

1. Contexte

Surplombant le Parc Walt Disney Studios® du haut de ses treize étages, « *La Tour de la Terreur : Un Saut dans la Quatrième Dimension™* » pousse les visiteurs à oublier la réalité et à entrer dans le Hollywood Tower Hotel pour y faire une chute de plusieurs dizaines de mètres.

L'objet de cette étude est l'ascenseur de cette attraction, qui, depuis janvier 2008, plusieurs dizaines de fois par jour, fait frissonner de peur une vingtaine de passagers dans des conditions de sécurité optimale.

Objectif :

L'objectif du sujet est de valider partiellement la réalisation de cette prestation en analysant deux des phases de vie : la chute pendant laquelle la cabine de l'ascenseur est accélérée ou décélérée par un moteur électrique de forte puissance et l'arrêt d'urgence pendant laquelle la cabine est immobilisée par des freins.



La prestation est réalisée dans différentes phases du cycle de vie, et notamment lors de la chute libre de l'ascenseur ou lors de son arrêt d'urgence. Le diagramme des exigences figure 1 détaille les performances attendues de cette attraction.

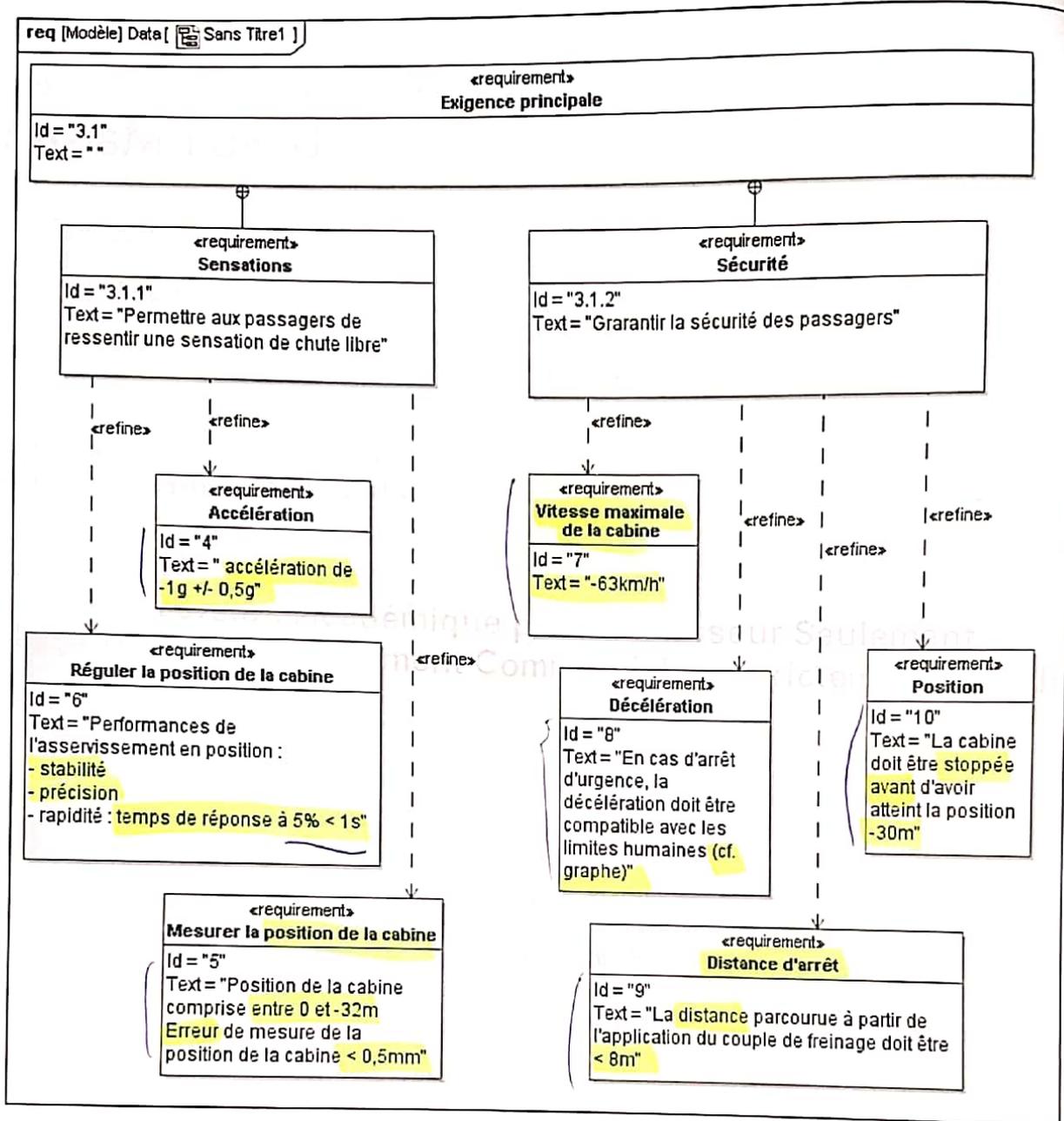
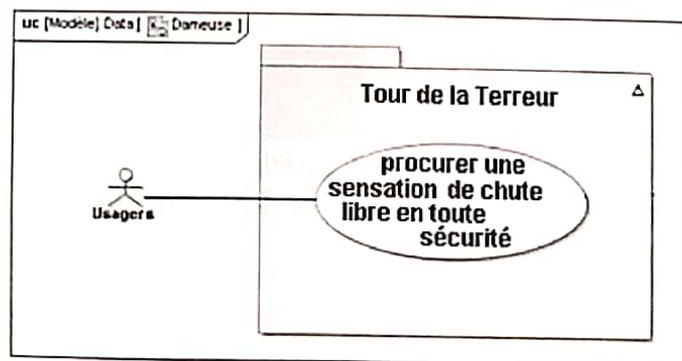


Fig. 1 : diagrammes des exigences - Tour de la Terreur

Le diagramme de cas d'utilisation du système « Tour de la terreur » dans la phase de fonctionnement en parc d'attraction est proposé ci-dessous.



La figure 2 représente l'évolution de l'accélération/décélération maximale que peut supporter le corps humain.

- La décélération maximale (en valeur absolue) tolérée pendant une durée inférieure à 0,3s est de 5.g ;
- Si la durée pendant laquelle le corps humain est soumis à la décélération augmente, la valeur supportée est plus faible et suit la courbe de la figure 2.

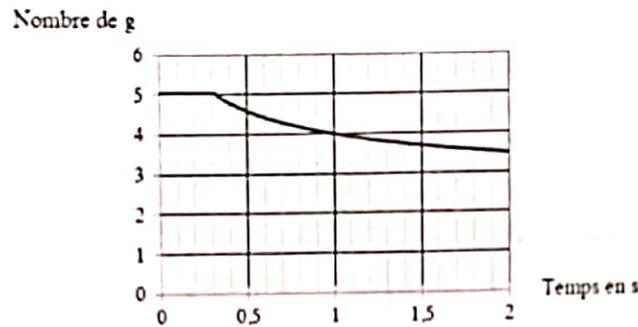


Fig. 2 : tolérance du corps humain à l'accélération en fonction de la durée ($1.g = 9,8m.s^{-2}$)

2. Analyse structurelle de l'ascenseur

La cabine d'ascenseur (figure 3) est suspendue à un câble porteur qui s'enroule sur un tambour relié à un moteur électrique par un accouplement. Un contrepoids est également suspendu à un câble porteur qui s'enroule sur un tambour coaxial au tambour de la cabine auquel il est lié cinématiquement. La cabine et le contrepoids sont reliés par un câble secondaire qui s'enroule sans glisser sur deux poulies d'axe parallèle guidées en rotation dans la partie basse de l'attraction.

Le schéma de la figure 3 permet d'identifier l'organisation structurelle des composants.

