

Ahmed-Amine Anzali

Etude
& modélisation



des
Micro-robots
nageurs

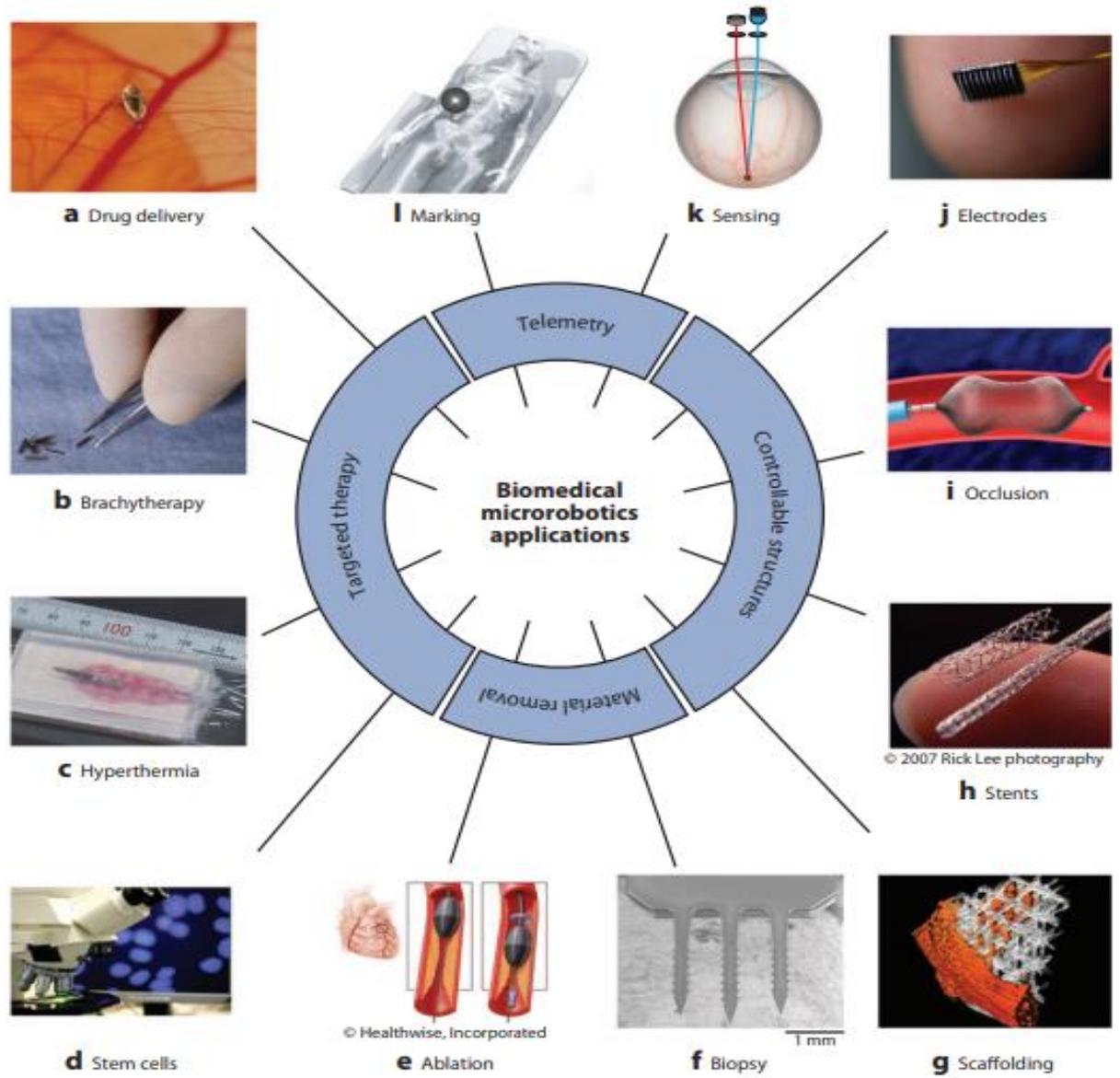
N ° d'inscription 5107



1 Introduction



1 Introduction





2 Etude dynamique des microrobots



2

Etude dynamique des microrobots



2.1

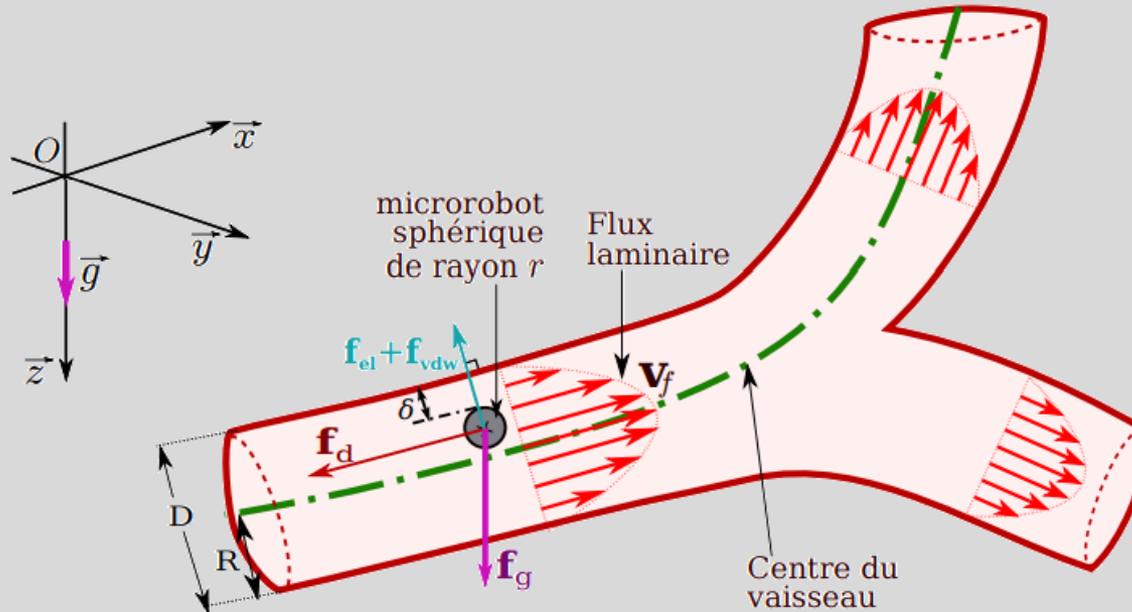
**Bilan
des
forces**

Forces d'interaction vasculaires

Force motrice

2.2

Simplification du problème



Karim Belharet : Navigation prédictive d'un microrobot magnétique : Instrumentation, commande et validation.



Le microrobot, modélisé par une microsphère de rayon r , est soumis à plusieurs forces d'interaction vasculaires.

$$\vec{F}_{vasc} = \vec{f}_g + \vec{f}_d + \vec{f}_{vdw} + \vec{f}_{el}$$

$$\vec{F}_{vasc} = \vec{f}_g + \vec{f}_d + \vec{f}_{vdw} + \vec{f}_{el}$$

Masse volumique
du microrobot

Volume du microrobot

$$\vec{f}_g = V(\rho - \rho_f)\vec{g}$$

Poids apparent

Masse volumique du
fluide

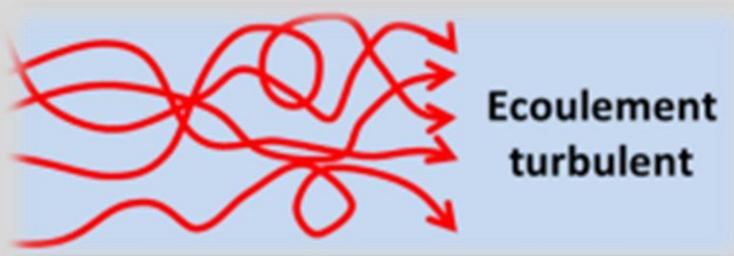
$$\vec{F}_{vasc} = \vec{f}_g + \vec{f}_d + \vec{f}_{vdw} + \vec{f}_{el}$$

$$\vec{f}_g = V(\rho - \rho_f)\vec{g}$$

<u>Grandeur</u>	<u>Ordre de grandeur</u>	
ρ	7500 kg.m ⁻³ (Néodyme)	7874 kg.m ⁻³ (Fer)
ρ_f	997 kg.m ⁻³ (Eau)	1260 kg.m ⁻³ (Glycérol)
$V = \frac{4}{3} * \pi * r^3$	4,2 × 10 ⁻⁹ m ³ (r = 1 mm)	
f_g	0,27 mN	

La force hydrodynamique

Il existe deux modes principaux d'écoulement d'un fluide



<https://linnovationdelapeauderequin.wordpress.com/lhydrodynamisme/>

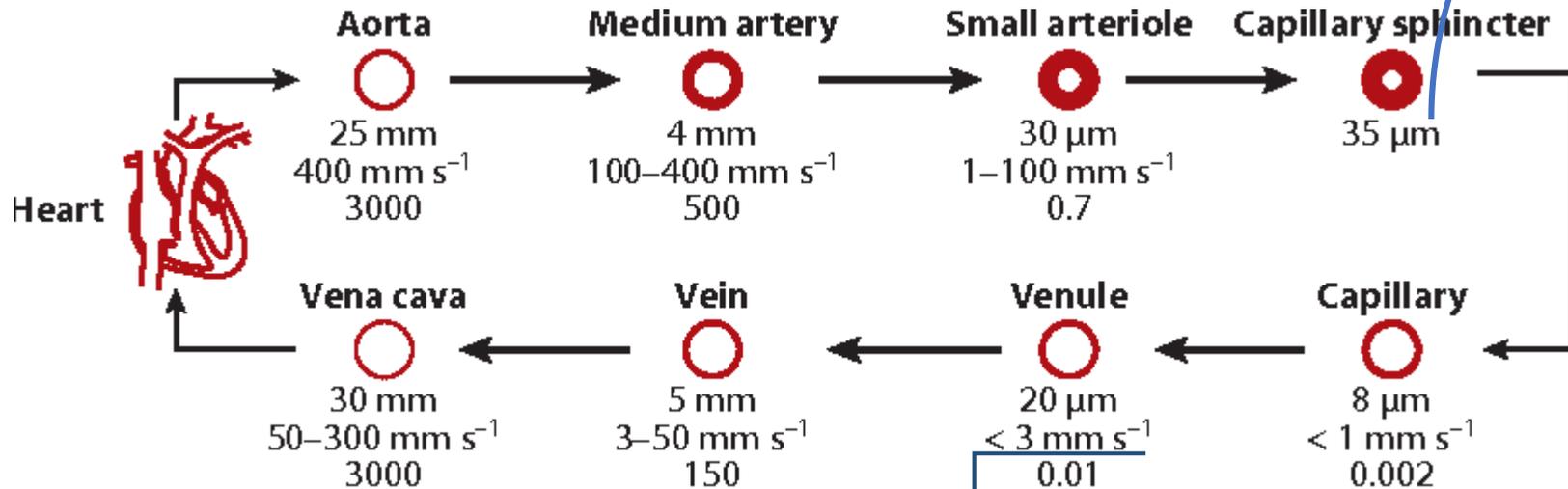
La frontière entre les deux régimes précédents est donnée par le nombre de Reynolds :

$$R_e = \frac{\text{Force d'inerties}}{\text{Forces visqueuses}} = \frac{\rho_f v R}{\eta_f}$$



Rayon du vaisseau

Ordres de grandeur du système cardiovasculaire



Microrobots for Minimally Invasive Medicine :
Annual Review of Biomedical Engineering, 2010.

