

# Cycle 2 - Modéliser un système linéaire continu invariant

## TD2 – Treuil pour dameuse Prinoth Everest

À l'issue de ce TD, vous devez être capables de :

- analyser les architectures fonctionnelle et structurelle ;
- analyser ou établir le schéma bloc du système ;
- déterminer les fonctions de transfert ;
- exploiter et interpréter les résultats d'un calcul ou d'une simulation ;
- extraire du cahier des charges les grandeurs pertinentes ;
- quantifier des écarts entre des valeurs attendues et des valeurs obtenues par simulation.

### 1. Présentation du système

Pour satisfaire les usagers des pistes, les responsables des stations de ski entretiennent régulièrement leur domaine skiable. Ils utilisent en particulier une dameuse qui permet de remonter la neige que les skieurs font descendre et de l'aérer.

Les dameuses doivent pouvoir évoluer sur toutes les pistes, notamment les plus pentues.

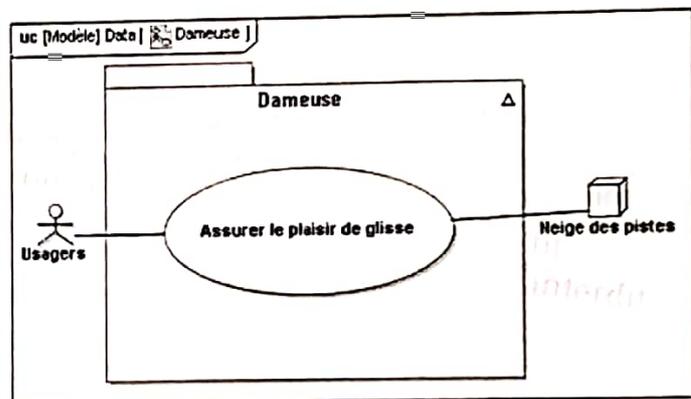


FIG. 1 – diagramme de cas d'utilisation de la dameuse



FIG. 2 – description de la dameuse lors de l'entretien des pistes à forte pente

La dameuse est principalement constituée de (cf. figure 2) :

- une lame avant pour déplacer la neige ;
- une fraise pour aérer la neige ;
- deux chenilles pour mouvoir la dameuse ;
- un treuil pour faciliter l'entretien des pistes à forte pente.

L'objet de cette étude est l'analyse du comportement du treuil installé sur les dameuses Prinoth, en vue de la validation partielle du critère de pente maximum de la prestation attendue détaillée ci-dessus et réalisée pendant la phase de vie "entretien des pistes à forte pente". Lors de cette phase, la seule force motrice des chenilles n'est plus suffisante pour compenser les actions extérieures, notamment le poids de la dameuse et l'action de la neige à l'avant. Le treuil permet d'exercer un effort complémentaire à l'action des chenilles. La caractérisation partielle des exigences liées au treuil dans cette phase de vie est donnée figure 3.

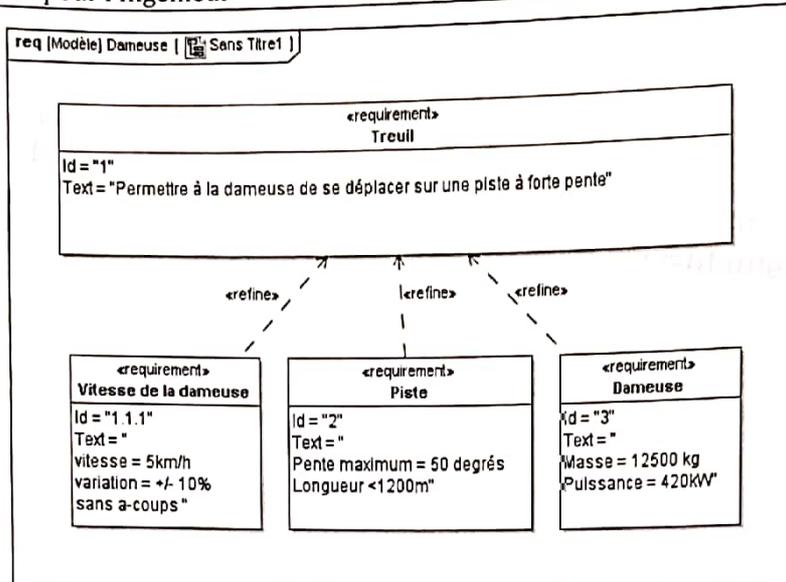


FIG. 3 - Diagramme des exigences

La dameuse, en fonctionnement avec le treuil, est représentée sur la figure 1. La photo figure 4 représente plus particulièrement le treuil. Le cheminement du câble lorsque le treuil est déployé vers l'avant, y est représenté en pointillés.

