightarrow S_k) = R \cdot \vec{e}_r \wedge (dF_M \cdot \vec{e}_r) = \vec{0}$	\vec{e}_r est colinéaire avec aucun des vecteurs de la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, donc par calcul du produit vectoriel les

	moments élémentaires présenteront des composantes sur les trois axes : $d\vec{M}_M(O, S_i \rightarrow S_k) = dL_{ik} \cdot \vec{x} + dM_{ik} \cdot \vec{y} + dN_{ik} \cdot \vec{z}$
En intégrant sur toute la longueur du contact, on obtient :	
$\vec{R}(S_i \rightarrow S_k) = \int_L -dF_M \cdot \vec{e}_r = \int_L [dY_{ik} \cdot \vec{y} + dZ_{ik} \cdot \vec{z}]$ $= Y_{ik} \cdot \vec{y} + Z_{ik} \cdot \vec{z}$ $\vec{M}(O, S_i \rightarrow S_k) = \vec{0}$	$\vec{R}(S_i \rightarrow S_k) = \int_L (dX_{ik} \cdot \vec{x} + dY_{ik} \cdot \vec{y} + dZ_{ik} \cdot \vec{z})$ $= X_{ik} \cdot \vec{x} + Y_{ik} \cdot \vec{y} + Z_{ik} \cdot \vec{z}$ $\vec{M}(O, S_i \rightarrow S_k) = \int_L (dL_{ik} \cdot \vec{x} + dM_{ik} \cdot \vec{y} + dN_{ik} \cdot \vec{z})$ $= L_{ik} \cdot \vec{x} + M_{ik} \cdot \vec{y} + N_{ik} \cdot \vec{z}$
La forme du torseur statique associé à cette liaison est la suivante :	
$\{\mathcal{T}(S_i \rightarrow S_k)\} = \left\{ \begin{matrix} Y_{ik} \cdot \vec{y} + Z_{ik} \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_O = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ Y_{ik} & 0 \\ Z_{ik} & 0 \end{matrix} \right\}_{O, (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$	$\{\mathcal{T}(S_i \rightarrow S_k)\} = \left\{ \begin{matrix} X_{ik} & L_{ik} \\ Y_{ik} & M_{ik} \\ Z_{ik} & N_{ik} \end{matrix} \right\}_{O, (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$
La forme de ce torseur n'est valable qu'au point O, dans toute base ayant le vecteur unitaire \vec{x} comme premier vecteur.	

5.5 Cas 5 - liaison pivot glissant d'axe (O, \vec{x}) et liaison sphérique au point O

La même démarche peut être appliquée au cas de la liaison pivot glissant (en coordonnées polaire) ou pour la liaison rotule (en coordonnées sphérique). Les torseurs obtenus sont les suivants :

Liaison pivot glissant - en l'absence de frottement	Liaison rotule / sphérique
	
$\{\mathcal{T}(S_i \rightarrow S_k)\} = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ Y_{ik} & M_{ik} \\ Z_{ik} & N_{ik} \end{matrix} \right\}_{O, (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$	$\{\mathcal{T}(S_i \rightarrow S_k)\} = \left\{ \begin{matrix} X_{ik} & 0 \\ Y_{ik} & 0 \\ Z_{ik} & 0 \end{matrix} \right\}_{O, (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$
La forme de ce torseur est valable en tout point de l'axe (O, \vec{x}) et dans toute base ayant le vecteur unitaire \vec{x} comme premier vecteur.	La forme de ce torseur n'est valable qu'au point O. Elle est par contre valable dans toute base.

5.6 Généralisation - remarque concernant la puissance développée dans une liaison parfaite

Les exemples de liaisons traitées ci-dessus nous ont permis de mettre en évidence la méthode générale utilisée pour modéliser globalement les actions mécaniques de liaison entre deux solides.

Le tableau ci-dessous regroupe les torseurs statiques (que nous venons de déterminer) et les torseurs cinématiques (vus dans le chapitre précédent) pour quelques liaisons, en l'absence de frottement :

	Torseurs cinématique	Torseur d'actions mécaniques
Ponctuelle au point O de normale \vec{z}	$\{V(S_k/S_i)\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{O,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	$\{\mathcal{T}(S_i \rightarrow S_k)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{ik} & 0 \end{Bmatrix}_{O,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
Cylindre - plan de direction \vec{y} et normale (O, \vec{z})	$\{V(S_k/S_i)\} = \begin{Bmatrix} 0 & V_x \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{O,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	$\{\mathcal{T}(S_i \rightarrow S_k)\} = \begin{Bmatrix} 0 & L_{ik} \\ 0 & 0 \\ Z_{ik} & 0 \end{Bmatrix}_{O,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
Appui plan de normale \vec{z}	$\{V(S_k/S_i)\} = \begin{Bmatrix} 0 & V_x \\ 0 & V_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{A,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	$\{\mathcal{T}(S_i \rightarrow S_k)\} = \begin{Bmatrix} 0 & L_{ik} \\ 0 & M_{ik} \\ Z_{ik} & 0 \end{Bmatrix}_{A,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
Sphère - cylindre d'axe (O, \vec{x})	$\{V(S_k/S_i)\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{O,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	$\{\mathcal{T}(S_i \rightarrow S_k)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{ik} & 0 \\ Z_{ik} & 0 \end{Bmatrix}_{O,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