Vitesse du sang dans le vaisseau sanguin

Nombre de Reynolds



Dans cette étude je m'intéresse au cas où $Re \ll 1$ (écoulement de Stokes), la force de traînée est donnée par la loi de Stokes :

Viscosité du fluide

Rayon de la sphère

$$\vec{f}_d = -6\pi n_f r (\vec{v} - \vec{v}_f)$$

Loi de Stokes

Vitesse relative par rapport au fluide

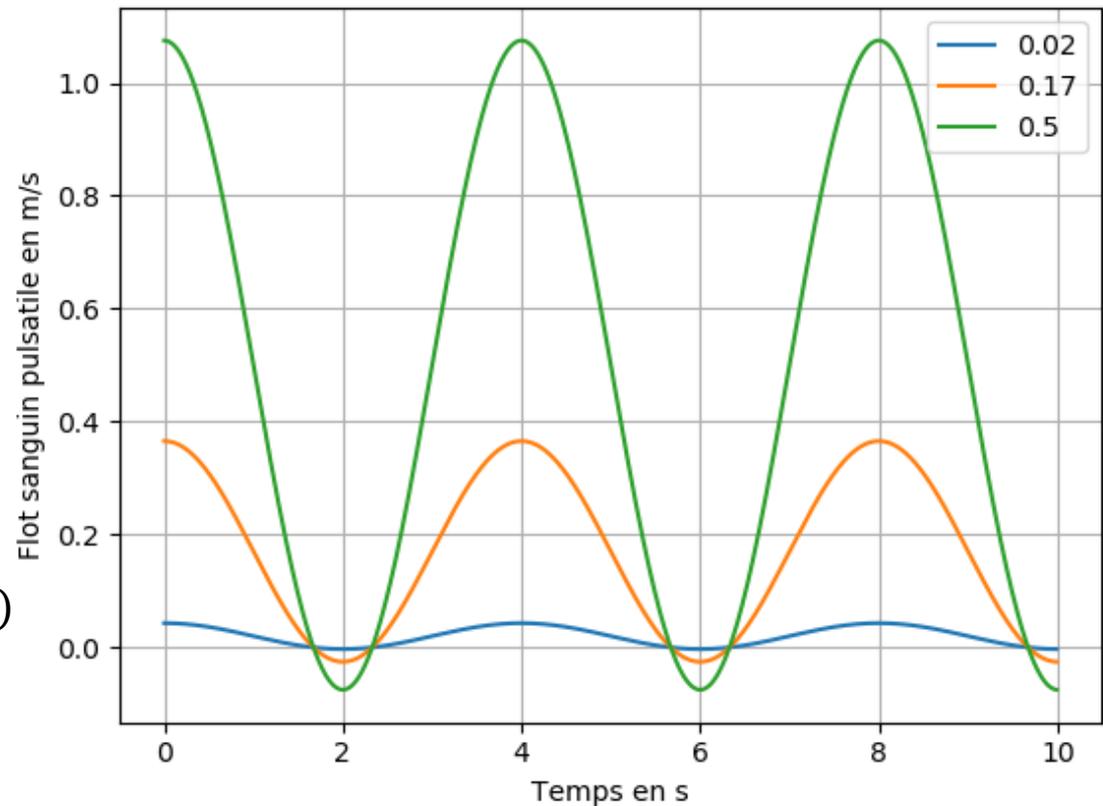
$$\vec{f}_d = -6\pi n_f r (\vec{v} - \vec{v}_f) \quad \text{Loi de Stokes}$$

Grandeur	Ordre de grandeur	
n_f (à 293K) <i>viscosité</i>	$10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ (Eau)	1,49 Pa.s (Glycérol)
$\ \vec{v} - \vec{v}_f\ $	$\sim 20 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$	
f_d	0,4 μN (Eau)	0,6 mN (Glycérol)



Par une décomposition en série de Fourier, on modélise le flot sanguin pulsatile par une fonction sinusoïdale :

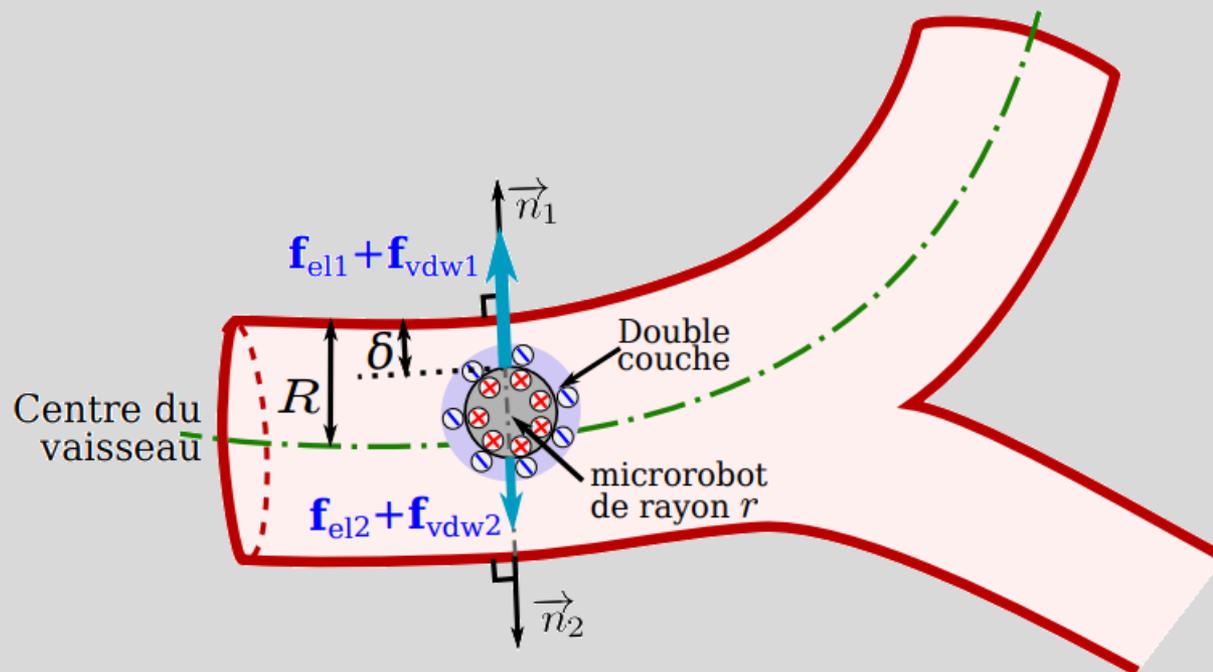
$$v_f(t) = \bar{v}_f \times (1 + a_f \times \sin(\omega_f t + \varphi))$$





- Forces de VanDerWaals et Forces électrostatiques.
- Négligeables à grande distance des parois du vaisseau sanguin

$\sim 10 \text{ pN}$



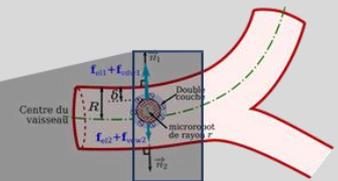
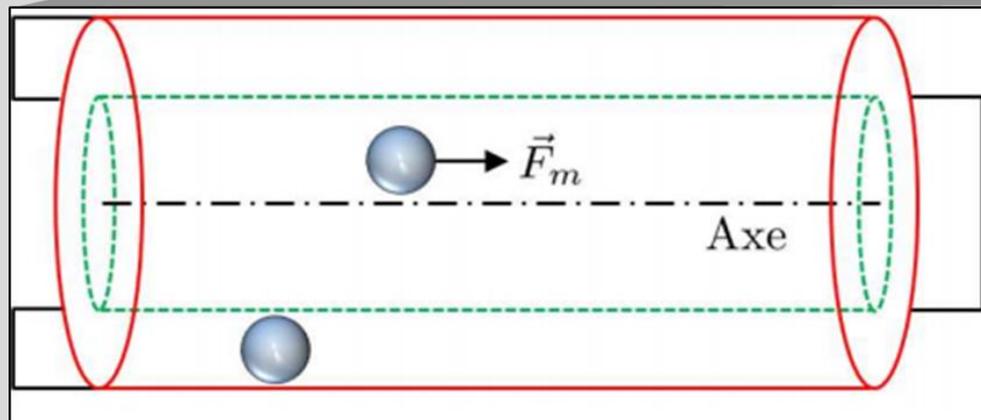
Force motrice (magnétique)



$$\vec{f}_m = V(\vec{M} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}(r)$$

V : Volume du microrobot

\vec{M} : L'aimantation



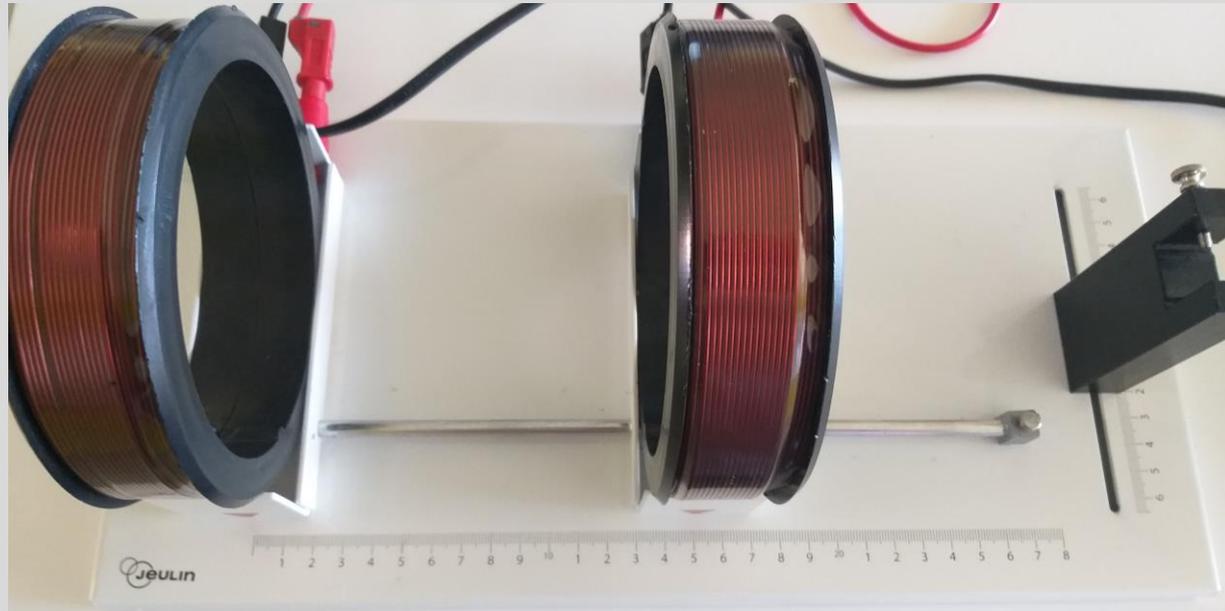
$$\vec{f}_m = V(\vec{M} \cdot \vec{\nabla}) \overline{B(r)}$$

$$\begin{pmatrix} F_{m_x} \\ F_{m_y} \\ F_{m_z} \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} M_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + M_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + M_z \frac{\partial B_x}{\partial z} \\ M_x \frac{\partial B_y}{\partial x} + M_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + M_z \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ M_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + M_y \frac{\partial B_z}{\partial y} + M_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$



