34913 BENDAHI Abderrahim

Sommes finies de fractions unitaires. Un théorème de Graham.

Il existe plusieurs formes de représentation d'un nombre réel, dont la représentation dyadique, le développement décimal, le développement en fraction continue. Mais celle qui m'a particulièrement intéressé lors de mes recherches est la décomposition de certains nombres rationnels en somme finie d'inverses de carrés.

Le traitement des signaux a des applications en particulier en médecine. Un bruit est rajouté au signal du fait que la plupart des nombres réels ne peuvent pas être stockés de façon exacte dans un ordinateur. Aussi, je me suis intéressé à la possibilité de les décomposer en sommes finies.

Positionnement thématique (ETAPE 1)

MATHEMATIQUES (Analyse), INFORMATIQUE (Informatique pratique).

Mots-clés (ETAPE 1)

Mots-Clés (en français)	**Mots-Clés** (en anglais)
Théorème de Graham	*Graham's theorem*
Fractions unitaires	*Unit fractions*
Sommes finies	*Finite sums*
Décomposition	*Decomposition*
Suites	*Sequences*

Bibliographie commentée

Le papyrus Rhind (vers environ 1650 av. J.-C.), est le plus important document nous informant des connaissances mathématiques des temps anciens. Il témoigne que les mathématiciens égyptiens étaient capables d'écrire tout nombre rationnel strictement positif (de taille raisonnable) comme somme de fractions unitaires deux à deux distinctes -fractions égyptiennes-, bien qu'aucun algorithme n'ait été fourni pour réaliser une telle représentation.

Le premier algorithme (algorithme glouton) a été fourni sans démonstration par Léonard de Pise (Fibonacci) dans son livre "Liber Abaci" paru en 1202. Cette méthode a été redécouverte en 1880 par James Sylvester qui a démontré que l'algorithme donne bien une décomposition en un nombre fini de fractions égyptiennes.

En 1954, Bonnie Madison Stewart a démontré que tout nombre rationnel strictement positif avec un dénominateur impair est une somme finie d'inverses d'entiers impairs distincts.

Paul Erdős et Ronald Lewis Graham ont réfléchi au problème suivant : est-ce que tout entier peut s'écrire comme somme de fractions égyptiennes dont les dénominateurs sont des produits de deux nombres premiers distincts ? Ils en étaient convaincus, pensaient même avoir une stratégie mais ils ne parvenaient pas à mener la preuve à bien. L'article de Butler, Erdős et Graham [1] montre que tout entier peut s'écrire comme somme de fractions égyptiennes dont les dénominateurs sont des produits de trois nombres premiers distincts.

En 1964, Graham [2] a démontré un théorème qui généralise ces résultats et qui stipule que toute suite vérifiant certaines conditions suffisantes -indiquées en début d'article- permet de décomposer en somme finie certains nombres rationnels positifs. La preuve étant valable dans un contexte très large, elle est mathématiquement bien plus riche que les précédentes. Dans [3], Graham présente aussi une preuve moins technique du cas particulier des suites d'inverses de puissances n-ièmes, en explicitant cette fois les intervalles auxquels il faut et il suffit que les nombres rationnels appartiennent pour qu'ils admettent une écriture en somme finie de termes distincts de ces suites.

Problématique retenue

Il s'agit de chercher des méthodes efficaces pour obtenir, algorithmiquement, les termes de la suite des inverses de puissances n-ièmes qui apparaissent dans la décomposition d'un nombre rationnel.

Objectifs du TIPE

Je me propose :

- de cerner les arguments clés de la preuve du théorème général de Graham,

- de démontrer le cas particulier qui concerne la décomposition en somme finie d'inverses de puissances n-ièmes,

- d'étudier des idées d'algorithmes qui permettent d'obtenir cette décomposition et d'en coder et améliorer les plus pertinentes.

Références bibliographiques (ETAPE 1)

[1] Steve Butler, Paul Erd˝os et Ronald Lewis Graham : EGYPTIAN FRACTIONS WITH EACH DENOMINATOR HAVING THREE DISTINCT PRIME DIVISORS : *https://mathweb.ucsd.edu/~ronspubs/pre_tres_egyptian.pdf*

[2] Ronald Lewis Graham : On Finite Sums of Unit Fractions : *Proc. London Math. Sot. 14 (1964) 193-207.*

[3] Ronald Lewis Graham : On Finite Sums of Reciprocals of Distinct nth Powers : *Pac. Jour. of Math., 14 (1964), 85-92.*