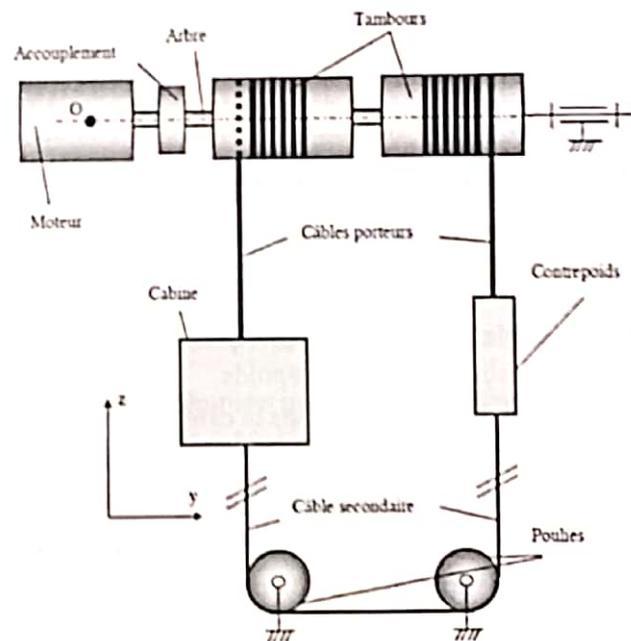


Fig. 3 : motorisation de la cabine

Données géométriques :

- Le repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, avec le point O situé sur l'axe de rotation du moteur, est utilisé dans tout le sujet et est supposé galiléen.
- Rayon d'enroulement du câble sur les tambours : $R_t = 0,63m$
- Hauteur de la trajectoire de la cabine : $h = 50m$

Qu. 1 : quelle est la fonction du câble secondaire (figure 3) ?

3. Validation des exigences de sécurité en cas de freinage d'urgence

L'objet de cette partie est de valider les critères de performance relatifs à la sécurité des passagers lors d'un arrêt d'urgence, plus particulièrement l'exigence 8 du diagramme des exigences : « En cas d'arrêt d'urgence, la décélération doit être compatible avec les limites humaines ».

Le système de freinage prévu pour arrêter la cabine est composé de quatre freins à tambour (figure 4).

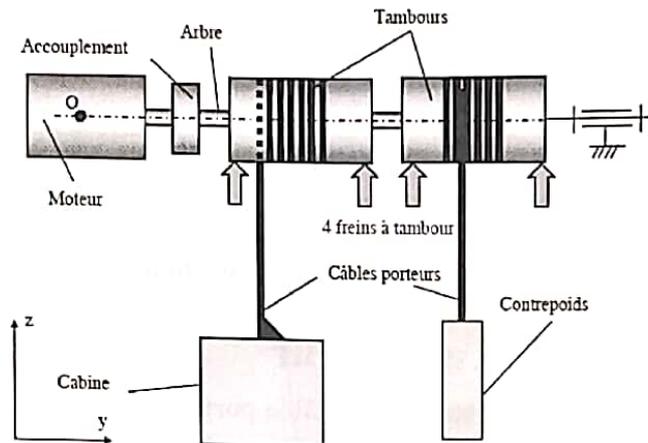


Fig. 4 : position des freins à tambour

Pour la phase de vie étudiée, la caractérisation des composants est donnée ci-dessous :

- masse de la cabine : $M_{cab} = 8460\text{kg}$ (21 passagers) ;
- masse du contrepoids : $M_{cp} = 4360\text{kg}$;
- vitesse maximale de la cabine vers le bas $V_{max} = -63\text{km/h}$;
- effet du freinage des freins à tambour modélisé par un couple $M_f = +270000\text{N.m}$.
- le couple maximum des freins à tambour est appliqué lorsque la cabine atteint la position -30m .

3.1 Première modélisation : câbles indéformables

Dans cette première partie les hypothèses retenues sont les suivantes :

- les câbles sont considérés comme inextensibles et leur masse est négligeable par rapport aux masses de la cabine et du contrepoids
- on note T_B la tension dans le câble reliant le contrepoids et le tambour ($T_B > 0$, en Newton)
- on note T_A la tension dans le câble reliant la cabine et le tambour ($T_A > 0$, en Newton)
- on note T_C et T_D les tensions dans le câble secondaire, avec $T_C = T_D$ ($T_C > 0$ et $T_D > 0$, en Newton)
- on note $\vec{\Gamma}_{cab} = \Gamma_{cab} \cdot \vec{z}$ l'accélération verticale de la cabine par rapport au repère R et $\vec{\Gamma}_{cp} = \Gamma_{cp} \cdot \vec{z}$ l'accélération verticale du contrepoids

On cherche à calculer la décélération subie par les passagers lors du freinage d'urgence. Pour ceci, il est nécessaire de mettre en place une étude dynamique du système.

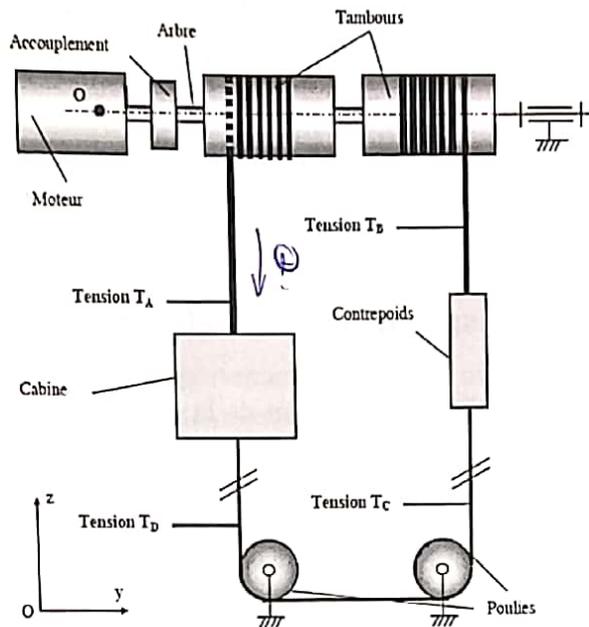


Fig. 6 : première modélisation - les câbles sont tous considérés comme indéformables

Pour relier les tensions T_A et T_B dans les deux câbles porteurs, on isole l'axe moteur équipé des deux tambours et on applique à ce système le principe fondamental de la dynamique (ou seconde loi de Newton - dans le cas d'un système en rotation). On aboutit à la relation suivante :

$$J_{eq} \frac{d\omega_m}{dt} = M_f + (T_B - T_A) \cdot R_t$$

avec :

- $J_{eq} = 1960 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, moment d'inertie équivalent autour de l'axe moteur
- $M_f = +270000 \text{ N} \cdot \text{m}$, couple de freinage appliqué par les quatre freins à tambour
- ω_m , vitesse de rotation de l'axe moteur (et des tambours) par rapport au repère R (en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$)

équation (1)

Qu. 2 : les câbles étant considérés comme inextensibles, déterminer la longueur de câble enroulée pour chaque tour de tambour.

On précise que si le tambour a une vitesse de rotation positive, le contrepoids descend et la cabine monte.

Qu. 3 : à partir de la réflexion menée à la question précédente, donner une relation entre la vitesse de rotation des tambours ω_m et la vitesse de translation de la cabine v_{cab} . Préciser les unités des grandeurs physiques mises en jeu.

Qu. 4 : en déduire l'expression de l'accélération de la cabine Γ_{cab} en fonction de l'accélération angulaire des tambours $\frac{d\omega_m}{dt}$.

Qu. 5 : toujours sous l'hypothèse de câbles inextensibles déterminer la relation entre l'accélération du contrepoids Γ_{cp} et l'accélération de la cabine Γ_{cab} .

Qu. 6 : en isolant la cabine et en réalisant le bilan des actions mécaniques extérieures appliquées à cette dernière, déterminer une relation entre l'accélération de la cabine Γ_{cab} , sa masse M_{cab} et les tensions T_A et T_D (relation scalaire).

Un raisonnement similaire sur le contrepoids permet d'obtenir l'équation (2) :

$$M_{cp} \cdot \Gamma_{cp} = T_B - T_C - M_{cp} \cdot g \quad (2)$$

Qu. 7 : en utilisant les équations (1) et (2) et celles obtenues aux questions précédentes, déterminer l'expression de l'accélération de la cabine lors du déclenchement du freinage d'urgence en fonction de M_{cab} , M_{cp} , M_f , R_t et J . Effectuer l'application numérique et conclure.

Compte tenu des efforts mis en jeu dans cette phase de vie, les câbles porteurs vont en fait présenter un allongement non négligeable. Leur comportement élastique ne peut pas être négligé et un second modèle de calcul doit être mis en place.

3.2 Deuxième modélisation : câbles déformables

L'objet de cette partie est de simuler le comportement de la cabine en tenant compte du comportement élastique des câbles porteurs. Ils sont modélisés par des ressorts de raideur K_{cable} (figure 7) dont l'allongement est noté Δz_{cable} et défini positivement, avec $\Delta z_{cable} = 0$ à l'équilibre.

De plus la modélisation des câbles porteurs tient compte de l'amortissement généré par le matériau du câble et de l'amortissement dans le guidage de la cabine par rapport au bâti (figure 7).

Le comportement élastique de chaque brin de câble tendu dépend de sa longueur tendue ; ainsi la raideur et le coefficient d'amortissement de chaque brin ne sont pas constants au cours du temps.

Le câble secondaire s'enroule sans glisser sur les poulies et celles-ci ont une inertie non négligeable.