Pour les bobines de Helmholtz,
sur l'axes des bobines on a :

$$\begin{pmatrix} F_{m_x} \\ F_{m_y} \\ F_{m_z} \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} M_x \frac{\partial B_x}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\vec{f}_m = V(\vec{M} \cdot \vec{\nabla}) \overline{B(r)}$$

Grandeur	Néodyme (NdFeB)	Fer (Fe)
M_s (à 293K)	$1,23 \times 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$	$3,15 \times 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$
r	0,5 mm	2,25 mm
ρ (Masse volumique)	7500 kg/m^3	7874 kg/m^3
f_m	$6,44 \mu\text{N}$	$1,5 \text{ mN}$

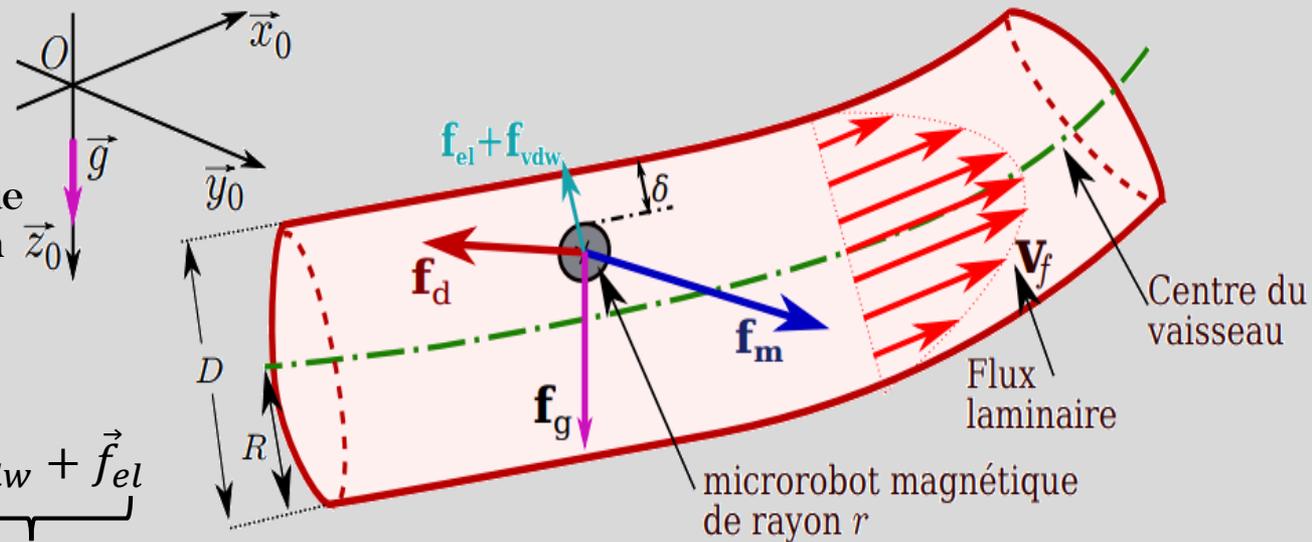
Equation mécanique



On applique le principe fondamental de la dynamique dans un référentiel galiléen (O, x, y, z) et on trouve:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f}_m + \vec{f}_g + \vec{f}_d + \underbrace{\vec{f}_{vdw} + \vec{f}_{el}}_{\text{Négligeables}}$$

Négligeables

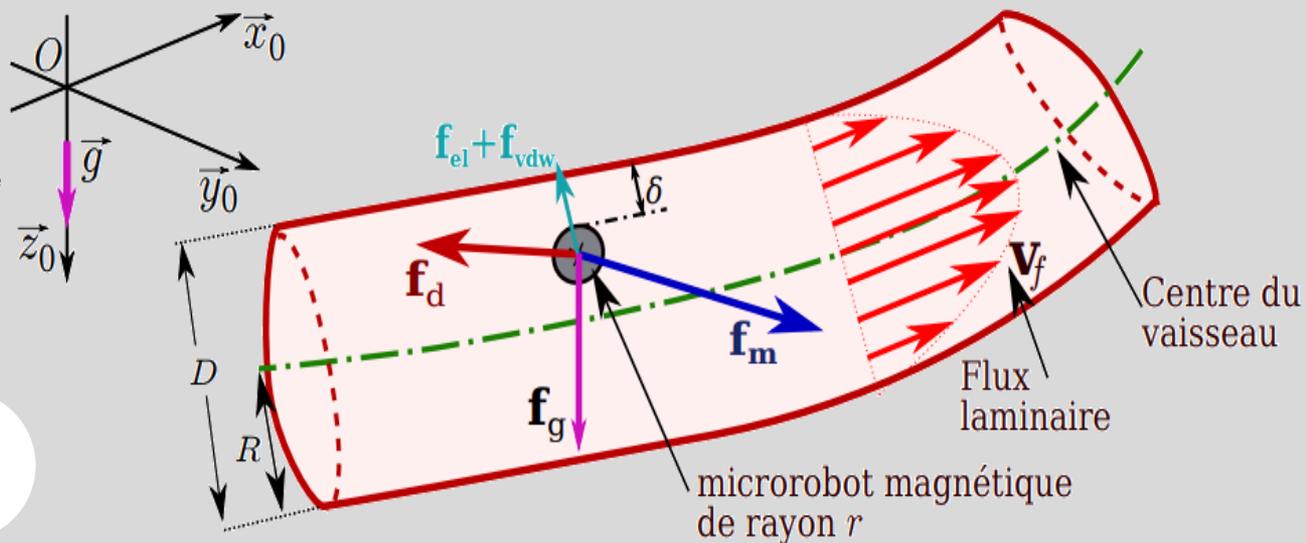


Equation mécanique



On applique le principe fondamental de la dynamique dans un référentiel galiléen (O, x, y, z) et on trouve:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \approx \vec{f}_g + \vec{f}_d + \vec{f}_m$$



Equation mécanique



La projection de ces équations selon les axes (Ox) et (Oy) nous donne avec $\dot{x} = v_x$ et $\dot{y} = v_y$

$$\dot{v}_x = -\frac{9}{2} \frac{\eta_f}{\rho r^2} (v_x - v_{fx}) + \frac{M}{\rho} \frac{\partial b_x}{\partial x}$$

$$\dot{v}_y = -\frac{9}{2} \frac{\eta_f}{\rho r^2} (v_y - v_{fy}) + \frac{M}{\rho} \frac{\partial b_y}{\partial y}$$



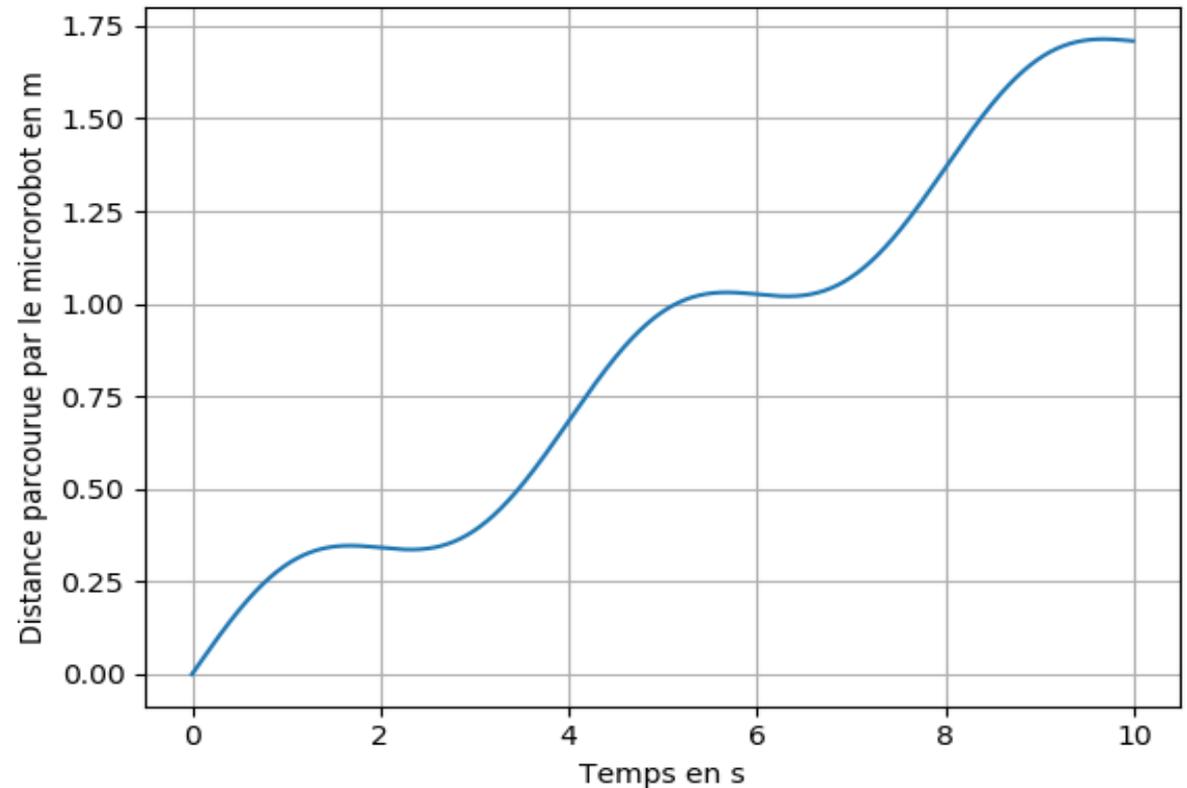
Pour faciliter la résolution du système d'équations on considère le gradient de champ magnétique comme uniforme :