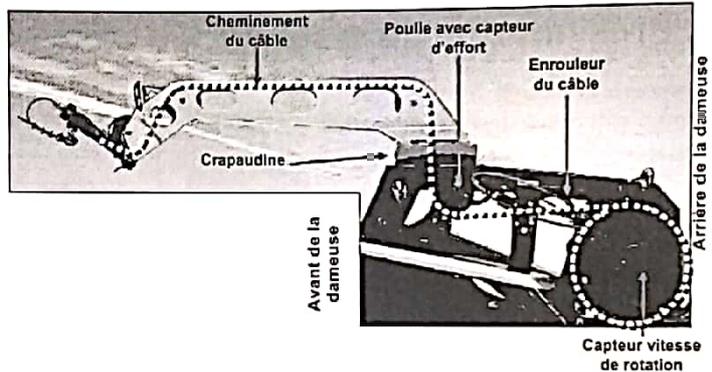


FIG. 4 - photo du treuil

Ce treuil est constitué des éléments suivants :

- un tambour muni d'un capteur de vitesse de rotation (notée  $\omega_t$  et mesurée en  $rad.s^{-1}$ ) ;
- un enrouleur de câble (composé de trois poulies montées sur un vérin) ;
- de quatre poulies dont une équipée d'un capteur d'effort (capteur magnéto-élastique dans l'axe de la poulie) ;
- d'une crapaudine permettant la rotation du bras support autour de  $\vec{y}_1$  ;
- d'un bras support ;
- d'un câble (de diamètre  $d_c = 10\text{ mm}$ ).

La figure 5 donne le schéma d'une modélisation cinématique.

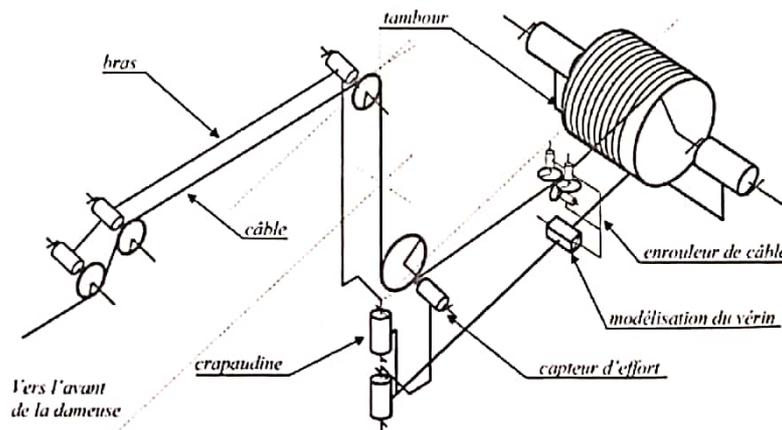


FIG. 5 - schéma cinématique 3D du treuil (déployé vers l'avant)

## 2. Modélisation de l'asservissement en tension du câble

Dans cette partie, chacun des composants sera modélisé séparément afin de compléter le schéma-bloc global de l'asservissement en effort proposé sur le document réponse DREP4. La figure 6 présente tous les composants intervenant dans cet asservissement sous forme de diagramme de définition de blocs.

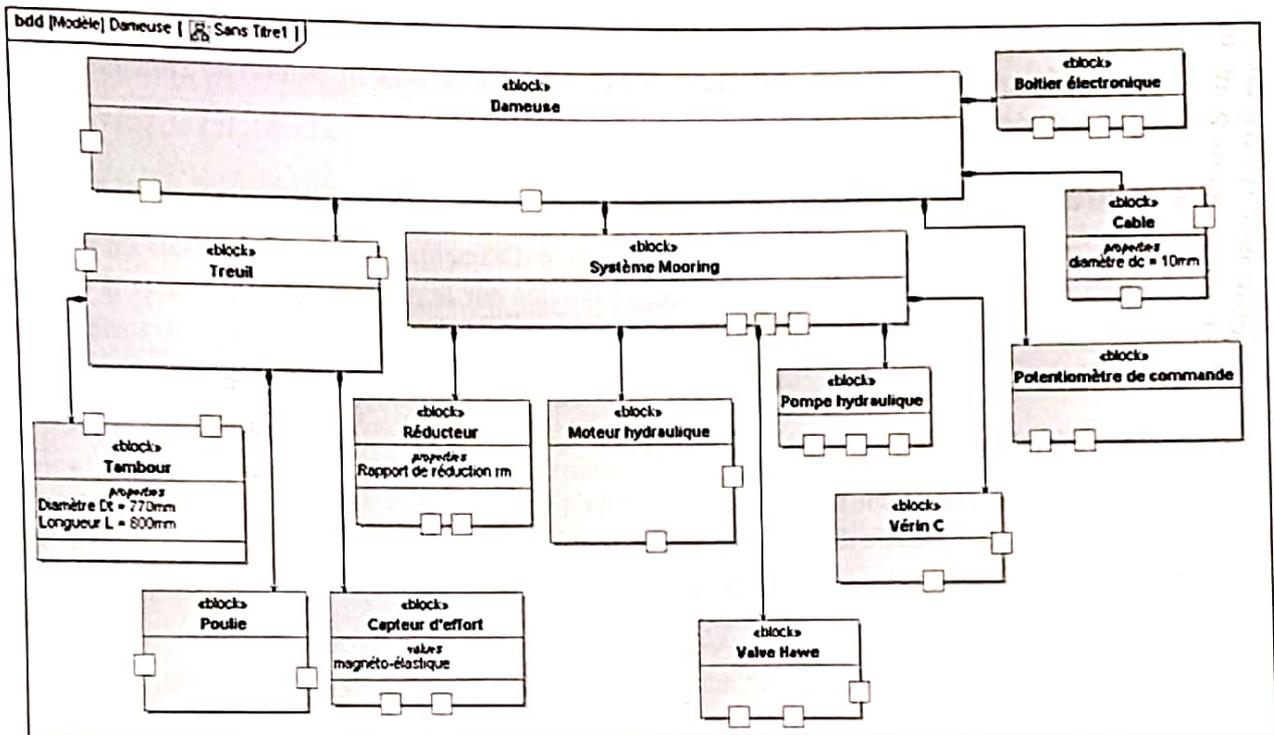


FIG. 6 - diagramme de définition de bloc de la dameuse (partiel, seuls les composants intervenant dans l'asservissement en tension du câble sont représentés)

Qu. 1 : Déterminer la grandeur physique de consigne et la grandeur physique asservie par le système, en précisant leurs unités.