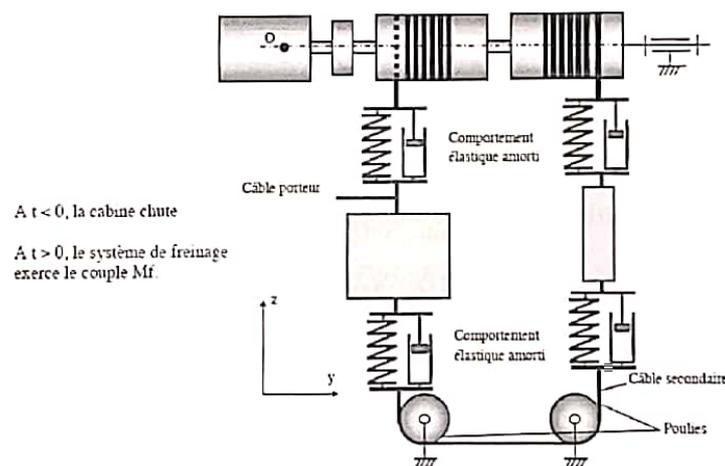


Fig. 7 : deuxième modélisation – prise en compte du comportement élastique des câbles

La modélisation décrite ci-dessus permet d'obtenir l'évolution temporelle de la position, de la vitesse et de l'accélération de la cabine. Ces trois grandeurs sont tracées en fonction du temps sur la figure 8.

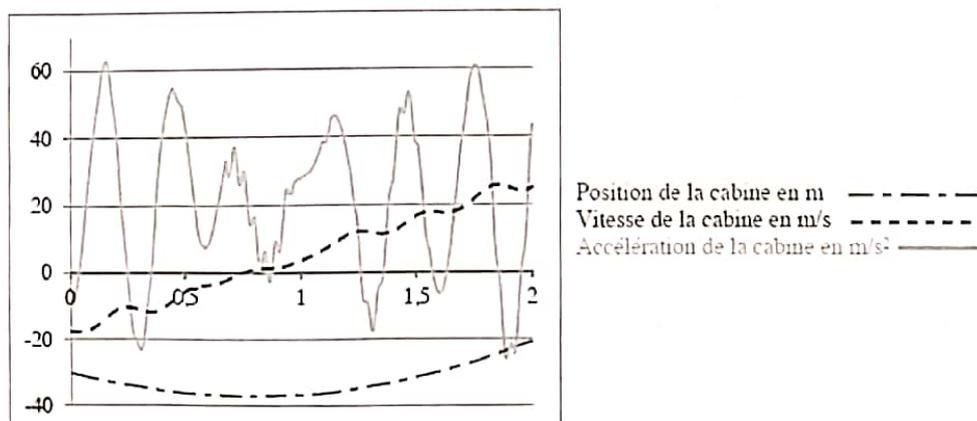


Fig. 8 : résultats de simulation obtenus avec la deuxième modélisation

Qu. 8 : au vu des résultats présentés figure 8, le système conçu répond-il aux exigences définies dans le diagramme des exigences de la figure 2 ? (votre réponse doit être soigneusement justifiée)

3.3 Troisième modélisation : ajout d'un ressort-amortisseur

L'étude précédente a montré que les performances de cet ascenseur ne sont pas satisfaisantes avec la conception retenue. Un ressort-amortisseur est alors ajouté au niveau du support des deux poulies inférieures.

L'objet de cette partie est de simuler le comportement de la cabine avec ce nouveau composant (figure 9) ; la modélisation des autres composants reste identique à celle de l'étude précédente.

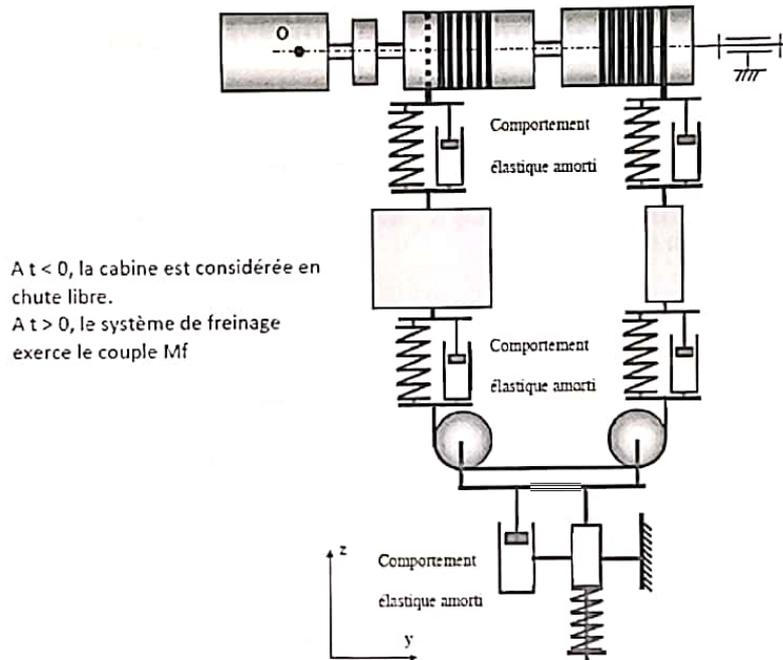


Fig. 9 : troisième modélisation - ajout d'un ressort-amortisseur

Les résultats de simulation avec cette nouvelle modélisation sont présentés figure 10.

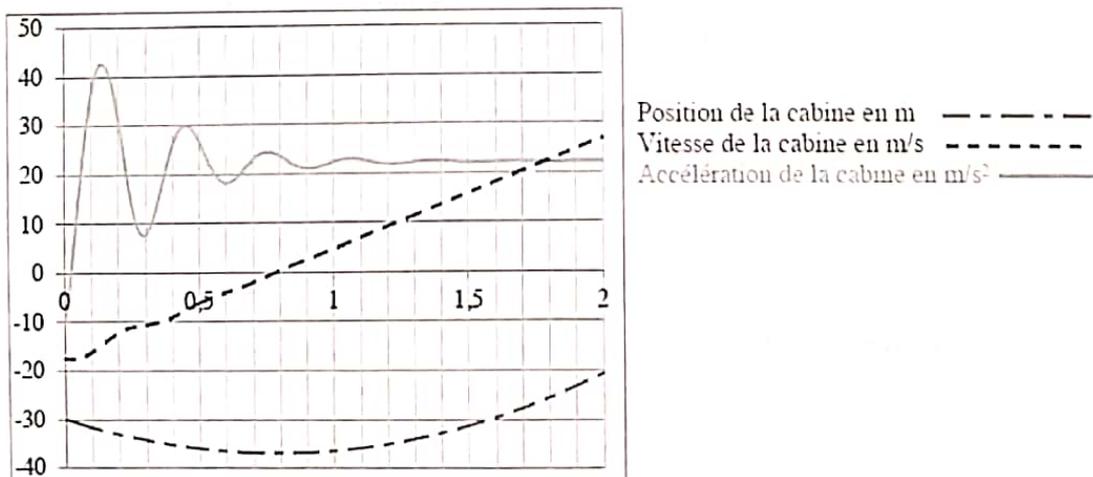


Fig. 10 : résultats de simulation obtenus avec la deuxième modélisation

Qu. 9 : le système avec ressort-amortisseur répond-il aux exigences définies dans le diagramme des exigences de la figure 2 ? (justifier de nouveau votre réponse)

4. Validation des critères de performance relatifs à la sensation de chute libre

L'objet de cette partie est de valider les critères de performance relatifs à la sensation de chute libre ressentie par les passagers.

Pour garantir un niveau de performance élevé, les concepteurs de cet ascenseur ont choisi d'asservir la position de la cabine pour mieux contrôler son accélération.