$$\|\nabla b\| = 20 \text{ mT/m}$$

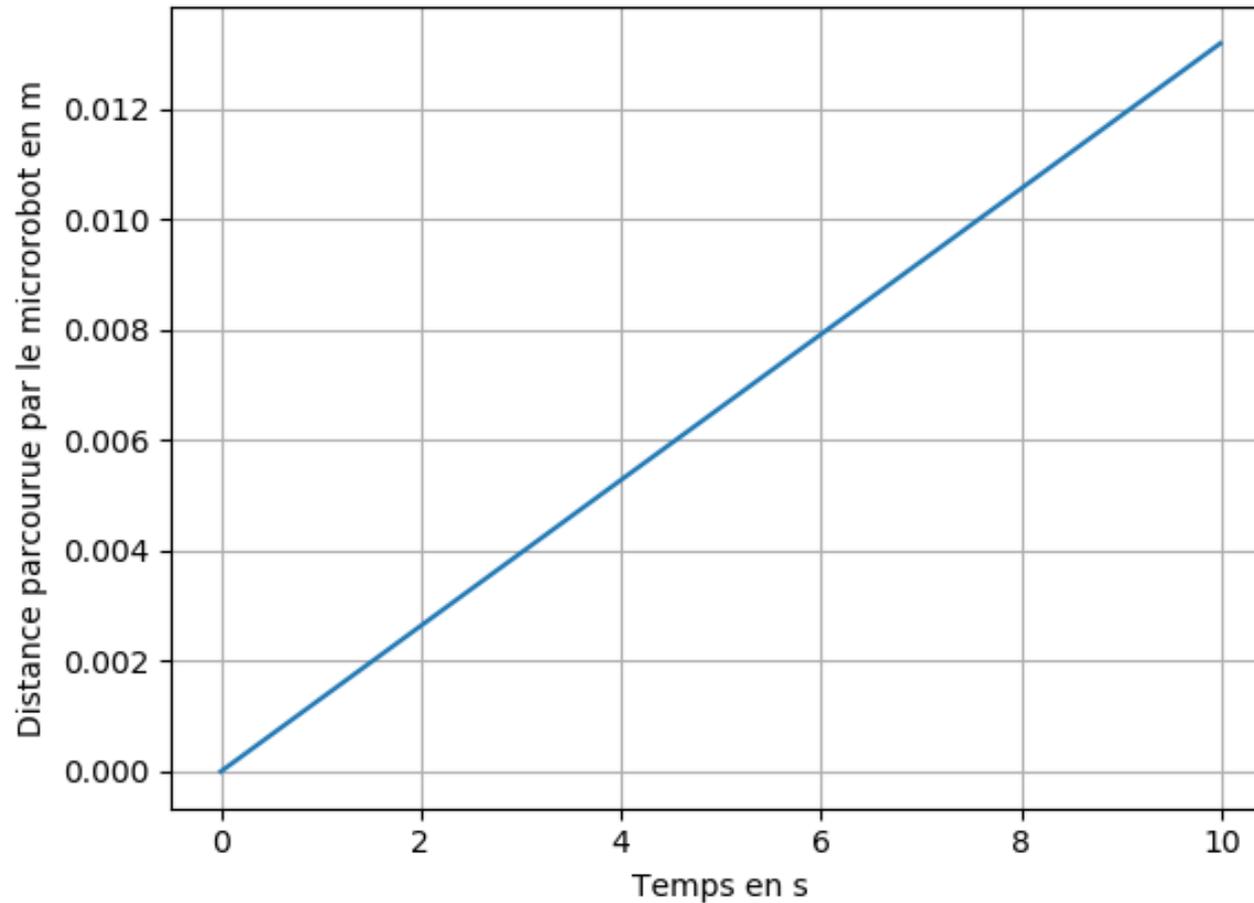
De plus on se limite au cas unidimensionnel (selon l'axe (Ox)).

De plus on suppose le microrobot est en néodyme.

Distance parcourue dans le glycérol pour $v_f = 0,17 \text{ m/s}$



Distance parcourue dans le glycérol pour $v_f = 0 \text{ m/s}$

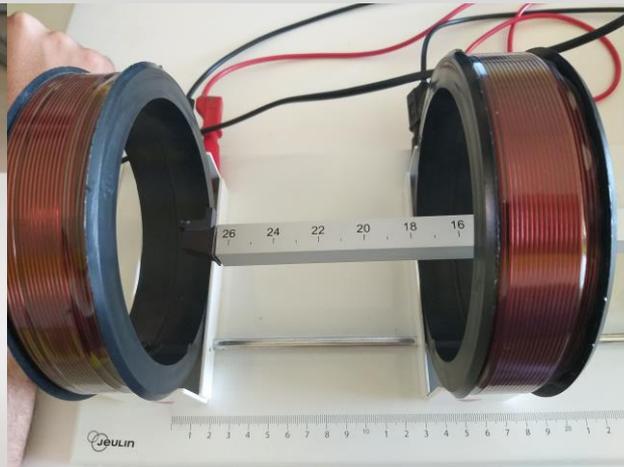
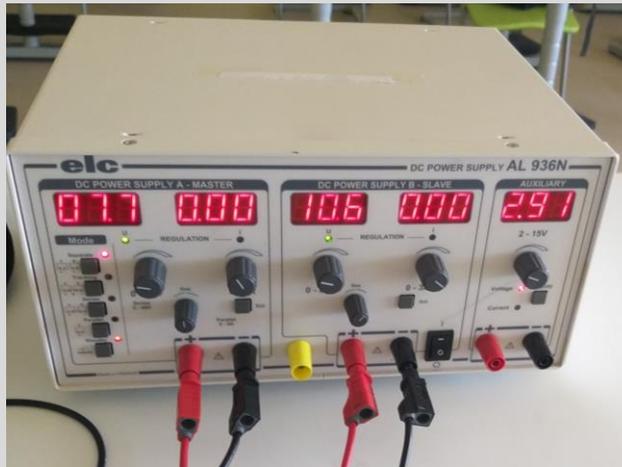




3 Modélisation du microrobot

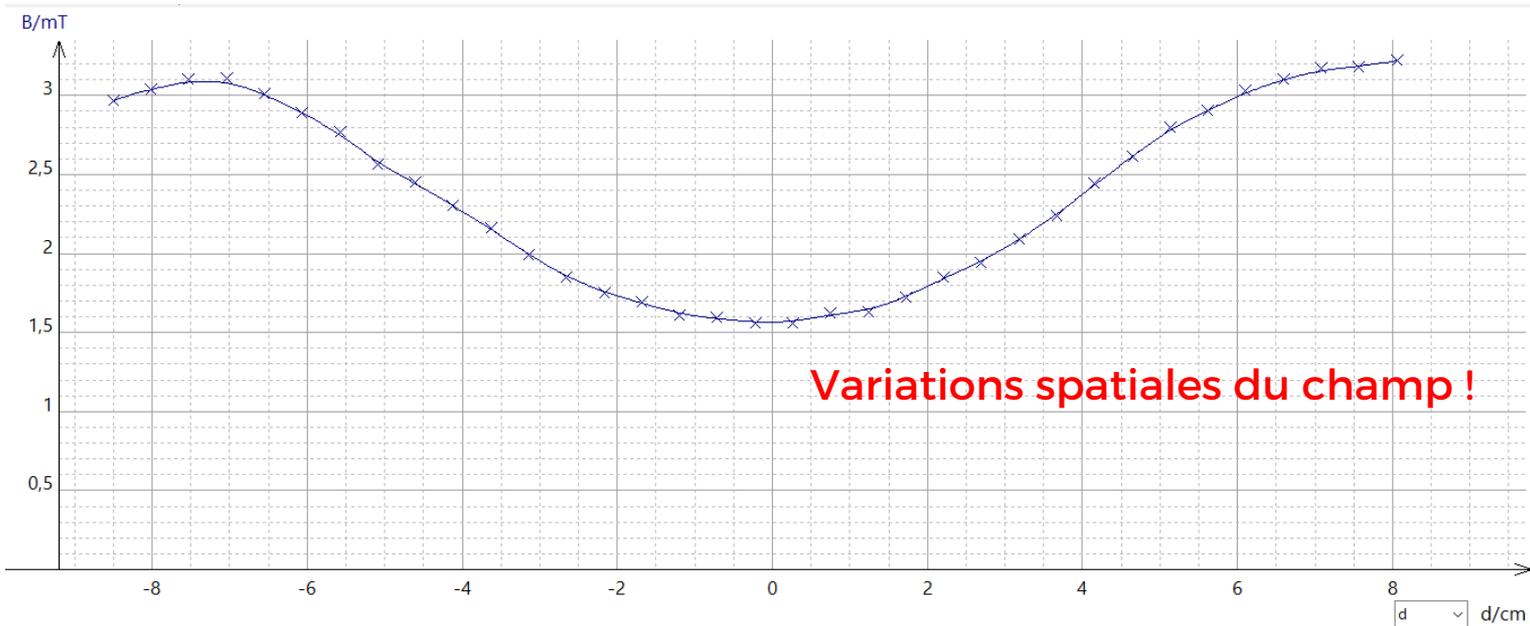


Protocol expérimental

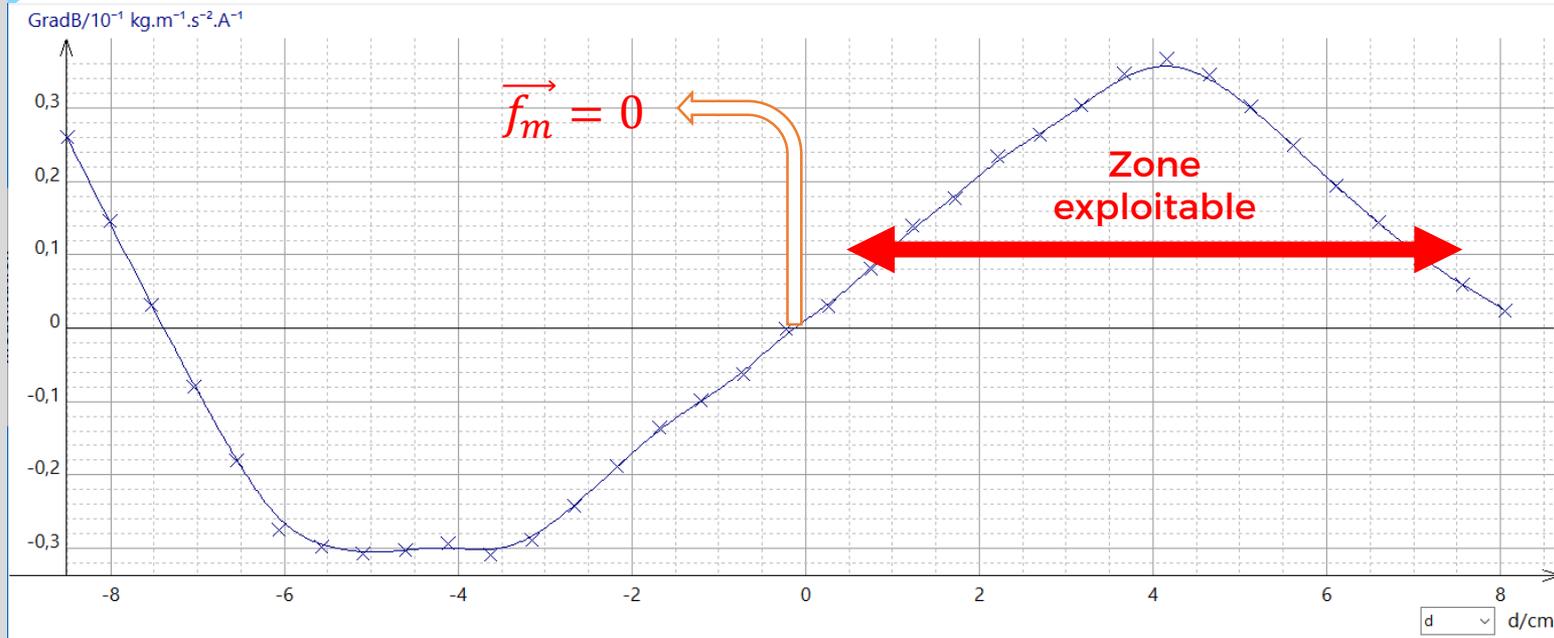




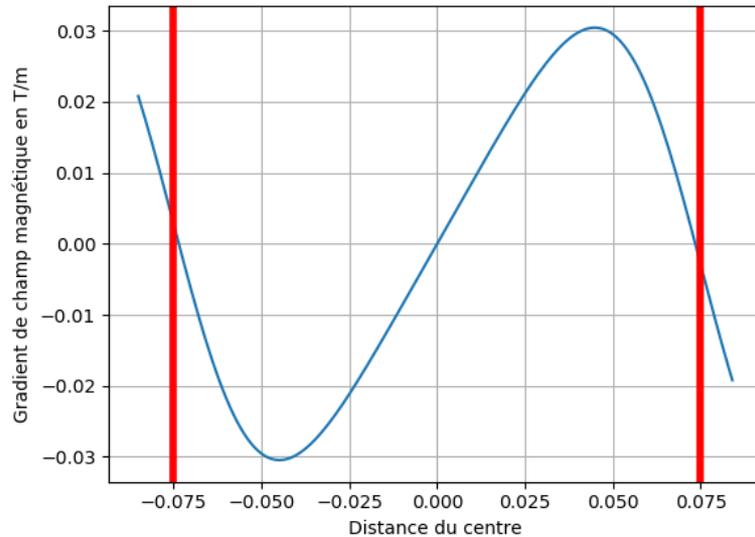
Champ magnétique (15cm)