Qu. 2 : À partir des informations disponibles, proposer un diagramme de blocs interne du système de treuil (sans détailler le système Mooring).

### 2.1 Modélisation du potentiomètre de commande

Le réglage de la tension du câble par le pilote s'opère grâce à un potentiomètre implanté sur le volant du conducteur (cf. figure 7). Celui-ci règle la molette en fonction de l'effort dont il estime avoir besoin pour mouvoir la dameuse.

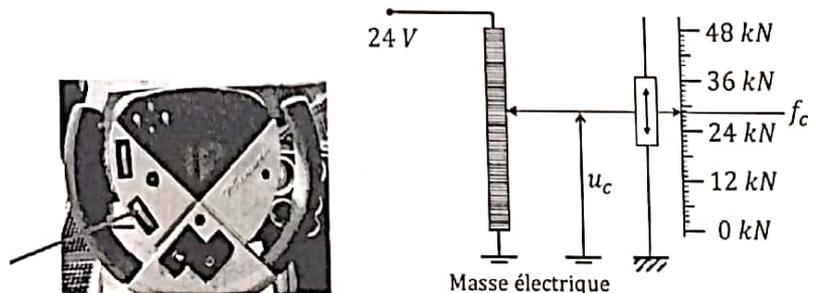


FIG. 7 - potentiomètre de commande.

Le gain  $K$  du potentiomètre est tel que :  $u_c(t) \approx K \cdot f_c(t)$ .

Qu. 3 : Calculer la valeur numérique de  $K$ , le gain du potentiomètre de commande. Compléter le document réponse DREP4.

## 2.2 Modélisation du capteur magnéto-élastique

La tension du câble est mesurée par un capteur magnéto-élastique placé dans l'axe de rotation d'une poulie de treuil (cf. figure 4). Le capteur délivre une tension  $u_f(t)$  (en V) proportionnelle à la tension effective dans le câble (effort  $f(t)$  en N).

**Qu. 4. :** Déterminer la valeur que doit avoir le gain du capteur d'effort magnéto-élastique pour que l'écart  $\varepsilon(t) = u_c(t) - u_f(t)$  soit nul si l'effort réel  $f(t)$  converge vers la valeur de consigne  $f_c(t)$ .

Compléter le document réponse DREP4.

## 2.3 Modélisation du boîtier électronique

Le boîtier électronique a pour fonction d'élaborer la tension d'alimentation  $u_h(t)$  de la valve du système Mooring à partir de la comparaison entre la consigne donnée par le pilote de la dameuse et la tension effective du câble, mesurée par l'intermédiaire du capteur magnéto-élastique. Sa fonction de transfert  $B(p)$  est donnée et vaut :  $B(p) = K_e/p$ .

## 2.4 Description du système Mooring

La fonction réalisée par le système appelé "Mooring" est de commander la vitesse de rotation du tambour  $\omega_t(t)$  sur lequel s'enroule le câble du treuil (cf. figure 8) en fonction de la tension d'alimentation élaborée par le boîtier électronique  $u_h(t)$ .

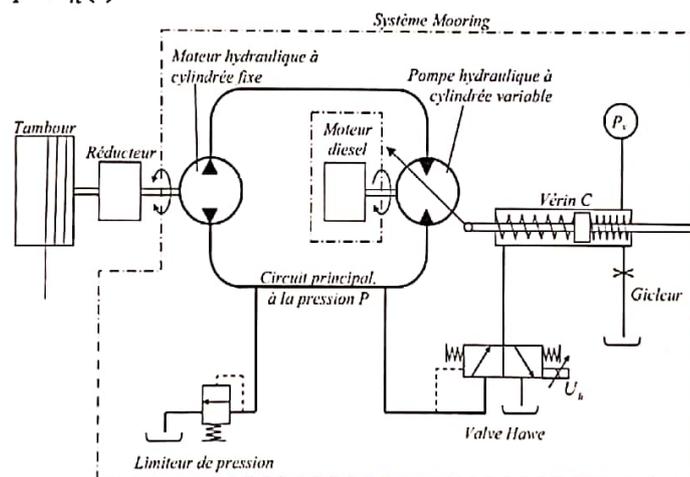


FIG. 8 - description du système Mooring

Description fonctionnelle des composants du système Mooring :

- la valve Hawe a pour fonction de laisser passer un débit vers le vérin C en fonction de la pression du circuit principal et de la tension  $u_h(t)$ .
- le vérin C a pour fonction d'agir sur la cylindrée de la pompe.
- la pompe hydraulique à cylindrée variable (exprimée en  $m^3 \cdot rad^{-1}$ ) a pour fonction d'alimenter le moteur hydraulique. L'arbre de la pompe est entraîné en rotation à vitesse constante par le moteur diesel de la dameuse.
- le moteur hydraulique a pour fonction d'entraîner en rotation le tambour sur lequel est enroulé le câble par l'intermédiaire d'un réducteur de rapport de transmission noté  $r_m$  ( $r_m < 1$ ).
- le limiteur a pour fonction de limiter la pression dans le circuit principal à une valeur maximum.