4.1 Exigence 6 « Réguler la position de la cabine »

Les différentes sous-parties de cette partie peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Paramétrage :

- $c_m(t)$: couple moteur
- $\omega_m(t)$: vitesse de rotation du moteur
- R_t : rayon d'enroulement du câble porteur sur les tambours en m
- $T_i(t)$: tension dans les câbles (> 0)
- $z_{cab}(t)$: position de la cabine
- $z_{cp}(t)$: position du contrepoids
- J_{eq} : moment d'inertie équivalent du système autour de l'axe moteur (y compris cabine et contrepoids)
- K_{mes} : gain du capteur de position de la cabine

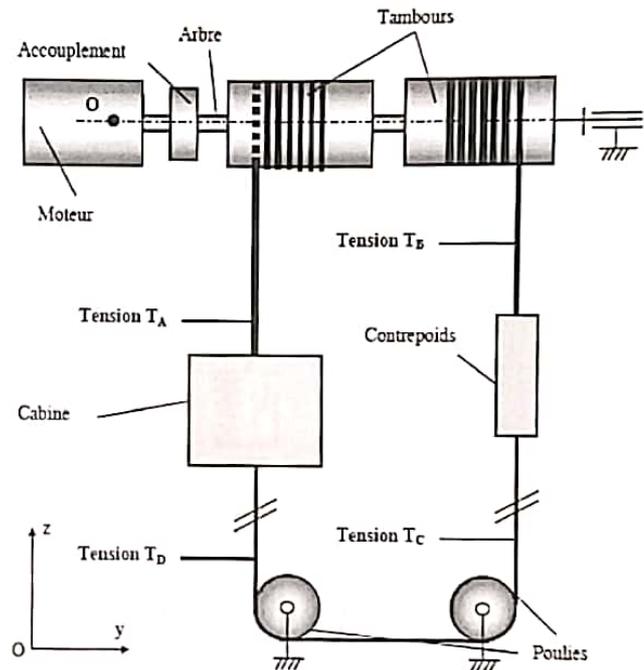


Fig. 13 : motorisation de la cabine

4.1.1 Modélisation du comportement du moteur

- équation électrique : $u(t) - e(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt}$
- équations de couplage magnétique :

$$c_m(t) = k_c \cdot i(t) \quad \text{et} \quad e(t) = k_e \cdot \omega_m(t)$$

- équation mécanique :

$$c_m(t) - c_r(t) - f_v \cdot \omega_m(t) = J_{eq} \cdot \frac{d\omega_m(t)}{dt}$$

- $R = 10 \Omega$
- $L = 2,2 \text{ mH}$ (le Henry « H » est l'unité SI de l'inductance d'une bobine)
- $f_v = 0,04 \text{ N.m.s.rad}^{-1}$
- $k_c = 2,1 \text{ N.m.A}^{-1}$
- $k_e = 2,1 \text{ V.rad}^{-1} \cdot \text{s}$
- $J_{eq} = 7 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2$

On pose les notations suivantes :

Grandeur physique temporelle	Transformée de Laplace associée
$u(t)$ en [V]	$U(p)$
$e(t)$ en [V]	$E(p)$
$i(t)$ en [A]	$I(p)$
$c_m(t)$ en [N.m]	$C_m(p)$
$c_r(t)$ en [N.m]	$C_r(p)$
$\omega_m(t)$ en [rad.s ⁻¹]	$\Omega_m(p)$
$z_{cab}(t)$ en [m]	$Z_{cab}(p)$

On fera l'hypothèse que toutes les fonctions temporelles définies ci-dessus sont à conditions initiales nulles.]

Qu. 10 : écrire la transformée de Laplace des 4 équations ci-dessus (en utilisant les notations imposées).

Qu. 11 : sur le document réponse DREP2, compléter, à partir des équations précédentes, le schéma-bloc modélisant le comportement du moteur.

Qu. 12 : dans le cas $C_r(p) = 0$, recopier le schéma bloc sur votre copie et exprimer la fonction de transfert $H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)}$ du moteur.

Qu. 13 : déterminer les pôles p_1 et p_2 de $H_m(p)$, avec $p_1 < p_2$. Conclure sur la stabilité du moteur.

Lorsque la tension est un échelon $u(t) = u_0 \cdot \mathcal{H}(t)$, $\Omega_m(p)$ peut alors s'écrire sous la forme $\Omega_m(p) = \frac{A}{(p-p_1)(p-p_2)} \cdot U(p) = \frac{\alpha}{p-p_1} + \frac{\beta}{p-p_2} + \frac{\gamma}{p}$ où $\alpha, \beta, \gamma, u_0$ et A sont des réels.

Qu. 14 : déterminer trois équations permettant de relier α, β et γ à p_1, p_2, u_0 et A uniquement.

Qu. 15 : déduire par transformée inverse de Laplace l'expression de $\omega_m(t)$. Elle se présentera comme somme de trois fonctions $\omega_m(t) = \omega_{m0}(t) + \omega_{m1}(t) + \omega_{m2}(t)$.

Qu. 16 : connaissant les valeurs numériques de p_1 et p_2 , donner une expression approchée $\omega_{m,app}(t)$ de $\omega_m(t)$. Mettez en place un critère d'approximation de fonction de transfert, basé sur un raisonnement sur les parties réelles de ses pôles.

Le moteur peut alors se modéliser par le modèle approché $H_{m,app}(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)} = \frac{K_m}{1+\tau_m p}$.

Qu. 17 : sachant que $H_m(p)$ et $H_{m,app}(p)$ doivent avoir le même gain statique, exprimer les constantes K_m et τ_m en fonction de A, p_1 et p_2 .

Cette fonction de transfert sera utilisée pour la suite du problème. Tous les résultats seront exprimés sous forme littérale en fonction des constantes K_m et τ_m .

4.1.2 Description structurelle de l'asservissement en position de la cabine

A partir de la consigne en position, notée $z_{cons}(t)$, une interface de pilotage génère une tension de consigne $u_c(t)$ en volts, telle que $u_c(t) = K_{int} \cdot z_{cons}(t)$. Cette tension de consigne est comparée à la tension mesurée $u_m(t)$, issue du capteur de position précédemment étudié. Cette tension $u_m(t)$ est donc proportionnelle à la position de la cabine. Le capteur a un gain K_{mes} , il est tel $u_m(t) = 0$ quand la

cabine est dans sa position de référence (soit $z_{cab}(t) = 0$) et $u_m(t) = 5V$ quand la cabine est au plus haut (soit $z_{cab}(t) = 50m$).

L'écart entre la tension de consigne et la tension mesurée est noté $\varepsilon(t)$ et est envoyé vers un correcteur-amplificateur, qui génère alors une tension de consigne $u(t)$ à destination du moteur.

Le moteur est alors mis en rotation avec une vitesse de rotation $\omega_m(t)$. Le comportement du moteur est décrit par sa fonction de transfert reliant la tension de consigne et la vitesse de rotation, dans le domaine de Laplace $H_m(p)$.

La rotation du moteur entraîne le tambour et l'enroulement du câble va déplacer la cabine d'une hauteur $z_{cab}(t)$.

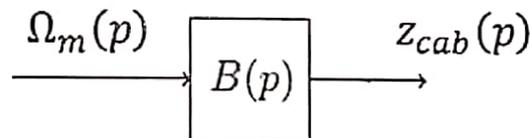
Qu. 18 : compléter la description du système d'asservissement en position de la cabine donné sur le document réponse DREP1 (nom des composants et/ou fonctions réalisées et flux échangés).

Qu. 19 : préciser la grandeur asservie et la grandeur de consigne du système étudié ici. Proposer, sous forme d'un schéma-blocs fonctionnel, un modèle de comportement de ce système. Vous ferez apparaître sur ce schéma les différentes grandeurs mises en jeu, leurs unités et les noms des différents composants.

Qu. 20 : déterminer en justifiant votre réponse la relation entre K_{mes} et K_{int} .

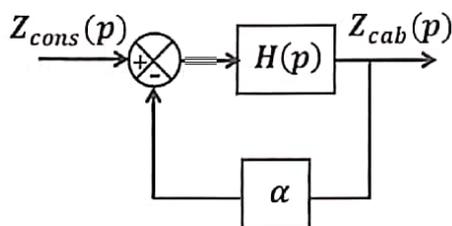
Qu. 21 : écrire, dans le domaine temporel, une relation mathématique entre la vitesse de translation $v_{cab}(t)$ de la cabine et sa position $z_{cab}(t)$. En déduire une relation entre les transformées de Laplace de ces deux grandeurs ($V_{cab}(p)$ et $Z_{cab}(p)$).

Qu. 22 : en utilisant la relation obtenue à la question 3 et la réponse à la question précédente, déterminer la fonction $B(p)$ permettant de compléter l'extrait de schéma-bloc suivant :



4.1.3 Validation des performances du système

Pour la suite de l'étude et quels que soient les résultats obtenus aux parties précédentes, on retiendra le schéma-bloc suivant comme modèle de comportement du système :



$$H(p) = \frac{K}{p(1 + \tau \cdot p)}$$

Avec K , τ et α des constantes positives

telles que $1 - 4 \cdot \tau \cdot K \cdot \alpha > 0$

Dans un premier temps, le correcteur-amplificateur est choisi tel que $C(p) = 1$.

Qu. 23 : déterminer les expressions de K , τ et α en fonction de K_{mes} , K_m , τ_m et R_t .