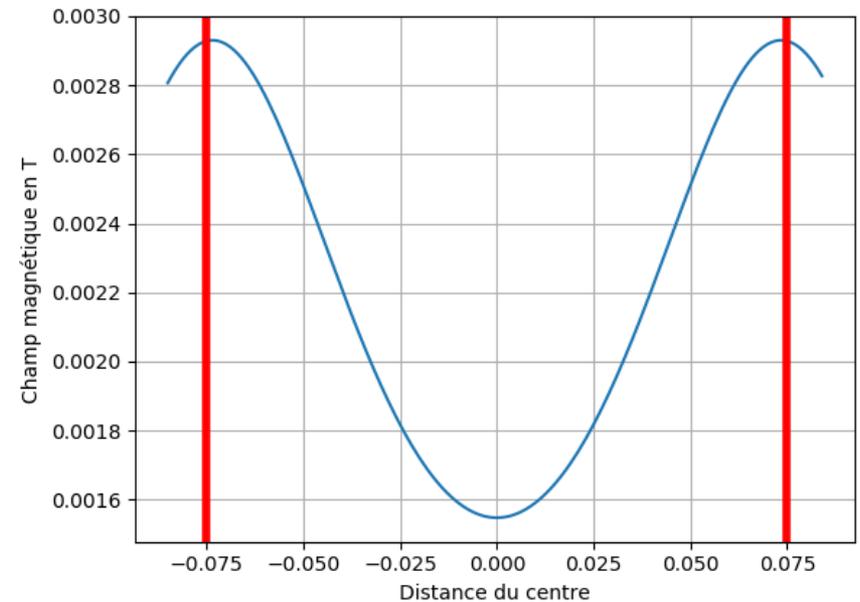
Gradient de champ magnétique (15cm)



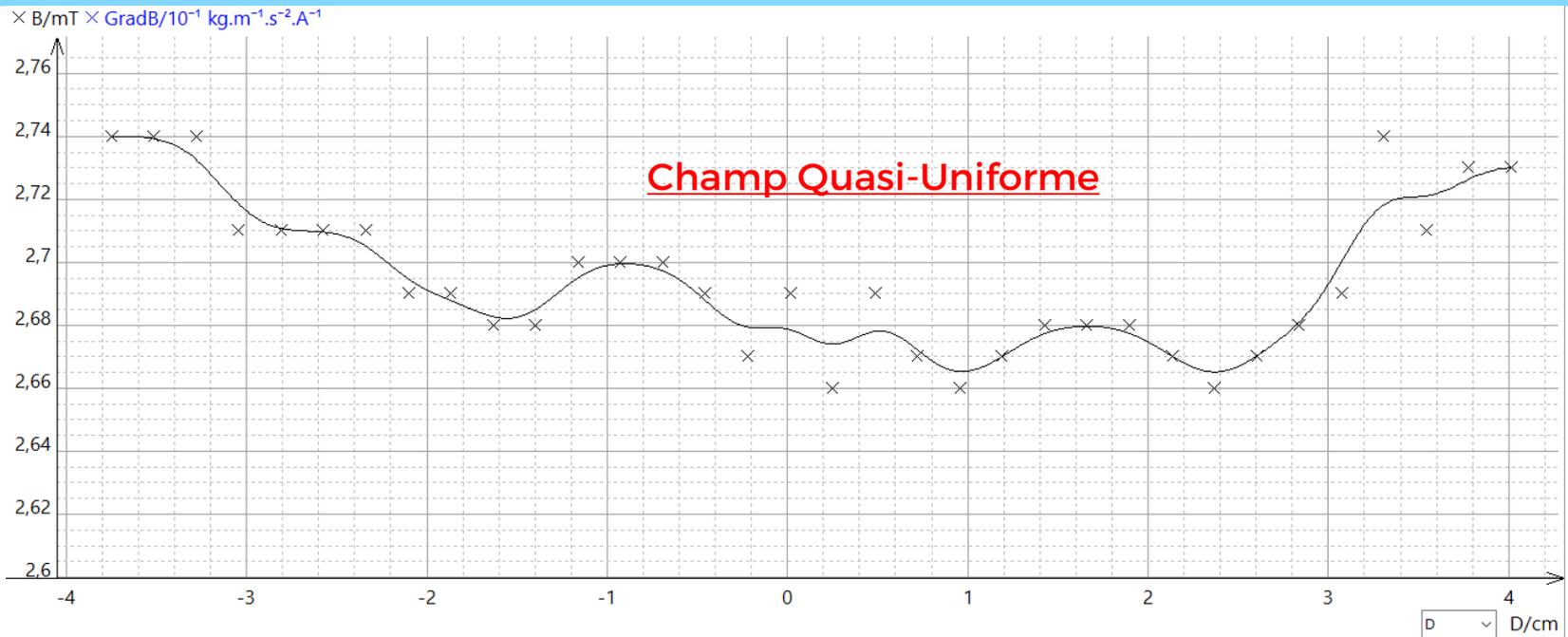
Gradient de champ magnétique



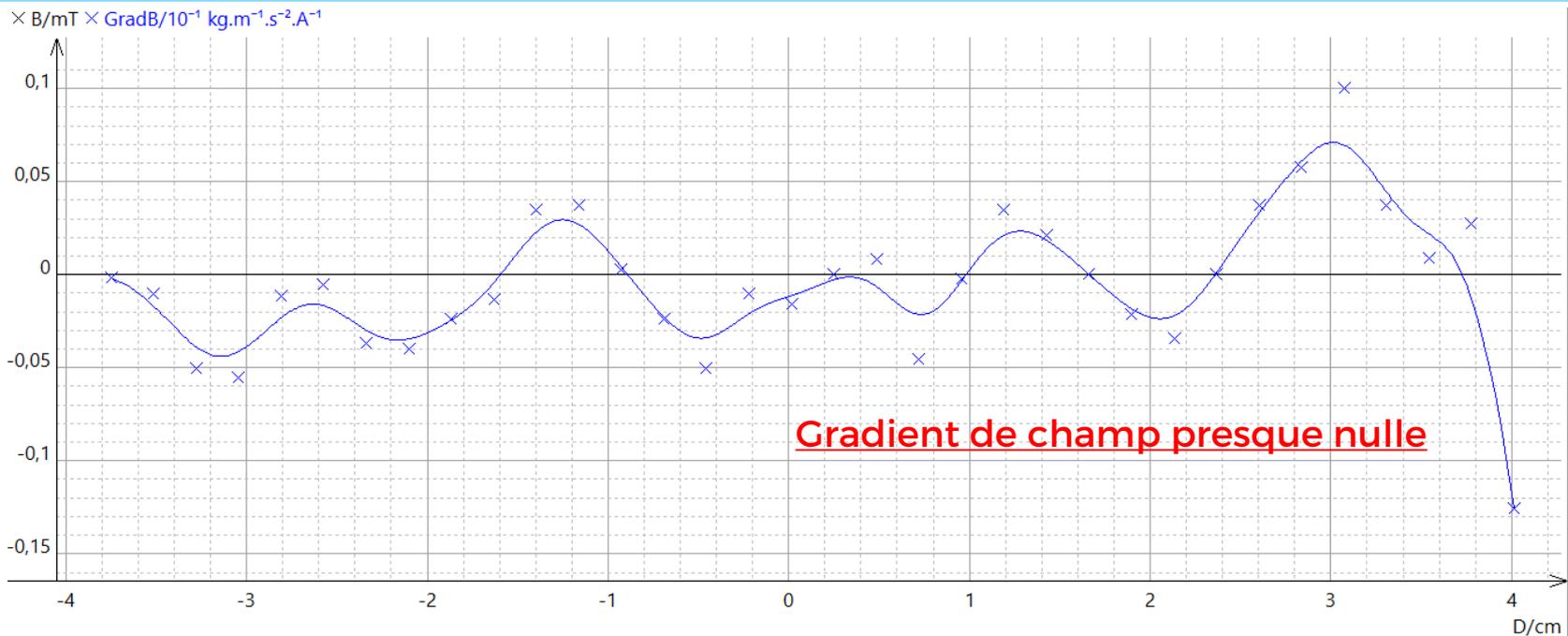
Champ magnétique (15cm)



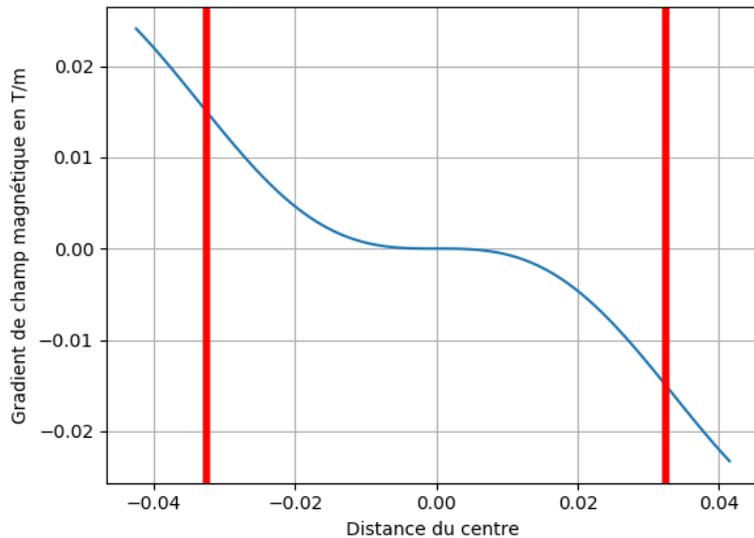
Champ magnétique (6,5 cm)



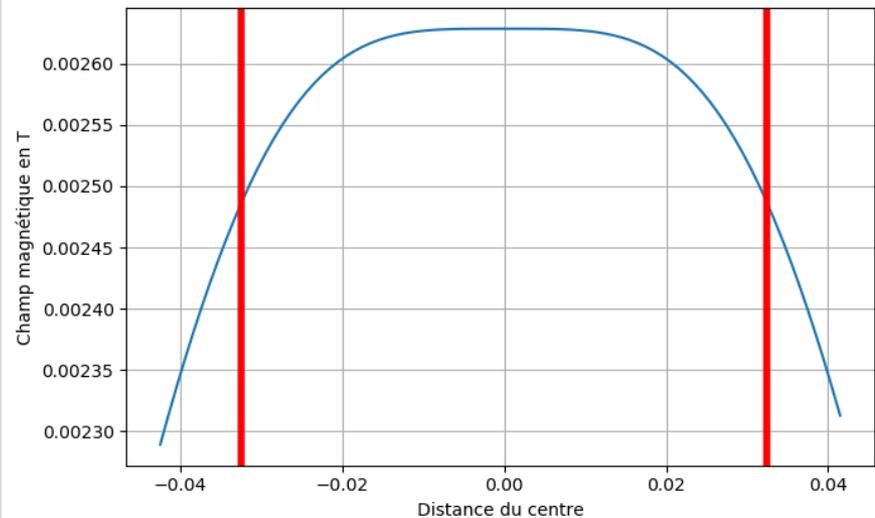
Gradient de champ magnétique (6,5 cm)