L'alimentation en pression  $P_v$ , associée au gicleur a pour fonction d'assurer en permanence la présence d'huile dans la chambre concernée du vérin C. La pression  $P_v$  est très largement inférieure à la pression  $P(t)$  dans le circuit principal (dans la pompe et dans le moteur).

### 2.4.1 Modélisation de la pompe

Notations :

- $q_p(t)$  : débit dans la pompe hydraulique (en  $m^3 \cdot s^{-1}$ ) ;
- $cyl_p(t)$  : cylindrée de la pompe hydraulique (en  $m^3 \cdot rad^{-1}$ ) ;
- $\omega_p$  : vitesse de rotation de la pompe hydraulique (en  $rad \cdot s^{-1}$ ) ;

**Qu. 5. :** En vous aidant d'une analyse dimensionnelle, exprimer le débit  $q_p(t)$  de la pompe hydraulique en fonction de  $cyl_p(t)$  et  $\omega_p$ . Compléter le document réponse DREP4.

### 2.4.2 Modélisation du motoréducteur

Notations :

- $q_m(t)$  : débit dans le moteur hydraulique (en  $m^3 \cdot s^{-1}$ ) ;
- $cyl_m$  : cylindrée du moteur hydraulique (en  $m^3 \cdot rad^{-1}$ ) ;
- $\omega_m(t)$  : vitesse de rotation du moteur hydraulique (en  $rad \cdot s^{-1}$ ) ;
- $\omega_t(t)$  : vitesse de rotation du tambour (en  $rad \cdot s^{-1}$ ) ;
- $c_m(t)$  : couple disponible en sortie du moteur hydraulique (en  $N \cdot m$ ) ;
- $c_t(t)$  : couple disponible sur le tambour (en  $N \cdot m$ ) ;
- $r_m$  : rapport de transmission du réducteur :

$$r_m = \frac{\omega_t}{\omega_m} = \frac{c_m}{c_t}$$

Les débits de fuite dans le circuit principal et le débit alimentant la valve Hawe sont négligeables devant le débit du circuit si bien que  $q_p(t) = q_m(t)$ .

**Qu. 6. :** Exprimer le débit du moteur hydraulique  $q_m(t)$  en fonction de  $cyl_m$  et  $\omega_m(t)$ .

En faisant l'hypothèse que le rendement du moteur est égal à 1 (aucune perte de puissance), on peut exprimer le fait que la puissance mécanique en sortie du moteur est égale à la puissance hydraulique disponible en entrée du moteur, soit :

$$\omega_m(t) \cdot c_m(t) = P(t) \cdot q_m(t), \text{ avec :}$$

**Qu. 7. :** En déduire l'expression de la pression dans le circuit principal  $P(t)$  en fonction de la cylindrée  $cyl_m$  et du couple moteur  $c_m(t)$ . Compléter, sur le document réponse DREP4, toute la partie correspondant au motoréducteur (moteur + réducteur).

### 2.4.3 Modélisation du vérin C

On note :

- $q_v(t)$  : débit dans la chambre gauche du vérin C (en  $m^3 \cdot s^{-1}$ ) ;
- $S$  : section effective du vérin C (en  $m^2$ ).

Les ressorts gauche et droit du vérin C sont identiques (cf. figure 9). L'étanchéité entre les deux chambres est supposée parfaite. La cylindrée de la pompe est proportionnelle à la position  $x_v$  du piston telle que :

$$cyl_p(t) = -K_p \cdot x_v(t) \text{ avec } K_p > 0$$

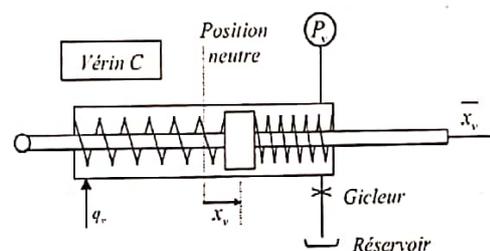


FIG. 9 - modélisation du vérin.

**Qu. 8. :** Exprimer le débit  $q_v(t)$  en fonction de  $S$  et  $x_v(t)$ . Compléter le document réponse DREP4.

### 2.4.4 Modélisation de la valve Hawe (distributeur)

La fonction de la valve Hawe est de générer le débit  $q_v(t)$  entrant dans la chambre gauche du vérin C, dans un sens ou dans l'autre, en fonction de la différence entre l'effort créé par la pression  $P(t)$  présente dans le circuit principal et l'effort créé par le champ magnétique dû à la tension d'alimentation  $u_h(t)$  de la bobine.

La figure 10 représente la valve Hawe dans ses positions extrêmes (position 1 et 2) et dans la position médiane (position 0), ainsi que le détail de son architecture.