Qu. 24 : déterminer l'expression de la fonction de transfert globale $H_G(p) = \frac{Z_{cab}(p)}{Z_{cons}(p)}$ du système d'asservissement en position de la cabine en fonction de K , τ et α . Présenter cette fonction de

transfert sous forme canonique et préciser son gain statique, son ordre et sa classe. Donner l'expression du (des) pôle(s) de cette fonction.

Les hypothèses simplificatrices posées précédemment sont en fait trop restrictives pour que le calcul de cette réponse puisse être utilisé pour valider le comportement du système. L'étude du système complet, avec prise en compte du couple résistant et de l'impédance du moteur étant impossible à mener analytiquement en début de première année de CPGE, le comportement a été prédit grâce à un logiciel de simulation.

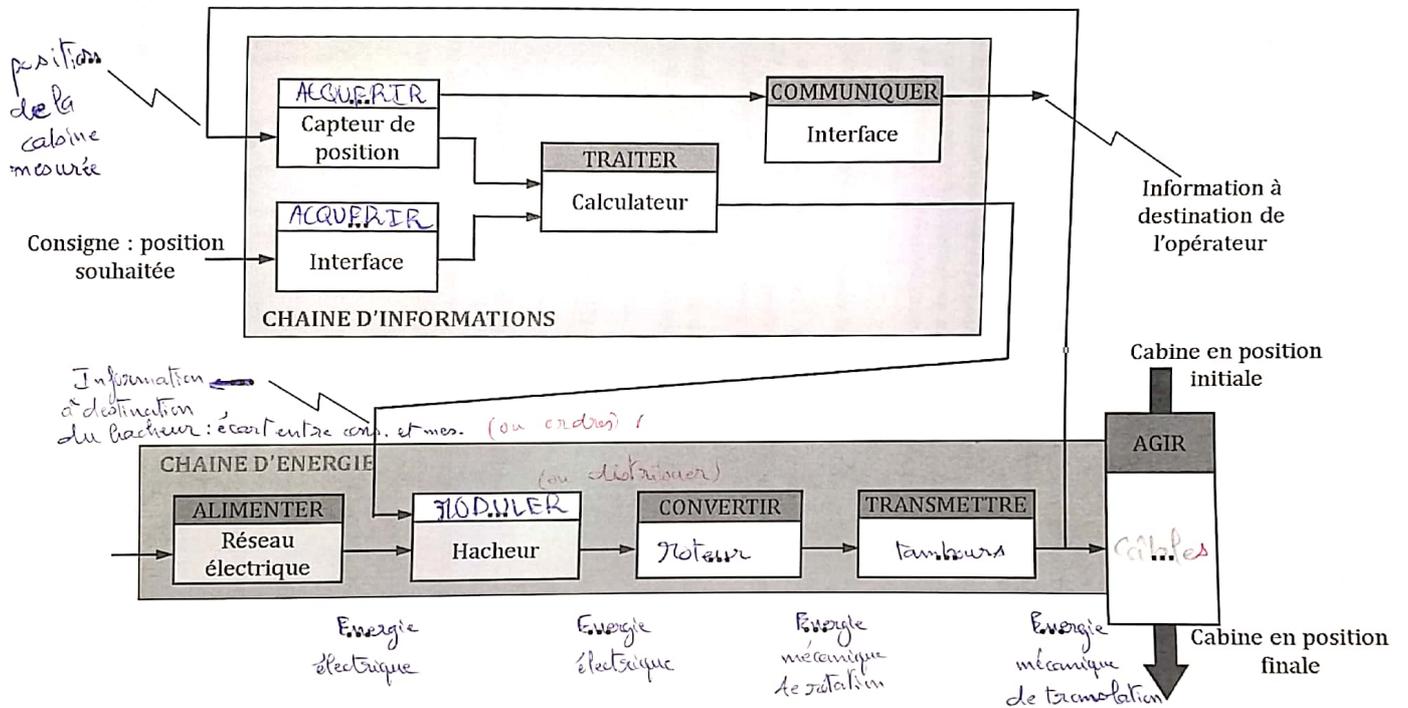
L'évolution temporelle de la position de la cabine $z_{cab}(t)$ est tracée en réponse à une consigne de position constante sur le document réponse DREP 3 pour différents choix de correcteurs.

Qu. 25 : compléter le tableau situé sur le document réponse DREP3 et conclure sur le choix d'un correcteur adapté aux exigences définies sur la figure 2. Tous les tracés nécessaires seront laissés apparents sur le document réponse.

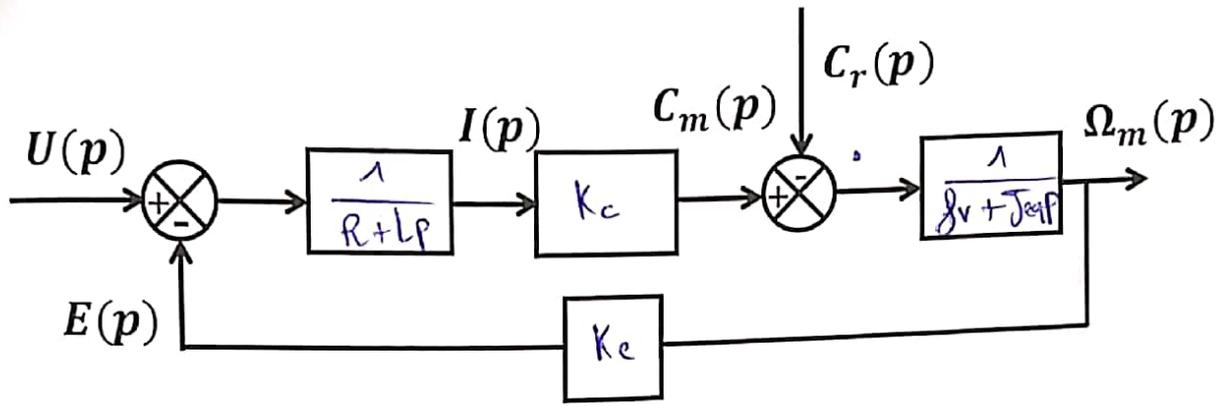
Document Réponse 1 :

Nom, prénom : RAHJOUB Rayen

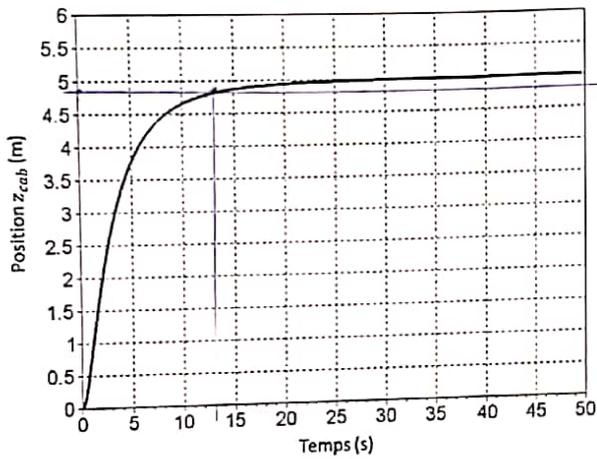
DREP1 : Chaines d'information et d'énergie du système d'asservissement en position de la cabine



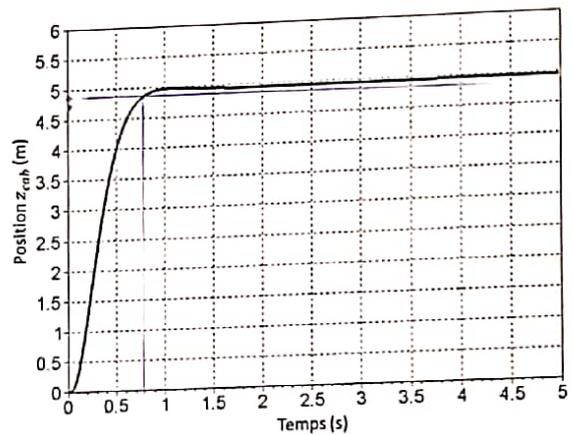
DREP2 : Schéma modélisant le comportement du moteur



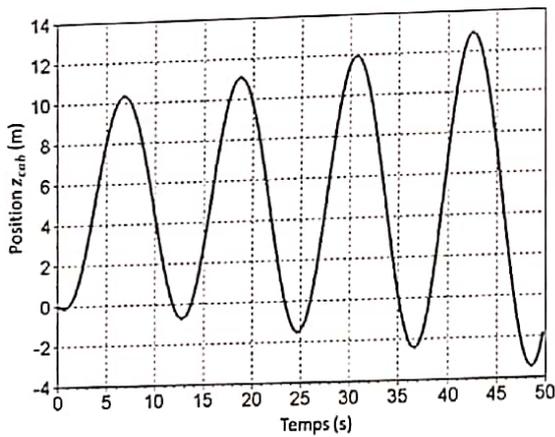
DREP3 : Réponses du système à une consigne constante d'amplitude 5m pour différents types de correcteurs



Correcteur 1



Correcteur 2



Correcteur 3

	Correcteur 1	Correcteur 2	Correcteur 3
Stabilité (oui/non?)	Oui	Oui	non
Erreur statique	0	0 ⁺ <i>(un peu plus qu'0)</i>	Très grande
t _{r5%} (en s)	13s	0,8s	X
Dépassement relatif (en %)	0%	0 ⁺ %	grand

Sciences industrielles pour l'ingénieur

Devoir Maison n°1

La tour de la terreur

CORRIGE

Qu. 1 : quelle est la fonction du câble secondaire (figure 3) ?