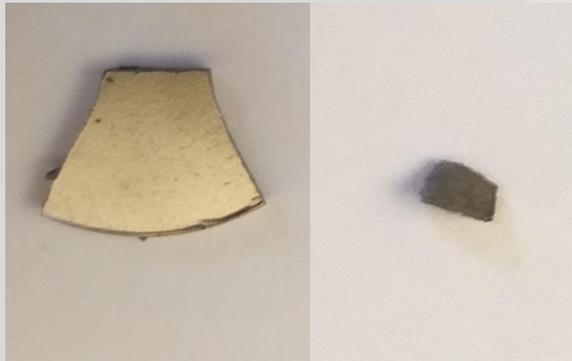


Gradient de champ magnétique

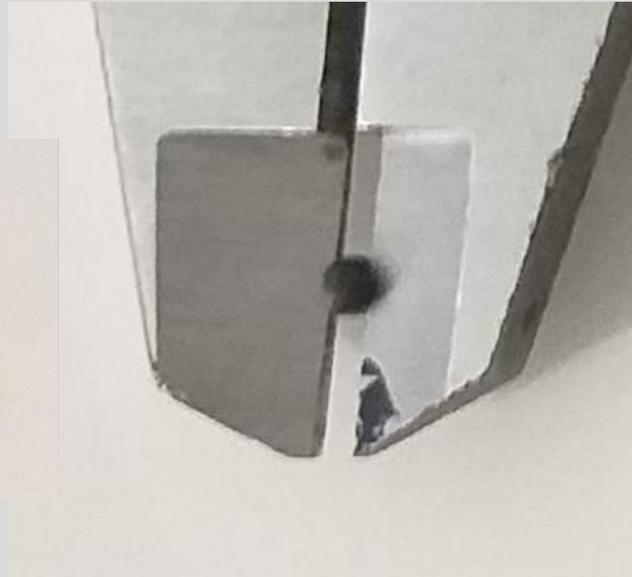


Champ magnétique (6,5 cm)

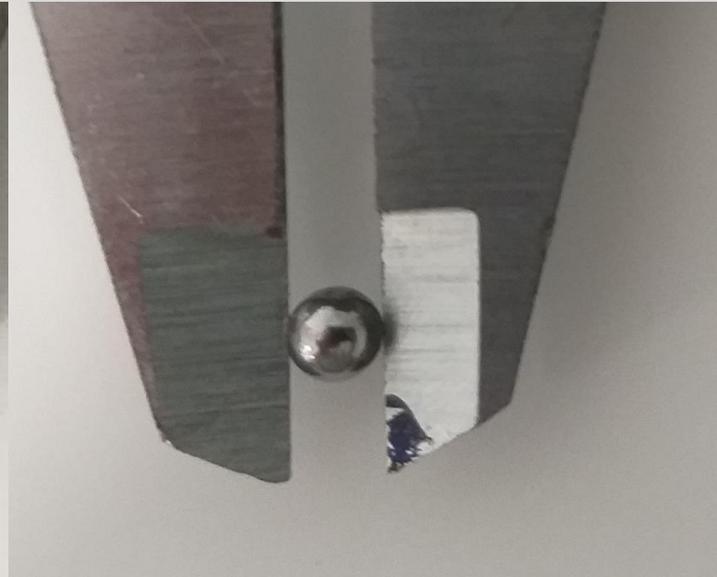




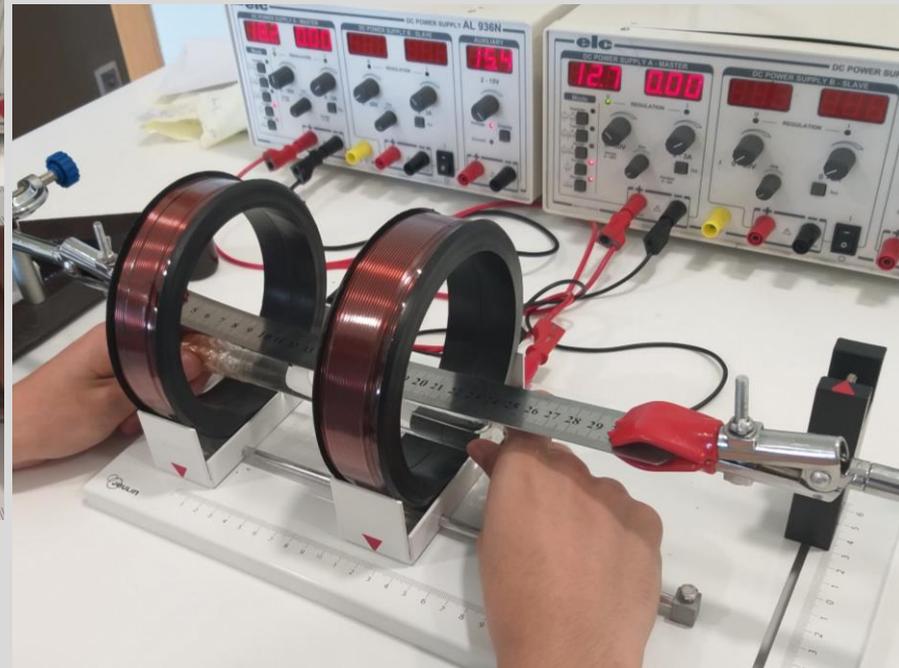
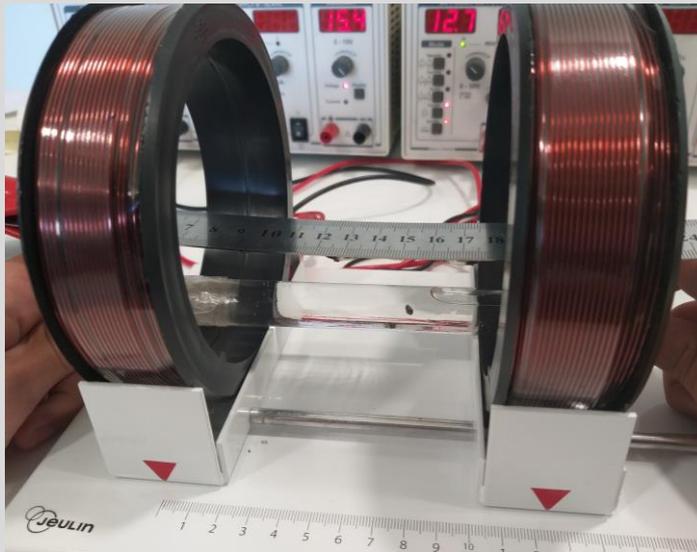
Aimant en néodyme
 $\varnothing = 1 \text{ mm}$



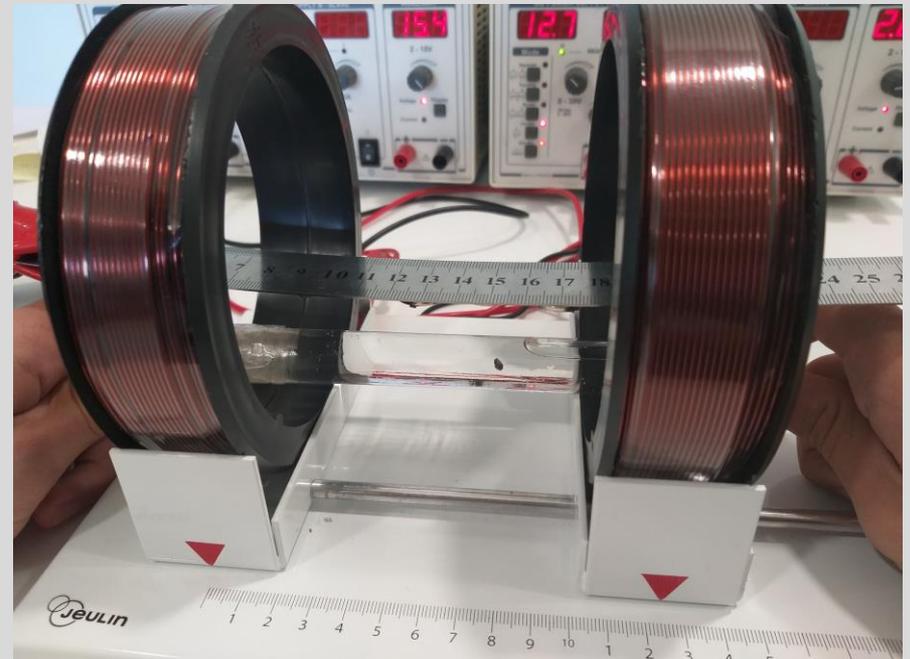
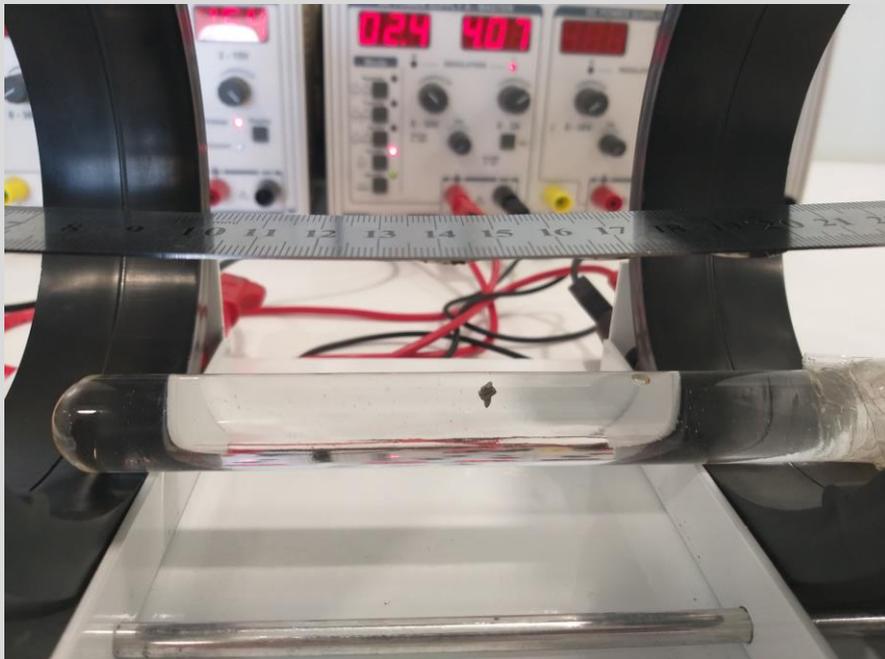
Poudre de fer + Colle
UHU
 $\varnothing = 1,5 \text{ mm}$