Les hypothèses relatives à l'étude de la valve Hawe sont :

- le débit est supposé proportionnel à la distance du piston par rapport à la position neutre notée  $x_h$ , telle que :  $q_v(t) = K_x \cdot x_h(t)$  avec  $K_x > 0$  ;
- le fonctionnement est supposé parfaitement symétrique (débit  $q_v$  positif ou négatif) ;
- les 2 ressorts de la valve Hawe sont identiques, de raideur  $k_h$ , de longueur à vide  $l_0$  et de longueur  $l$  en position neutre ( $l < l_0$ ) ;
- la section effective du piston est notée  $S_h$  ;
- l'inertie du piston est négligée ;
- on notera  $K_m > 0$  le rapport de proportionnalité entre la tension  $u_h(t)$  et l'effort  $f_m(t)$  appliqué sur le piston par le bobinage :  $\vec{f}_m(t) = -K_m \cdot u_h(t) \cdot \vec{u}$ .

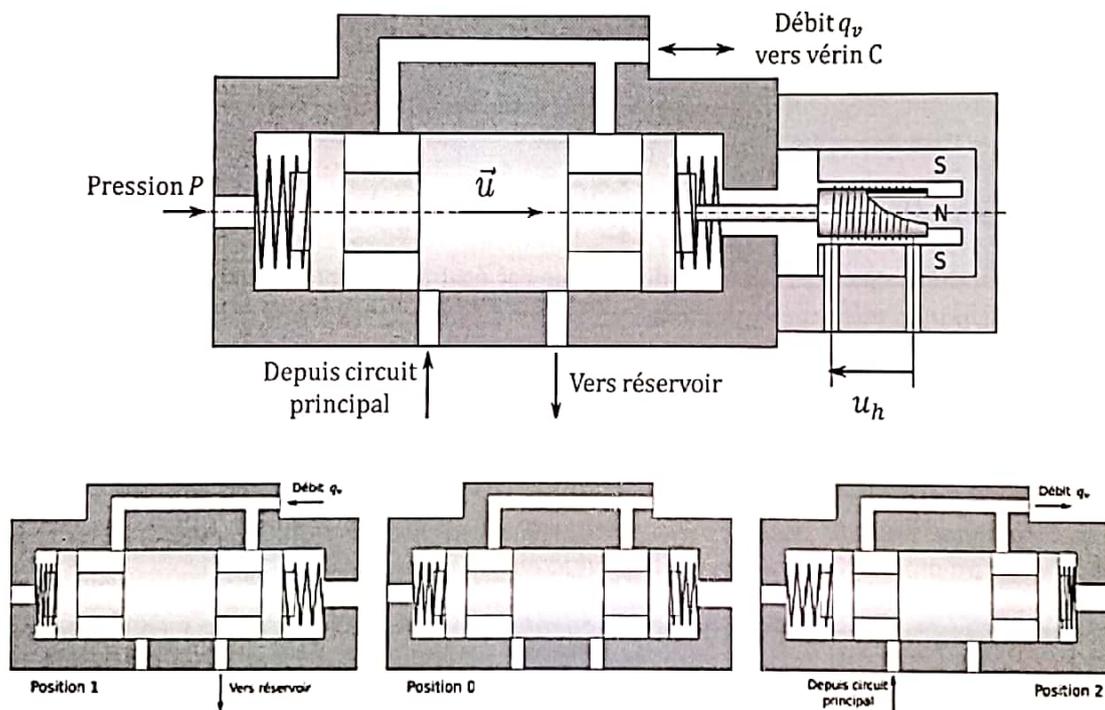


FIG. 10 - Valve Hawe à commande électrique représentée en position neutre du piston.

Le Principe Fondamental de la Statique appliqué sur le piston dans la direction du vecteur  $\vec{u}$  permet d'obtenir la relation suivante :  $q_v(t) = -K_h \cdot (K_m \cdot u_h(t) - S_h \cdot P(t))$ , avec  $K_h = K_x / (2 \cdot k_h)$ .

Qu. 9. : Compléter la partie correspondant à la valve Hawe sur le document réponse DREP4.

### 2.5 Modélisation du tambour

Le tambour permet d'obtenir un mouvement de translation du câble à une vitesse  $v_E(t)$  à partir de la rotation du tambour à la vitesse de rotation  $\omega_t(t)$ . Les variations de vitesse de rotation du tambour étant suffisamment lentes, l'étude mécanique du tambour se ramène à un problème de statique.

Dans la suite du sujet, on considérera que la ligne neutre du câble s'enroule entièrement sur un diamètre  $D_t = 770 \text{ mm}$ .

**Qu. 10. :** Par une étude géométriques simple, exprimer la vitesse d'enroulement  $v_E(t)$  du câble en fonction de la vitesse de rotation  $\omega_t(t)$  du tambour. Compléter le document réponse DREP4.

En faisant l'hypothèse que la totalité de la puissance mécanique fournie par le réducteur au tambour est transmise au câble, il est possible d'écrire la relation suivante :

$$v_E(t) \cdot f(t) = \omega_t(t) \cdot c_t(t), \text{ avec :}$$

- $c_t(t)$ , couple disponible sur le tambour (en  $N \cdot m$ ) ;
- $f(t)$ , tension du cable (en  $N$ )

**Qu. 11. :** En déduire une expression du couple au tambour  $c_t(t)$  en fonction de la tension  $f(t)$  et des caractéristiques géométriques du système. Compléter le document réponse DREP4.