Maintenir les câbles tendus pour maîtriser les accélérations et décélérations de la cabine. Sans le câble secondaire, la cabine pourrait se mettre à osciller après un freinage, ce qui pourrait être dangereux pour les usagers.

Qu. 2 : les câbles étant considérés comme indéformables, déterminer la longueur de câble enroulée pour un tour de tambour.

Lorsque le tambour a fait un tour, une longueur de câble $2 \cdot \pi \cdot R_t$ a été enroulée.

Qu. 3 : à partir de la réflexion menée à la question précédente, donner une relation entre la vitesse de rotation des tambours ω_m (en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$) et la vitesse de translation de la cabine V_{cab} et une relation entre la vitesse de rotation des tambours et la vitesse de translation du contrepoids V_{cp} .

Pour une vitesse de rotation de 1 tour/s, soit une vitesse de $2\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, la vitesse d'enroulement du câble est de $2 \cdot \pi \cdot R_t \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. D'où : $V_{cab} = +R_t \cdot \omega_m$ (car la cabine monte) avec R_t en mètres.

Qu. 4 : en déduire l'expression de l'accélération de la cabine Γ_{cab} en fonction de l'accélération angulaire des tambours $\frac{d\omega_m}{dt}$.

Par dérivation : $\Gamma_{cab} = \frac{dV_{cab}}{dt} = +R_t \cdot \frac{d\omega_m}{dt}$ $\Gamma_{cp} = \frac{dV_{cp}}{dt} = -R_t \cdot \frac{d\omega_m}{dt} = -\Gamma_{cab}$

Qu. 5 : toujours sous l'hypothèse de câbles inextensibles déterminer la relation entre l'accélération du contrepoids Γ_{cp} et l'accélération de la cabine Γ_{cab} .

$$\Gamma_{cp} = \frac{dV_{cp}}{dt} = -R_t \cdot \frac{d\omega_m}{dt} = -\Gamma_{cab}$$

Qu. 6 : en isolant la cabine et en réalisant le bilan des actions mécaniques extérieures appliquées à cette dernière, déterminer une relation entre l'accélération de la cabine Γ_{cab} , sa masse M_{cab} et les tensions T_A et T_D .

La cabine est soumise aux actions mécaniques suivantes :

- action de la pesanteur : $\overrightarrow{P_{cab}} = -M_{cab} \cdot g \cdot \vec{z}$
- actions du câble porteur et du câble secondaire : $\overrightarrow{T_A} = T_A \cdot \vec{z}$ et $\overrightarrow{T_D} = -T_D \cdot \vec{z}$

D'où, en appliquant la seconde loi de Newton à la cabine dans le référentiel supposé galiléen R et en projetant la relation sur l'axe \vec{z} : $M_{cab} \cdot \Gamma_{cab} = T_A - T_D - M_{cab} \cdot g$

Qu. 7 : en utilisant les équations (1) et (2) et celles obtenues aux questions précédentes, déterminer l'expression de l'accélération de la cabine lors du déclenchement du freinage d'urgence en fonction de M_{cab} , M_{cp} , M_f , R_t et J . Effectuer l'application numérique et conclure.

À partir des deux relations précédentes : $T_A - T_B = M_{cab} \cdot \Gamma_{cab} - M_{cp} \cdot \Gamma_{cp} + T_D + M_{cab} \cdot g - T_C - M_{cp} \cdot g$

Or $T_C = T_D$ et d'après la question 6, $\Gamma_{cp} = -\Gamma_{cab}$: $T_A - T_B = \Gamma_{cab} \cdot (M_{cab} + M_{cp}) + g \cdot (M_{cab} - M_{cp})$

Et d'après la relation (1) et la relation entre Γ_{cab} et $\frac{d\omega_m}{dt}$:

$$T_A - T_B = \left[M_f - J_{eq} \cdot \frac{d\omega_m}{dt} \right] \cdot \frac{1}{R_t} = \frac{M_f}{R_t} - J_{eq} \cdot \frac{\Gamma_{cab}}{R_t^2}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \Gamma_{cab} \cdot (M_{cab} + M_{cp}) + g \cdot (M_{cab} - M_{cp}) &= \frac{M_f}{R_t} - J_{eq} \cdot \frac{\Gamma_{cab}}{R_t^2} \\ \Leftrightarrow \Gamma_{cab} \cdot \left[(M_{cab} + M_{cp}) + \frac{J_{eq}}{R_t^2} \right] &= \frac{M_f}{R_t} - g \cdot (M_{cab} - M_{cp}) \\ \Leftrightarrow \Gamma_{cab} &= \frac{\frac{M_f}{R_t} - g \cdot (M_{cab} - M_{cp})}{(M_{cab} + M_{cp}) + \frac{J_{eq}}{R_t^2}} = 22 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \end{aligned}$$

Cette décélération est bien inférieure à $5 \cdot g$. D'après la figure 2 elle peut avoir lieu pendant plus de 2 s.

Qu. 8 : au vu des résultats présentés figure 8, le système conçu répond-il aux exigences définies dans le diagramme des exigences de la figure 2 ? (votre réponse doit être soigneusement justifiée)

La courbe d'accélération de la cabine oscille entre $+6g$ (environ $60 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$) et $-2g$ (environ $-20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$) à une fréquence d'environ 2Hz. Elle dépasse donc la limite donnée par le cahier des charges. De plus, son caractère oscillant va donner des mauvaises sensations aux passagers (successions trop rapide d'accélération et de décélération).

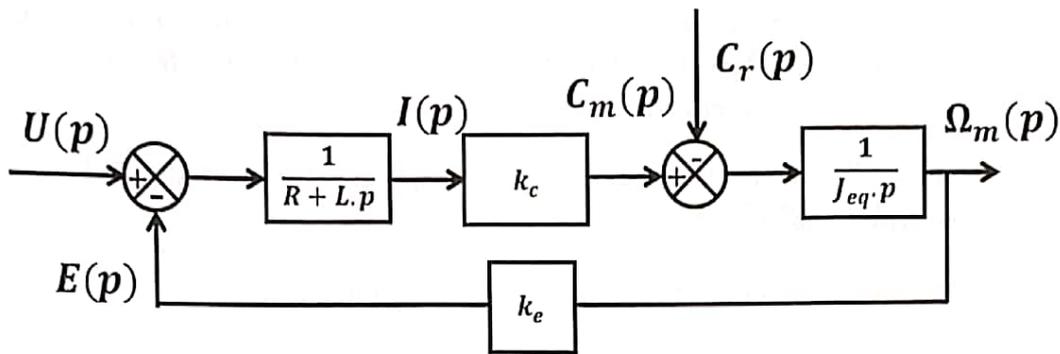
Qu. 9 : le système avec ressort-amortisseur répond-il aux exigences définies dans le diagramme des exigences de la figure 2 ? (justifier de nouveau votre réponse)

D'après les courbes fournies, on remarque que l'accélération ressentie par les passagers ne dépasse pas $4,2g$ (environ $42 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$) et n'est supérieure à $3g$ (environ $30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$) que pendant 0,1s. On est donc bien en dessous des accélérations maximales tolérées par le corps humain. D'autre part, les accélérations sur la cabine et le contrepoids oscillent beaucoup moins. Les câbles seront donc moins soumis à la fatigue.

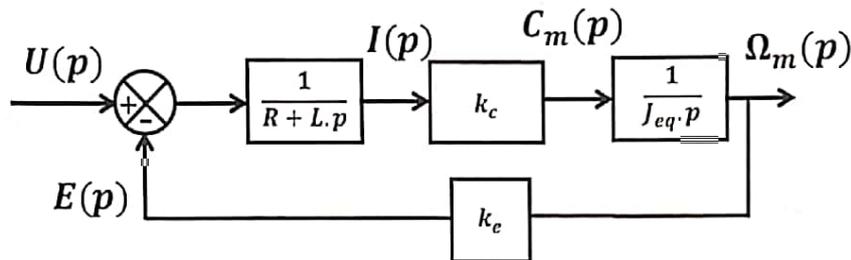
Qu. 10 : écrire la transformée de Laplace des 4 équations ci-dessus (en utilisant les notations imposées).