En l'absence de frottement, on peut noter qu'à chaque composante nulle du torseur cinématique correspond une composante non nulle du torseur statique, et réciproquement. Ceci se traduit mathématiquement en calculant le comoment des deux torseurs (cf. rappels et compléments mathématiques sur les vecteurs et les torseurs au début du cours de cinématique) :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{T}(S_i \rightarrow S_k)\} \otimes \{V(S_k/S_i)\} &= \begin{Bmatrix} \vec{R}(S_i \rightarrow S_k) \\ \vec{M}(O, S_i \rightarrow S_k) \end{Bmatrix}_O \otimes \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_k/S_i) \\ \vec{V}(O, S_k/S_i) \end{Bmatrix}_O \\ &= \vec{R}(S_i \rightarrow S_k) \cdot \vec{V}(O, S_k/S_i) + \vec{M}(O, S_i \rightarrow S_k) \cdot \vec{\Omega}(S_k/S_i) \end{aligned}$$

Pour tous les cas étudiés ci-dessus, **en l'absence de frottement**, on remarque que **ce comoment est nul**. Or nous verrons l'an prochain que ce comoment correspond à l'expression de la puissance dissipée dans la liaison. Ceci nous permet de caractériser une liaison parfaite (sans frottement) comme étant une liaison dans laquelle il n'y a pas de dissipation de puissance :

$$P = \{\mathcal{T}(S_i \rightarrow S_k)\} \otimes \{V(S_k/S_i)\} = 0$$

En étendant cette définition à toutes les liaisons normalisées vues en cinématique, il est possible d'en déduire rapidement la forme du torseur d'actions mécaniques transmissibles associé à chacune d'elle.

Ces torseurs (ainsi que les torseurs cinématiques) sont regroupés dans le tableau suivant... à connaître (à savoir retrouver) parfaitement ! Les conditions de validités (point et base) sont essentielles à connaître pour simplifier les calculs qui seront menés ultérieurement.

Nb. ddl	Désignation (norme AFNOR)	Caractéristiques géométriques	Schématisation		Torseur cinématique associé, exprimé dans la base $B(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$	Validité du torseur cinématique	Torseur statique associé, exprimé dans la base $B(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$
			2D	3D			
1	Liaison pivot	... d'axe (O, \vec{X})			$\{V(S_k/S_l)\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A,B}$	Valable en tout point de l'axe (O, \vec{X})	$\{T(S_k \rightarrow S_l)\} = \begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{A,B}$
1	Liaison glissière	... de direction \vec{X}			$\{V(S_k/S_l)\} = \begin{Bmatrix} 0 & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A,B}$	Valable en tout point de l'espace	$\{T(S_k \rightarrow S_l)\} = \begin{Bmatrix} 0 & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{A,B}$
1	Liaison hélicoïdale	... d'axe (O, \vec{X})			$\{V(S_k/S_l)\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A,B}$ $V_x = \pm \omega_x \cdot \frac{p}{2\pi}$	Valable en tout point de l'axe (O, \vec{X})	$\{T(S_k \rightarrow S_l)\} = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{A,B}$ $L = \pm X \cdot \frac{p}{2\pi}$
2	Liaison pivot glissant	... d'axe (O, \vec{X})			$\{V(S_k/S_l)\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A,B}$	Valable en tout point de l'axe (O, \vec{X})	$\{T(S_k \rightarrow S_l)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{A,B}$

2	Liaison sphérique à doigt	... de centre O, avec rainure dans le plan (O, \vec{Y}, \vec{Z}) et doigt de direction \vec{Z}		$\{V(S_k/S_l)\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{O,B}$	Uniquement valable au point O, centre de la sphère	$\{\mathcal{T}(S_k \rightarrow S_l)\} = \begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_{O,B}$
3	Liaison sphérique (rotule)	... de centre O		$\{V(S_k/S_l)\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{O,B}$	Uniquement valable au point O, centre de la sphère	$\{\mathcal{T}(S_k \rightarrow S_l)\} = \begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_{O,B}$
3	Liaison appui plan	... de normale \vec{Z}		$\{V(S_k/S_l)\} = \begin{Bmatrix} 0 & V_x \\ 0 & V_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{A,B}$	Valable en tout point de l'espace	$\{\mathcal{T}(S_k \rightarrow S_l)\} = \begin{Bmatrix} 0 & L \\ 0 & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_{A,B}$
4	Liaison sphère-cylindre (linéaire annulaire)	... d'axe (O, \vec{X})		$\{V(S_k/S_l)\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{O,B}$	Uniquement valable au point O, centre de la sphère	$\{\mathcal{T}(S_k \rightarrow S_l)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_{O,B}$
4	Liaison cylindre-plan (linéaire rectiligne)	... de direction (O, \vec{Y}) et de normale \vec{Z}		$\{V(S_k/S_l)\} = \begin{Bmatrix} 0 & V_x \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{A,B}$	Valable en tout point du plan (O, \vec{Y}, \vec{Z})	$\{\mathcal{T}(S_k \rightarrow S_l)\} = \begin{Bmatrix} 0 & L \\ 0 & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_{A,B}$
5	Liaison sphère-plan (ponctuelle)	... de centre O et de normale \vec{Z}		$\{V(S_k/S_l)\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{A,B}$	Valable en tout point de l'axe (O, \vec{Z})	$\{\mathcal{T}(S_k \rightarrow S_l)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_{A,B}$