Sphère en fer
 $\varnothing = 4,45 \text{ mm}$



Aimant en néodyme + Eau + Bobines De Helmholtz à 12,5 cm



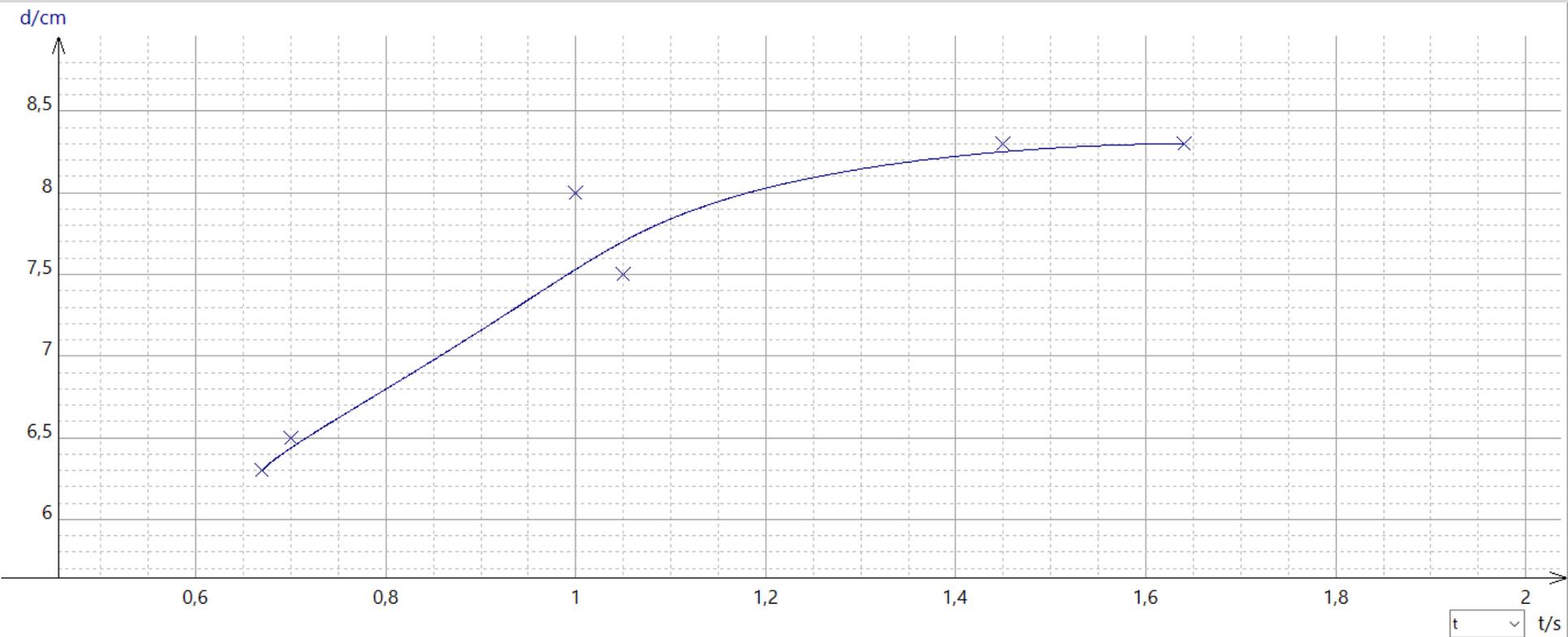
Remarques

- $R_e > 1$. L'étude mécanique proposé n'est plus valable dans l'eau.
- Cependant les valeurs obtenues pour le glycérol indiquent que cette étude est bien transposable dans un vaisseau sanguin (artériole ou capillaire)

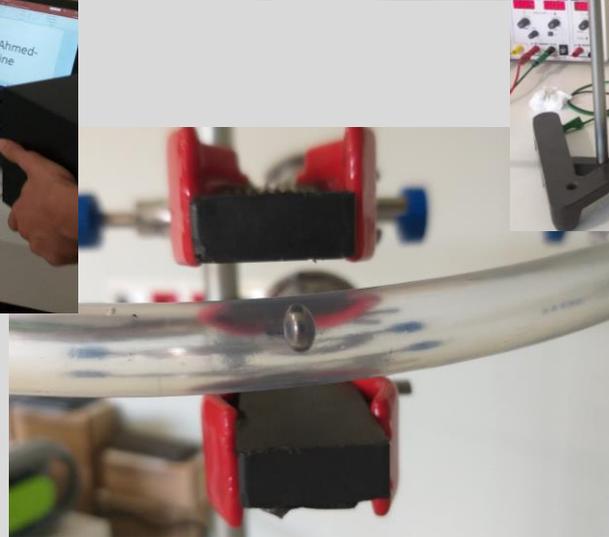
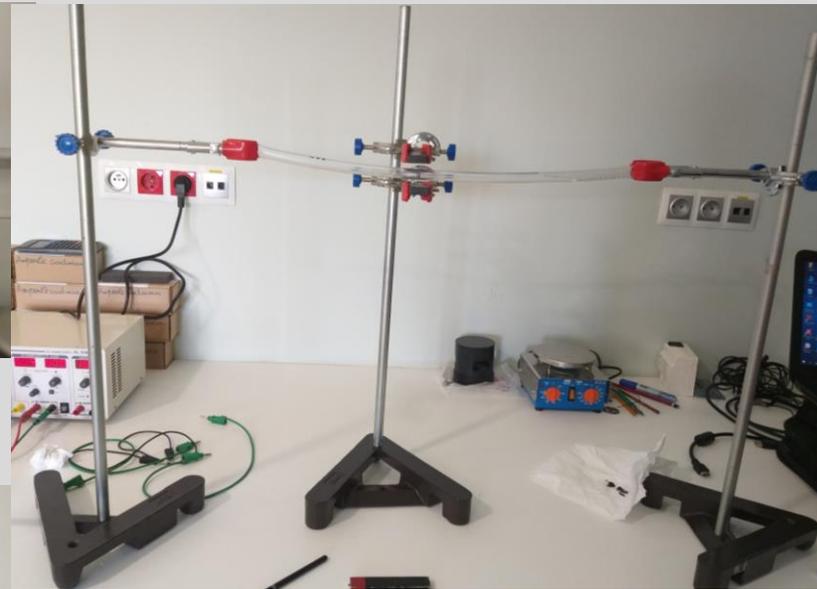
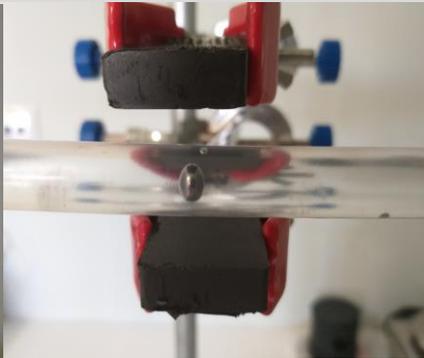
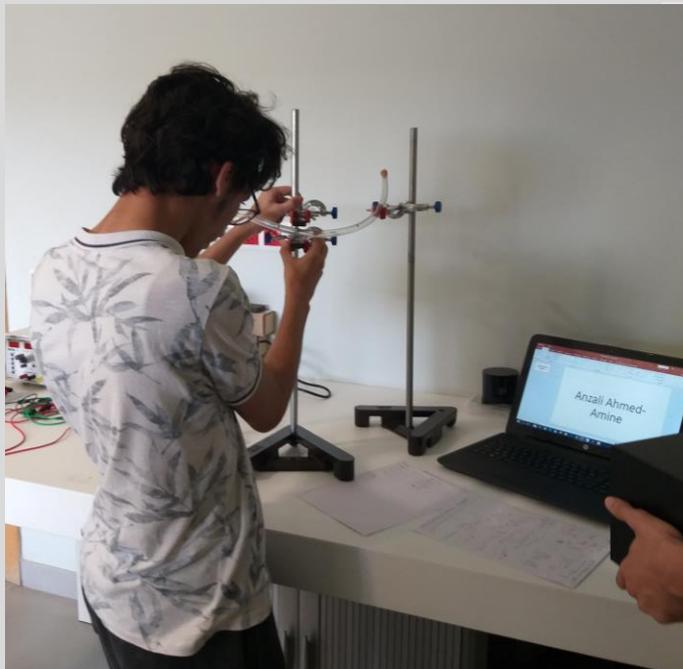
Nombre de Reynolds pour le glycérol ←

← Nombre de Reynolds pour l'eau

t	d	ReyGlyc	ReyEau
s	cm	SansUnité	SansUnité
0,6700	6,300	0,5168	609,4
0,7000	6,500	0,5104	601,8
1,050	7,500	0,3926	462,9
1,000	8,000	0,4397	518,4
1,450	8,300	0,3146	371,0
1,640	8,300	0,2782	328,0