- équation électrique : $U(p) - E(p) = R \cdot I(p) + L \cdot p \cdot I(p)$
- équations de couplage magnétique : $C_m(p) = k_c \cdot I(p)$ et $E(p) = k_e \cdot \Omega_m(p)$
- équation mécanique : $C_m(p) - C_r(p) = J_{eq} \cdot p \cdot \Omega_m(p)$

Qu. 11 : sur le document réponse DREP2, compléter, à partir des équations précédentes, le schéma-bloc modélisant le comportement du moteur.



Qu. 12 : dans le cas $C_r(p) = 0$, recopier le schéma bloc sur votre copie et exprimer la fonction de transfert $H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)}$ du moteur.



$$H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)} = \frac{1}{\frac{(R + L.p) \cdot J_{eq} \cdot p}{k_c} + k_e}$$

Qu. 13 : déterminer les pôles p_1 et p_2 de $H_m(p)$, avec $p_1 < p_2$. Conclure sur la stabilité du moteur.

$$\Delta = \langle b^2 - 4.a.c \rangle = (R.J_{eq})^2 - 4.L.J_{eq}.k_e.k_c (\approx 4,63.10^{-3} > 0)$$

donc $p_1 = \langle \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2.a} \rangle = \frac{-R.J_{eq} - \sqrt{(R.J_{eq})^2 - 4.L.J_{eq}.k_e.k_c}}{2.L.J_{eq}}$ et $p_2 = \langle \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2.a} \rangle = \frac{-R.J_{eq} + \sqrt{(R.J_{eq})^2 - 4.L.J_{eq}.k_e.k_c}}{2.L.J_{eq}}$ (on a bien $p_1 < p_2$).

$p_1 \approx -4482$ et $p_2 \approx -64$: le moteur est bien un système stable car $Re(p_1) < 0$ et $Re(p_2) < 0$.

Qu. 14 : déterminer trois équations permettant de relier α , β et γ à p_1 , p_2 , u_0 et A uniquement.

$$\Omega_m(p) = \frac{A}{(p - p_1) \cdot (p - p_2)} \cdot \frac{u_0}{p} = \frac{\alpha}{p - p_1} + \frac{\beta}{p - p_2} + \frac{\gamma}{p}$$

$\lim_{p \rightarrow 0} (\Omega_m(p) \cdot p)$ donne l'égalité $\frac{A \cdot u_0}{p_1 \cdot p_2} = \gamma$

$\lim_{p \rightarrow p_1} (\Omega_m(p) \cdot (p - p_1))$ donne l'égalité $\frac{A \cdot u_0}{(p_1 - p_2) \cdot p_1} = \alpha$

$\lim_{p \rightarrow p_2} (\Omega_m(p) \cdot (p - p_2))$ donne l'égalité $\frac{A \cdot u_0}{(p_2 - p_1) \cdot p_2} = \beta$

Qu. 15 : déduire par transformée inverse de Laplace l'expression de $\omega_m(t)$. Elle se présentera comme somme de trois fonctions $\omega_m(t) = \omega_{m0}(t) + \omega_{m1}(t) + \omega_{m2}(t)$.

$\omega_m(t) \approx (\alpha \cdot e^{p_1 \cdot t} + \beta \cdot e^{p_2 \cdot t} + \gamma) \cdot \mathcal{H}(t)$ (alors $\omega_{m0}(t) = \alpha \cdot e^{p_1 \cdot t} \cdot \mathcal{H}(t)$, $\omega_{m1}(t) = \beta \cdot e^{p_2 \cdot t} \cdot \mathcal{H}(t)$ et $\omega_{m2}(t) = \gamma \cdot \mathcal{H}(t)$ par exemple).

Qu. 16 : connaissant les valeurs numériques de p_1 et p_2 , donner une expression approchée $\omega_{m,app}(t)$ de $\omega_m(t)$. Mettez en place un critère d'approximation de fonction de transfert, basé sur un raisonnement sur les parties réelles de ses pôles.

$p_1 \approx 70$, $p_2 (< 0)$ donc $e^{p_1 \cdot t}$ va tendre beaucoup plus rapidement vers 0 que $e^{p_2 \cdot t}$: $\omega_m(t)$ peut s'approcher par $\omega_{m,app}(t) = (\beta \cdot e^{p_2 \cdot t} + \gamma) \cdot \mathcal{H}(t)$.

$p_1 \ll p_2 (< 0)$ signifie que p_2 peut être considéré comme le pôle dominant.

Plus généralement, un pôle p_i est dominant devant un pôle p_j lorsque $Re(p_i) \gg Re(p_j)$. Pour rappel, un système est stable ssi la partie réelle de chacun de ses pôles est strictement négative. On peut donc conclure que plus la partie réelle d'un pôle est proche de 0, plus ce pôle aura de l'influence !

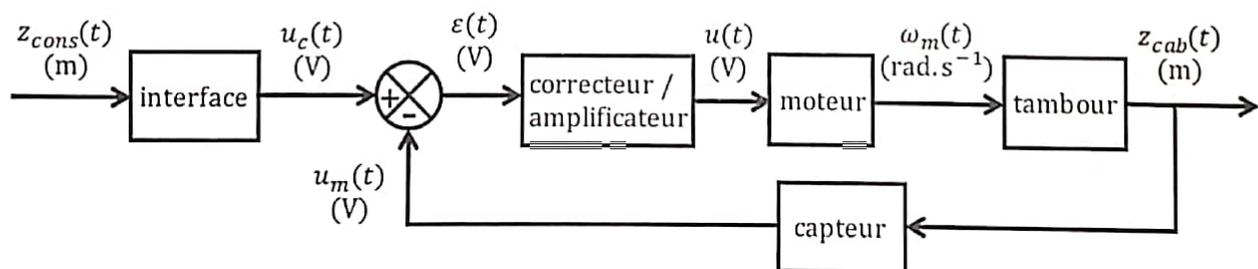
Qu. 17 : sachant que $H_m(p)$ et $H_{m,app}(p)$ doivent avoir le même gain statique, exprimer les constantes K_m et τ_m en fonction de A , p_1 et p_2 .

La fonction de transfert $H_m(p) = \frac{A}{(p-p_1) \cdot (p-p_2)} = \frac{A \cdot \tau_1 \cdot \tau_2}{(1+\tau_1 \cdot p) \cdot (1+\tau_2 \cdot p)}$ (en posant $\tau_1 = -\frac{1}{p_1}$ et $\tau_2 = -\frac{1}{p_2}$) peut alors s'approcher par la fonction $H_{m,app}(p) = \frac{A \cdot \tau_1 \cdot \tau_2}{1+\tau_2 \cdot p} = \frac{\frac{A}{p_1 \cdot p_2}}{1-\frac{p}{p_2}}$ donc $K_m = \frac{A}{p_1 \cdot p_2} = A \cdot \tau_1 \cdot \tau_2$ et $\tau_m = -\frac{1}{p_2} = \tau_2$.

Qu. 18 : compléter la description du système d'asservissement en position de la cabine donné sur le document réponse DREP1 (nom des composants et/ou fonctions réalisées). Cf. DREP

Qu. 19 : préciser la grandeur asservie et la grandeur de consigne du système étudié ici. Proposer, sous forme d'un schéma-blocs fonctionnel, un modèle de comportement de ce système. Vous ferez apparaître sur ce schéma les différentes grandeurs mises en jeu, leurs unités et les noms des différents composants.

Asservissement de la position $z_{cab}(t)$, de consigne $z_{cons}(t)$.



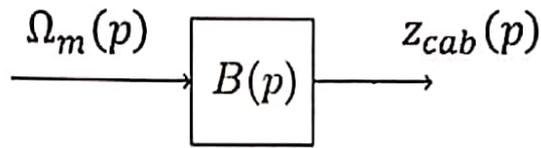
Qu. 20 : déterminer en justifiant votre réponse la relation entre K_{mes} et K_{int} .

Il faut que $\epsilon(t) = 0$ lorsque $z_{cons}(t) = z_{cab}(t)$ donc $K_{mes} = K_{int}$.