### 2.6 Modélisation de la dameuse et du câble

Par une étude mécanique, on peut montrer que la dameuse et le câble peuvent être modélisés par les équations de comportement suivantes :

$$m \cdot \frac{dv_D(t)}{dt} + \mu \cdot v_D(t) = f(t) + f_{ch}(t) - f_{pert}(t)$$

- $m$  : masse de la dameuse en  $kg$
- $\mu$  : coefficient de frottement en  $N \cdot m^{-1} \cdot s$
- $v_D(t)$  : vitesse de la dameuse en  $m \cdot s^{-1}$
- $f(t)$  : tension du câble en  $N$
- $f_{ch}(t)$  : effort exercé par les chenilles sur la dameuse en  $N$
- $f_{pert}(t)$  : force perturbatrice sur la dameuse en  $N$

$$f(t) = K_c \cdot \Delta x(t)$$

$$\text{avec : } \Delta x(t) = x_E(t) - x_D(t)$$

- $x_E(t)$  : longueur de câble déroulée en  $m$
- $x_D(t)$  : distance parcourue par la dameuse en  $m$
- $K_c$  : coefficient de raideur du câble en  $N \cdot m^{-1}$

**Qu. 12 :** À partir des équations de comportement de la dameuse et du câble exprimées dans le domaine de Laplace, déterminer les fonctions de transfert de chacun de ces deux systèmes. Compléter le document réponse DREP4.

### 3. Modélisation du comportement global du treuil en absence de perturbations

On considère dans cette partie le système soumis à la seule entrée consigne  $f_C$ . Les entrées  $f_{ch}$  et  $f_{pert}$  sont supposées nulles. Le schéma bloc obtenu dans la partie précédente peut se mettre sous la forme de la figure 11 où  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$  et  $F_7$  sont des constantes.

**Qu. 13 :** Déterminer l'expression des constantes  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$  et  $F_7$  en fonction du schéma bloc précédemment établi. Calculer les valeurs numériques de chacune des constantes et vérifier l'homogénéité des unités.

**Qu. 14 :** En s'inspirant des figures 12 à 13, simplifier le schéma bloc de la figure 11 pour obtenir un schéma avec une seule boucle de retour (cf. figure 14).