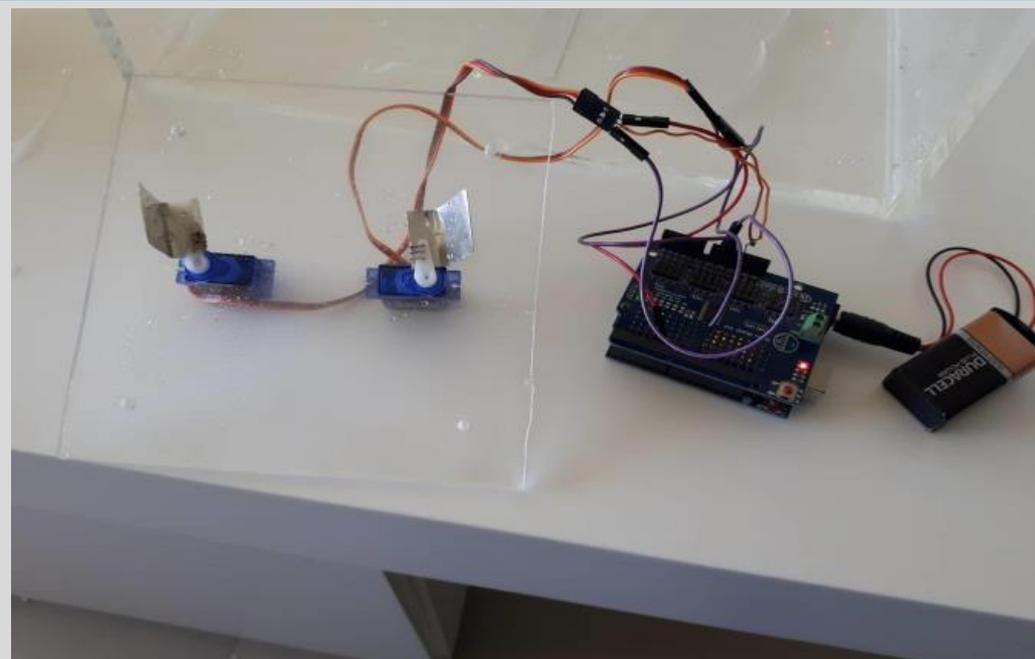


Sphère en fer + Glycérol + Aimants en Ferrite

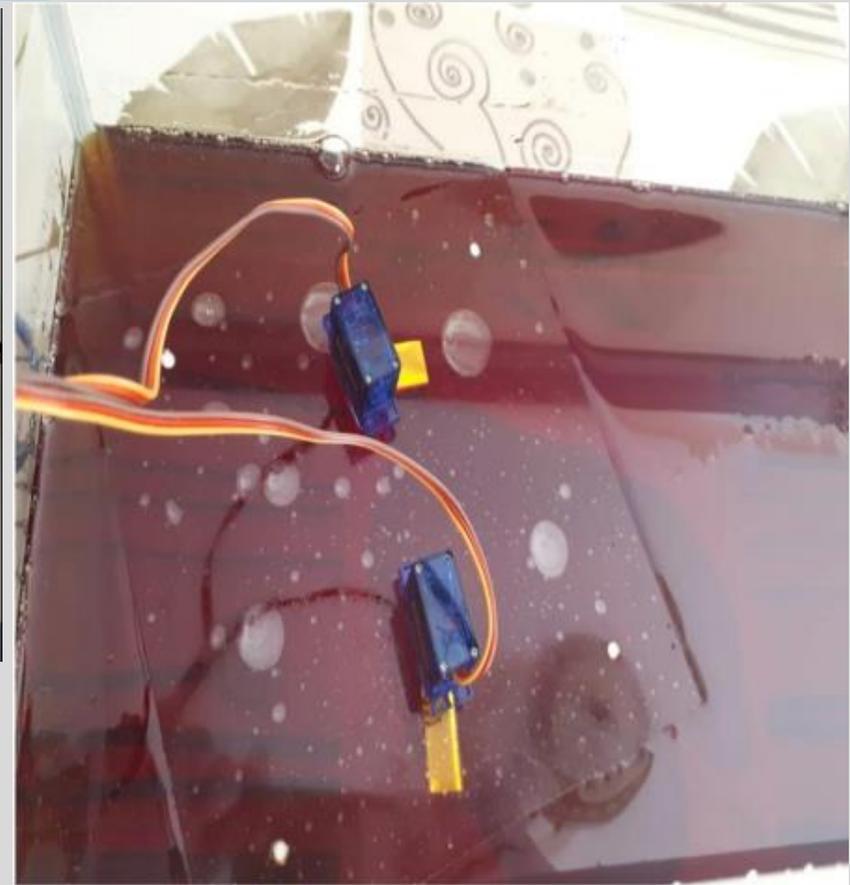


Sphère en fer + Glycérol + Aimants en Ferrite

i	t		d	v	Reynolds
	s		m	m/s	Sansunité
0	0,000		0,000		
1	3,950		0,0160	0,004051	0,02055
2	10,11		0,0160	0,001583	0,00803
3	18,69		0,0160	0,0008561	0,004344
4	26,75		0,0160	0,0005981	0,003035
5	40,66		0,0160	0,0003935	0,001997



2 servomoteurs + une plaque en verre
+ 2 palettes + Carte Arduino





```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3 import scipy.integrate as integr

```

```

5 ## 1.Champ magnetique
6 mu0 = 4*np.pi*1e-7 # Perméabilité magnétique du vide
7 r = 0.065 # Rayon des bobines
8 I = 3 # Intensité du courant
9 a = 95*I*r**2 # Nombre d'enroulement * Courant * Rayon**2
10 d = 0.065 # Distance entre les bobines
11
12 def B(x):
13     return (mu0/2)*a*(((1/((d/2-x)**2+r**2))**(3/2))+((1/((d/2+x)**2+r**2))**(3/2)))
14 def plotB():
15     les_x = np.arange(-d/2-0.01,d/2+0.01,0.001)
16     les_y = [B(x) for x in les_x]
17     plt.plot(les_x,les_y)
18     plt.xlabel('Distance du centre')
19     plt.ylabel('Champ magnétique en T')
20     plt.axvline(x = d/2,linewidth=4, color='r')
21     plt.axvline(x = -d/2,linewidth=4, color='r')
22     plt.grid()
23     plt.show()
24 def gradB(x):
25     return (3*mu0/2)*((a*(((d/2)-x)/(((d/2)-x)**2+r**2))**(5/2))- (a*(((d/2)+x)/(((d/2+x)**2)+r**2))**(5/2)))
26 def plotgradB():
27     les_x = np.arange(-d/2-0.01,d/2+0.01,0.001)
28     les_y = [gradB(x) for x in les_x]
29     plt.plot(les_x,les_y)
30     plt.xlabel('Distance du centre')
31     plt.ylabel('Gradient de champ magnétique en T/m')
32     plt.axvline(x = d/2,linewidth=4, color='r')
33     plt.axvline(x = -d/2,linewidth=4, color='r')
34     plt.grid()
35     plt.show()

```

```

37 ## 2.Trajectoire du microrobot
38 nu = 1.49      # Viscosité du fluide
39 ro = 7500     # Masse volumique de la sphère
40 R = 0.0005    # Rayon de la sphère
41 M = 1.23*1e6  # Aimantation
42 vf , af = 0.17 , 1.15 # Vitesse moyenne du fluide, Amplitude de la première harmonique
43 gradb = 0.02 # Gradient de champ magnétique
44 # On considère dans ce cas que le gradient de champ magnétique est quasi-uniforme (approximation
45 # grossière)
46 def vitessemicrorobot(temps):
47     def f(v,t) :
48         return (-9*nu/(2*ro*R**2))*(v-vf*(1+af*np.sin(np.pi/2*t+np.pi/2))) + M*gradb/ro
49     T = np.arange(0, temps, 0.01)
50     X = integr.odeint(f, 0, T)
51     plt.plot(T,X)
52     plt.grid()
53     plt.xlabel('Temps en s')
54     plt.ylabel('Vitesse du microrobot en m/s')
55     plt.show()
56 def distanceparcourue(temps):
57     def f(x,t) :
58         return np.array([x[1], (-9*nu/(2*ro*R**2))*(x[1]-vf*(1+af*np.sin(np.pi/2*t+np.pi/2))) +
59 M*gradb/ro])
60     T = np.arange(0, temps, 0.01)
61     X = integr.odeint(f, np.array([0,0]), T)
62     plt.plot(T, X[ :,0])
63     plt.grid()
64     plt.xlabel('Temps en s')
65     plt.ylabel('Distance parcourue par le microrobot en m')
66     plt.show()

```

```
69 def flotsanguin():
70     af = 1.15      # Amplitude de la première harmonique
71     wf = np.pi/2  # Pulsation
72     phi = np.pi/2 # Déphasage
73     temps = np.arange(0,10,0.01) # Temps de 0 à 10s
74     vf = [0.02,0.17,0.5] # Vitesse moyenne du flot sanguin pour une artériole 20 mm/s et un capillaire 0.5
m/s
75     for elm in vf:
76         vitesse = [elm*(1+af*np.sin(wf*t+phi)) for t in temps]
77         plt.plot(temps,vitesse, label = elm)
78         plt.legend()
79     plt.xlabel('Temps en s')
80     plt.ylabel('Flot sanguin pulsatile en m/s')
81     plt.grid()
82     plt.show()
```

Démonstration de $\vec{F}_m = V(\vec{M} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$

La force magnétique exercée sur un corps ferromagnétique par un champ magnétique extérieur est :

$$\vec{F}_m = \text{grad}(\vec{m} \cdot \vec{B}(r))$$

où : $\vec{m} = V \cdot \vec{M}$ → aimantation
 ↙ moment magnétique ↘ volume du corps

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A} \wedge (\nabla \wedge \vec{B}) + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + \vec{B} \wedge (\nabla \wedge \vec{A})$$

donc :

$$\vec{F}_m = (\vec{m} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{m} \wedge (\nabla \wedge \vec{B}) + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{m} + \vec{B} \wedge (\nabla \wedge \vec{m})$$

↑ en ne considérant que \vec{m} ne dépend pas de la position r

$$\nabla \wedge \vec{m} = \vec{0} \quad (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{m} = 0$$

donc : $\vec{F}_m = (\vec{m} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{m} \wedge (\nabla \wedge \vec{B})$

↑ D'après l'équation de Maxwell-Ampère

$$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$$

↑ En supposant \vec{E} indépendant du temps

↑ Le milieu étant non conducteur $\vec{j} = \vec{0}$

donc : $\nabla \wedge \vec{B} = \vec{0}$

Ainsi : $\vec{F}_m = (\vec{m} \cdot \nabla) \vec{B}$

$$\boxed{\vec{F}_m = V(\vec{M} \cdot \nabla) \vec{B}}$$

Démonstration du champ créé par les bobines de Helmholtz

→ on détermine d'abord le champ créé par une spire circulaire:

D'après la loi de Biot et Savart le champ magnétique au point $M(x, 0, 0)$:

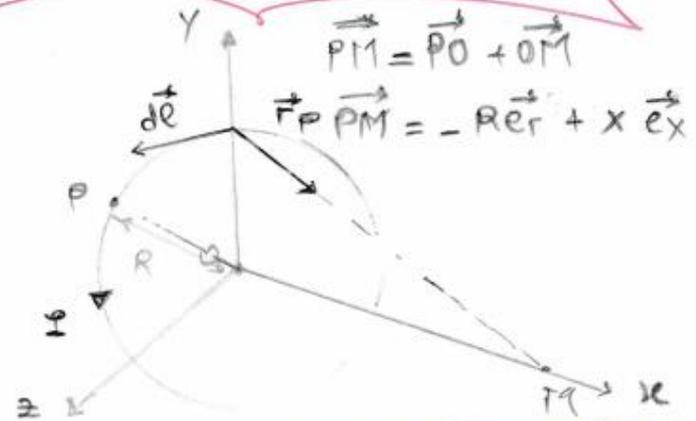
$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{e} \wedge \vec{PM}}{PM^3}$$

symétries: La distribution de courant admet tout plan passant par l'axe (Ox) comme axe d'antisymétrie. Il y a donc des axes de symétrie du champ magnétique \vec{B} ;

$$\vec{B} = \|\vec{B}\| \vec{e}_x$$

calcul:

$$d\vec{e} \wedge \vec{PM} = \begin{vmatrix} 0 & R d\theta & 0 \\ R d\theta & 0 & x \\ 0 & x & R^2 d\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -R & x R d\theta \\ 0 & 0 \\ x & R^2 d\theta \end{vmatrix}$$



On se place en coordonnées cylindriques $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_x)$

donc:
$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{-R^2 d\theta}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \vec{e}_x$$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 i}{2} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \vec{e}_x$$

champ créé par n spires:

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 n i}{2} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \vec{e}_x$$

B Annexe 2 Démonstration

o Le champ magnétique d'une bobine de n spires dont le plan de la bobine est centré en :

$$x = +\frac{R}{2} : \vec{B}_1(M) = \frac{\mu_0 n I}{2} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + (\frac{d}{2} - x)^2)^{3/2}} \vec{e}_x$$

$$x = -\frac{R}{2} :$$

$$\vec{B}_2(M) = \frac{\mu_0 n I}{2} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + (\frac{d}{2} + x)^2)^{3/2}} \vec{e}_x$$

D'après le théorème de superposition,

$$\vec{B}(M) = \vec{B}_1(M) + \vec{B}_2(M)$$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 n I R^2}{2} \left(\frac{1}{(R^2 + (\frac{d}{2} - x)^2)^{3/2}} + \frac{1}{(R^2 + (\frac{d}{2} + x)^2)^{3/2}} \right) \vec{e}_x$$

$$\text{grad } B(M) = \frac{3\mu_0 n I R^2}{2} \left[-\frac{x + d/2}{(R^2 + (\frac{d}{2} + x)^2)^{3/2}} + \frac{\frac{d}{2} - x}{(R^2 + (\frac{d}{2} - x)^2)^{3/2}} \right] \vec{e}_x$$

Bobines de Helmholtz :