Qu. 21 : écrire, dans le domaine temporel, une relation mathématique entre la vitesse de translation $v_{cab}(t)$ de la cabine et sa position $z_{cab}(t)$. En déduire une relation entre les transformées de Laplace de ces deux grandeurs ($V_{cab}(p)$ et $Z_{cab}(p)$).

$$V_{cab}(t) = \frac{dz_{cab}(t)}{dt} \Leftrightarrow V_{cab}(p) = p \cdot Z_{cab}(p)$$

Qu. 22 : en utilisant la relation obtenue à la question 3 et la réponse à la question précédente, déterminer la fonction $B(p)$ permettant de compléter l'extrait de schéma-bloc suivant :

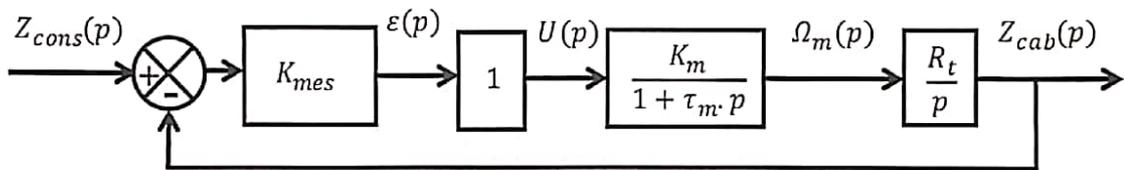
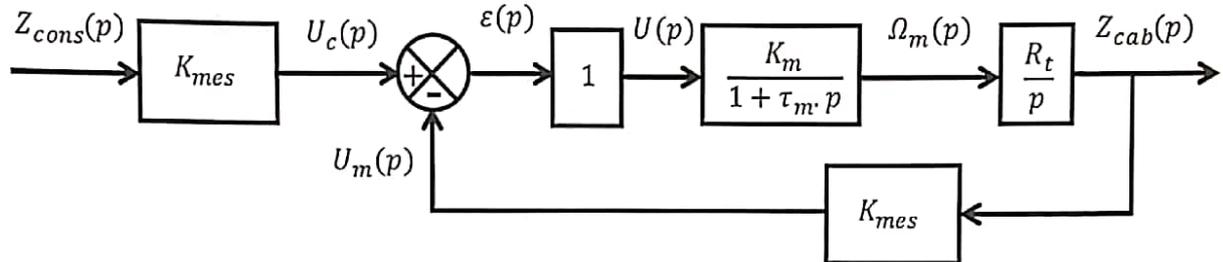


On avait obtenu : $v_{cab}(t) = R_t \cdot \omega_m(t) \Leftrightarrow V_{cab}(p) = R_t \cdot \Omega_m(p)$

Donc $V_{cab}(p) = p \cdot Z_{cab}(p) = R_t \cdot \Omega_m(p)$, soit :

$$B(p) = \frac{Z_{cab}(p)}{\Omega_m(p)} = \frac{R_t}{p}$$

Qu. 23 : déterminer les expressions de K , τ et α en fonction de K_{mes} , K_m , τ_m et R_t .



$$K = K_{mes} \cdot K_m \cdot R_t ; \tau = \tau_m ; \alpha = 1$$

Qu. 24 : déterminer l'expression de la fonction de transfert globale $H_G(p) = \frac{Z_{cab}(p)}{Z_{cons}(p)}$ du système d'asservissement en position de la cabine en fonction de K , τ et α . Présenter cette fonction de transfert sous forme canonique et préciser son gain statique, son ordre et sa classe. Donner l'expression du (des) pôle(s) de cette fonction.

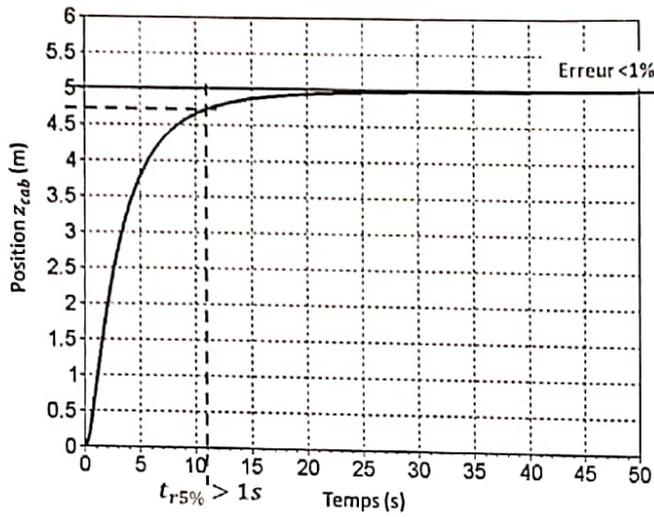
$$H_G(p) = \frac{1}{\frac{1}{K \cdot \alpha} + \alpha} = \frac{1}{\frac{p(1 + \tau \cdot p)}{K} + \alpha} = \frac{\frac{1}{\alpha}}{\frac{p(1 + \tau \cdot p)}{K \cdot \alpha} + 1}$$

Gain statique $\frac{1}{\alpha}$; ordre 2 ; classe 0.

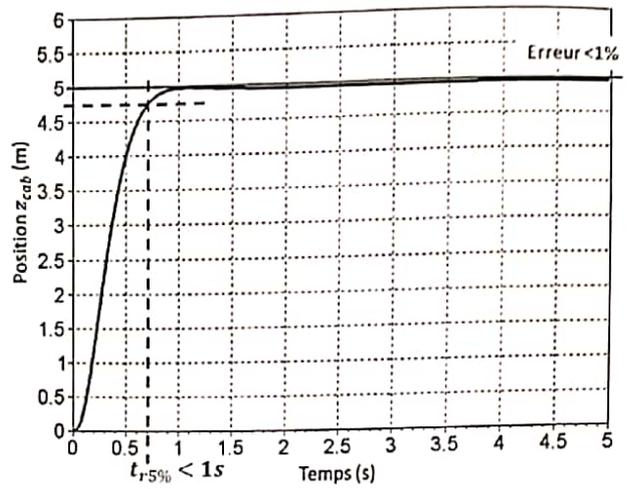
$$\text{Calcul des pôles : } \Delta = "b^2 - 4 \cdot a \cdot c" = \left(\frac{1}{K \cdot \alpha}\right)^2 - 4 \cdot \frac{\tau}{K \cdot \alpha} \cdot 1 = \left(\frac{1}{K \cdot \alpha}\right) \cdot \left(\frac{1}{K \cdot \alpha} - 4 \cdot \tau\right) > 0$$

$$\text{Donc } p_1 = \frac{K \cdot \alpha}{2 \cdot \tau} \left(-\frac{1}{K \cdot \alpha} - \sqrt{\Delta}\right) \text{ et } p_2 = \frac{K \cdot \alpha}{2 \cdot \tau} \left(-\frac{1}{K \cdot \alpha} + \sqrt{\Delta}\right)$$

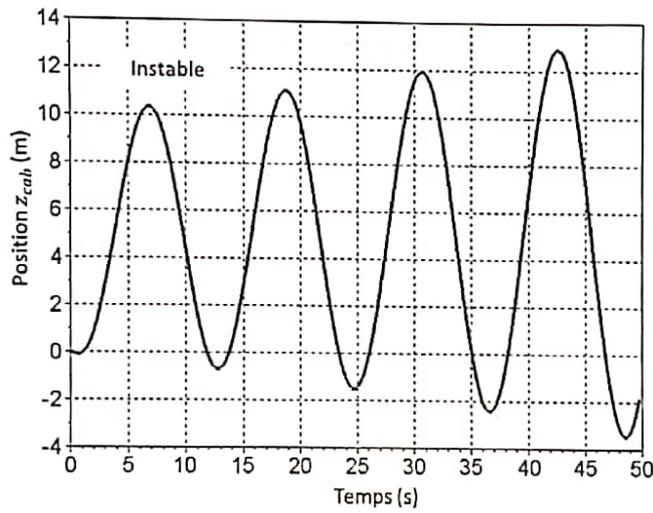
Qu. 25 : compléter le tableau situé sur le document réponse DREP3 et conclure sur le choix d'un correcteur adapté aux exigences définies sur la figure 2. Tous les tracés nécessaires seront laissés apparents sur le document réponse.



Correcteur 1



Correcteur 2



Correcteur 3

	Correcteur 1	Correcteur 2	Correcteur 3
Stabilité (oui / non ?)	oui	oui	non
Erreur statique	0	0 ⁺	/
t _{r5%} (en s)	11	0,7	/
Dépassement relatif (en %)	0	0 ⁺	/

Correcteur 1 : trop lent, correcteur 3 : instable, on choisit le correcteur 2.

Document Réponse 1 :

Nom, prénom : ...

DREP1 : Chaines d'information et d'énergie du système d'asservissement en position de la cabine