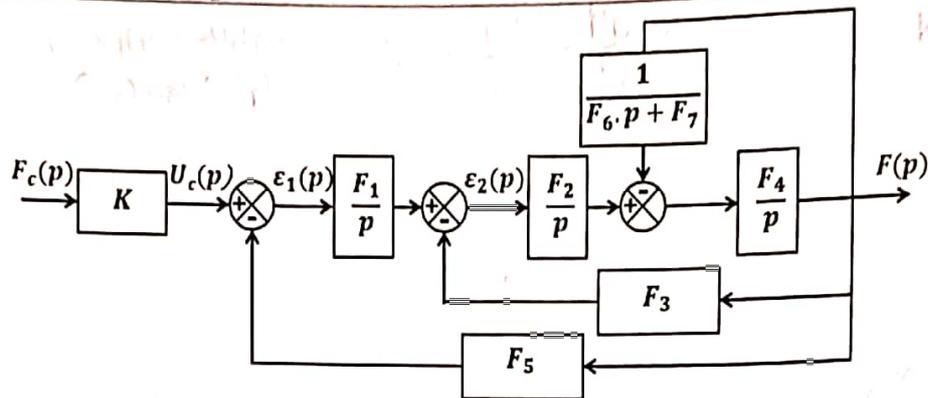


FIG. 11 - schéma bloc

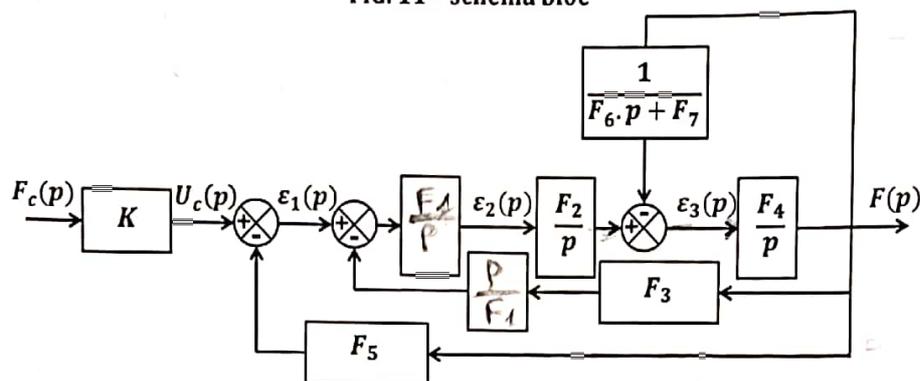


FIG. 12 - schéma bloc, première simplification

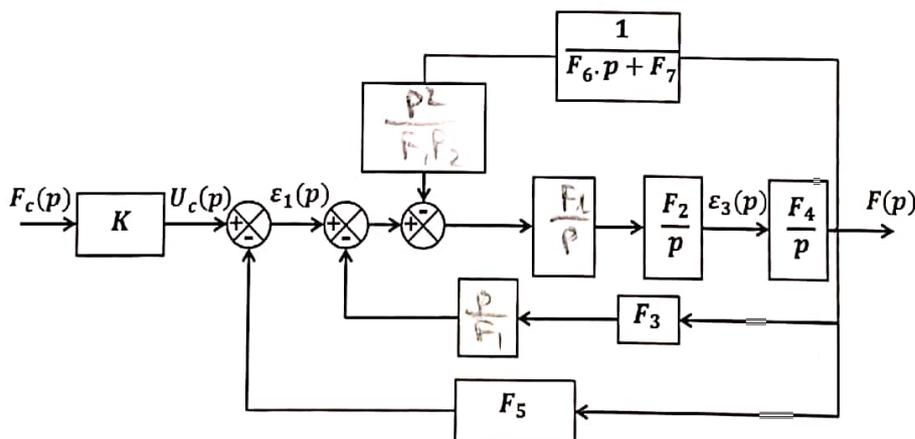


FIG. 13 - schéma bloc, deuxième simplification

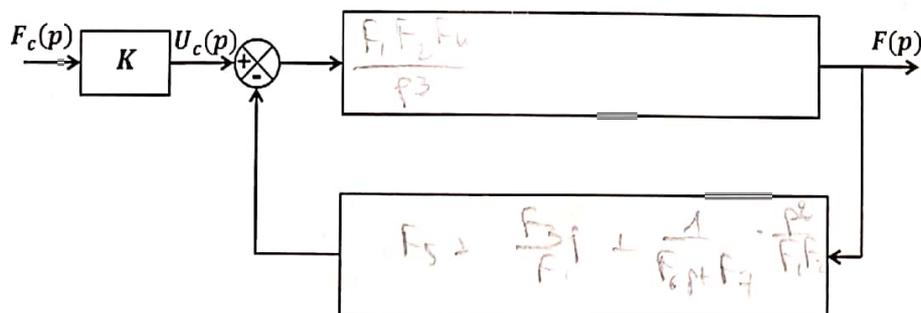


FIG. 14 - schéma simplifié

Qu. 15 : Déterminer la fonction de transfert globale du treuil :  $H_t(p) = F(p)/F_c(p)$  en fonction de  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$  et  $F_7$ . (Rappel : une fonction de transfert doit être donnée sous forme d'un quotient de deux polynômes.)

## 4. Validation des performances globales du treuil

Le treuil est asservi en tension afin d'exercer une action proportionnée, complémentaire à celle des chenilles. Un extrait du cahier des charges de cet asservissement est donné ci-dessous :

|                               | Critère                       | Valeur                   |
|-------------------------------|-------------------------------|--------------------------|
| Asservir le treuil en tension | Précision                     | Erreur statique nulle    |
|                               | Rapidité                      | $t_{r5\%} < 2 \text{ s}$ |
|                               | Dépassements                  | $< 15\%$                 |
|                               | Sensibilité aux perturbations | Aucune                   |

La partie 3 du sujet a permis le calcul de la fonction de transfert en poursuite (réponse à une consigne) du treuil. Une étude similaire permettrait de déterminer la fonction de transfert en régulation (réponse à une perturbation) de ce même treuil.

Le tracé de la réponse indicielle unitaire du système décrit par la fonction de transfert  $H_t(p)$  est donné sur le document réponse DREP1.

**Qu. 15 :** Mesurer sur la courbe DREP1 le temps de réponse à 5% du système et le pourcentage de dépassement. Conclure quant à la satisfaction du cahier des charges fonctionnel du treuil. Donner les conséquences, pour le système, de la présence de dépassements dans la réponse.

### 4.1 Amélioration des performances par un correcteur proportionnel

Un correcteur proportionnel  $C(p) = K_{cor}$  est mis en place juste après le comparateur du boîtier électronique. Sur la courbe DREP2 est représentée la réponse indicielle unitaire du système corrigé pour deux valeurs de  $K_{cor}$  :

- la courbe en trait plein pour  $K_{cor} = 5$  ;
- la courbe en pointillés pour  $K_{cor} = 0,5$ .

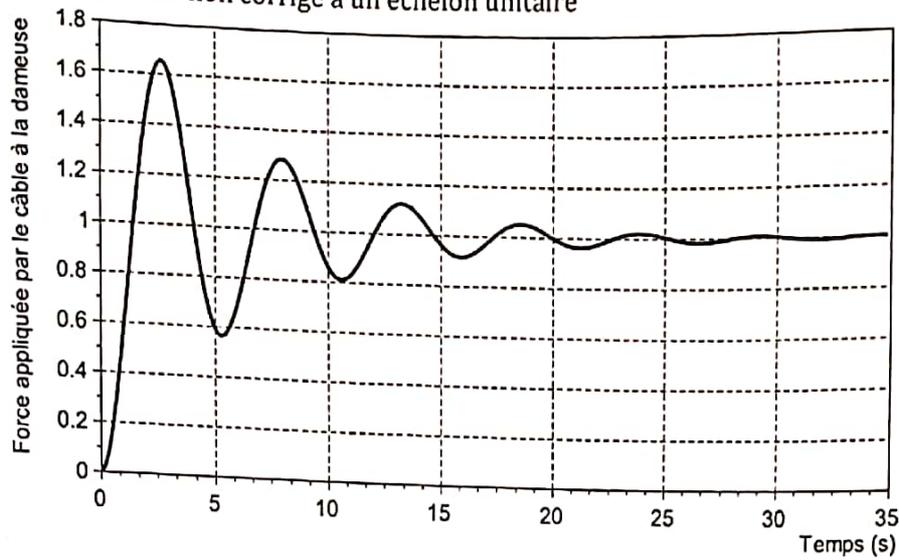
**Qu. 16 :** Mesurer sur la courbe DREP2 le temps de réponse à 5% du système et le pourcentage de dépassement. Conclure quant à la satisfaction du cahier des charges fonctionnel du treuil.

### 4.2 Amélioration des performances par un correcteur à avance de phase

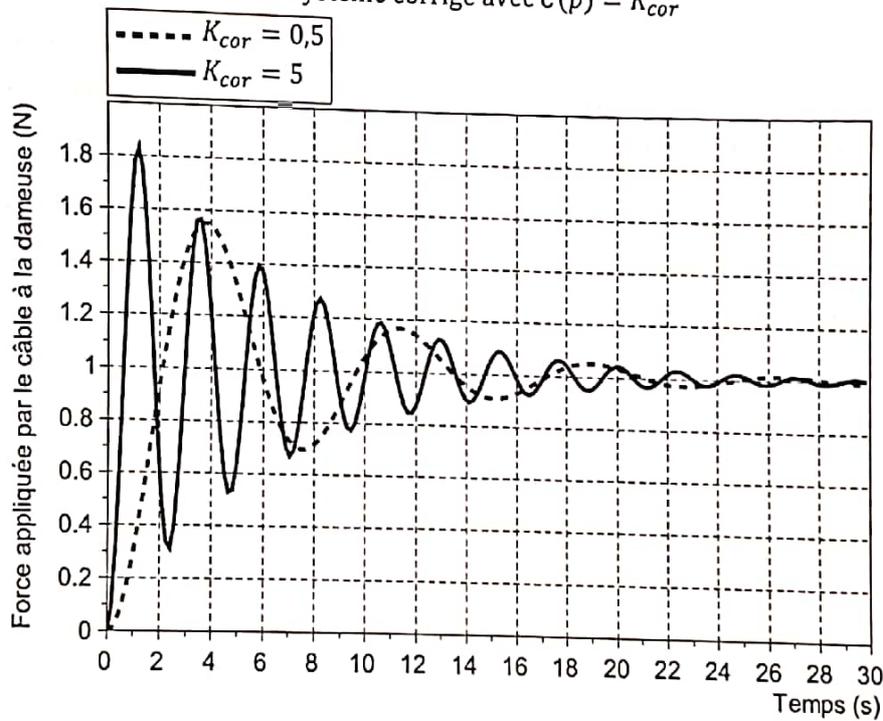
La réponse indicielle unitaire du système corrigé avec un correcteur à avance de phase (programme de 2ème année) est représentée sur la courbe DREP3.

**Qu. 17 :** Mesurer sur la courbe DREP3 le temps de réponse à 5% du système et le pourcentage de dépassement. Conclure quant à la satisfaction du cahier des charges fonctionnel du treuil.

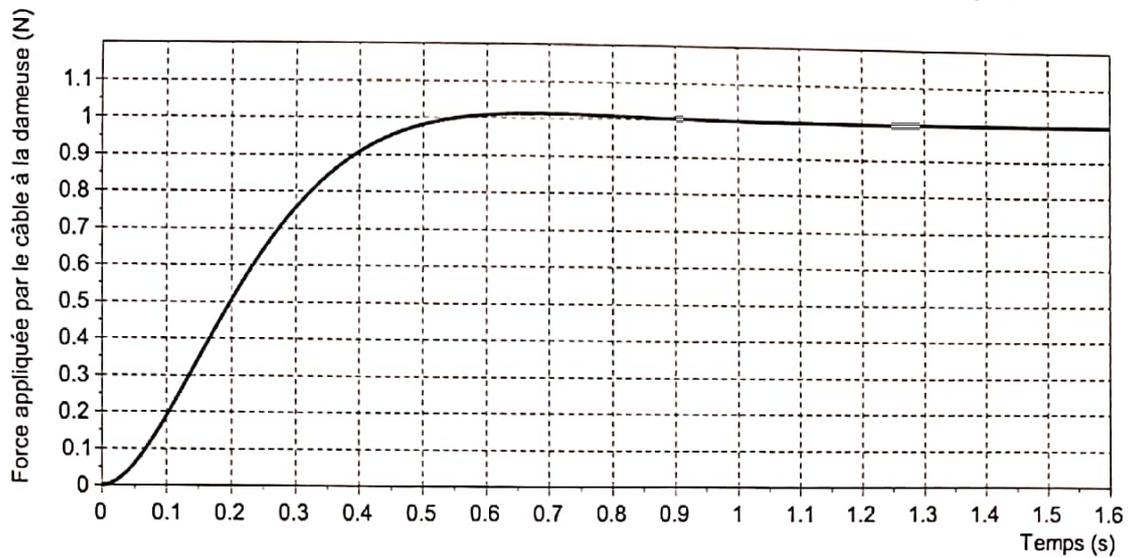
DREP1 : Réponse du système non corrigé à un échelon unitaire



DREP2 : Réponse indicielle unitaire du système corrigé avec  $C(p) = K_{cor}$



DREP3 : Réponse indicielle unitaire du système corrigé avec un correcteur à avance de phase



### DREP4 : Schéma bloc de l'asservissement en tension du câble

