

NOM : <b>BENNDUNA</b>	Prénoms : <b>Mohammed Amine</b>
Classe : <b>MP*</b>	
Lycée : <b>Louis Le Grand</b>	Numéro de candidat : <b>14804</b>
Ville : <b>Paris</b>	

Concours auxquels vous êtes admissible, dans la banque MP inter-ENS (les indiquer par une croix) :

ENS Cachan	MP - Option MP	<input checked="" type="checkbox"/>	MP - Option MPI	<input type="checkbox"/>
	Informatique	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>
ENS Lyon	MP - Option MP	<input checked="" type="checkbox"/>	MP - Option MPI	<input type="checkbox"/>
	Informatique - Option M	<input type="checkbox"/>	Informatique - Option P	<input type="checkbox"/>
ENS Rennes	MP - Option MP	<input checked="" type="checkbox"/>	MP - Option MPI	<input type="checkbox"/>
	Informatique	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>
ENS Paris	MP - Option MP	<input checked="" type="checkbox"/>	MP - Option MPI	<input type="checkbox"/>
	Informatique	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>

Matière dominante du TIPE (la sélectionner d'une croix inscrite dans la case correspondante) :

Informatique	<input type="checkbox"/>	Mathématiques	<input type="checkbox"/>	Physique	<input checked="" type="checkbox"/>
--------------	--------------------------	---------------	--------------------------	----------	-------------------------------------

Titre du TIPE : **La Goutte du Prince Rupert**

Nombre de pages (à indiquer dans les cases ci-dessous) :

Texte	<b>4</b>	Illustration	<b>6</b>	Bibliographie	<b>1</b>
-------	----------	--------------	----------	---------------	----------

Résumé ou descriptif succinct du TIPE (6 lignes, maximum) :

La Goutte du Prince Rupert est une goutte de verre caractérisée par deux propriétés surprenantes : elle est très résistante au niveau de sa tête, mais elle explose instantanément dès qu'on exerce une légère pression sur sa queue. Je me suis intéressé à l'étude des propriétés de la goutte à travers l'analyse du procédé de fabrication, l'étude de l'explosion à l'aide de caméras ultra rapides, et l'estimation des contraintes dans la goutte.

À <b>Paris</b>	Signature du professeur responsable de la classe préparatoire dans la discipline	Cachet de l'établissement
Le <b>08/06/2016</b>		
Signature du (de la) candidat(e)	<b>M. Souvage</b> Professeur de Physique	

# La Goutte Du Prince Rupert

La Goutte du Prince Rupert est une goutte de verre obtenue en versant du verre en fusion dans de l'eau froide. Elle a été découverte vers 1625 à Mecklenburg. Elle a deux propriétés remarquables : sa très grande résistance au niveau de sa tête et le fait qu'elle explose instantanément lorsqu'on exerce une légère pression sur sa queue. Cela lui valut une grande popularité à l'époque. Le Prince Rupert de Bavière l'apporta en Angleterre et la présenta au prince Charles II qui à son tour la communiqua à la Royal Society pour expliquer ses propriétés. Depuis quelques recherches furent effectuées à son sujet : Marrett (1662), Hooke (1665), De Luynes (1873), Chaudhri et Chandrasekar (1994, 2010, 2011). Je me suis ainsi proposé d'étudier les propriétés de la goutte.

## Fabrication

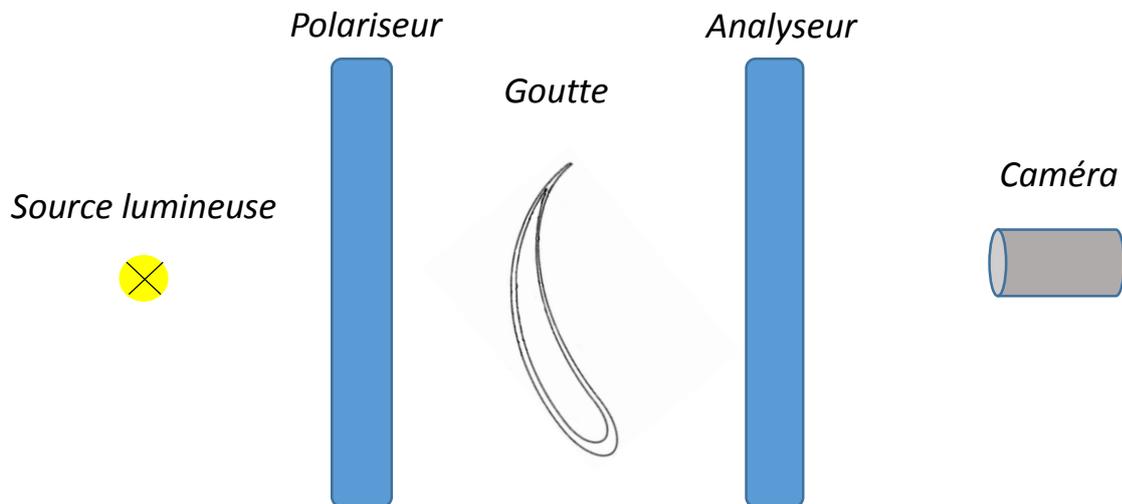
Pour fabriquer des gouttes, j'ai eu recours à deux méthodes différentes. La première consiste à utiliser un chalumeau pour chauffer le bout d'un tube de verre au-dessus d'un récipient contenant de l'eau et attendre qu'une goutte de verre tombe dans l'eau. La deuxième consiste à utiliser un four pour faire chauffer du verre et puis le plonger dans de l'eau froide. Les gouttes obtenues par la première méthode étaient beaucoup plus petites que celles obtenues par la deuxième. J'ai constaté qu'une goutte sur deux explose dans l'eau et que toutes les gouttes avaient des bulles au niveau de leur tête.



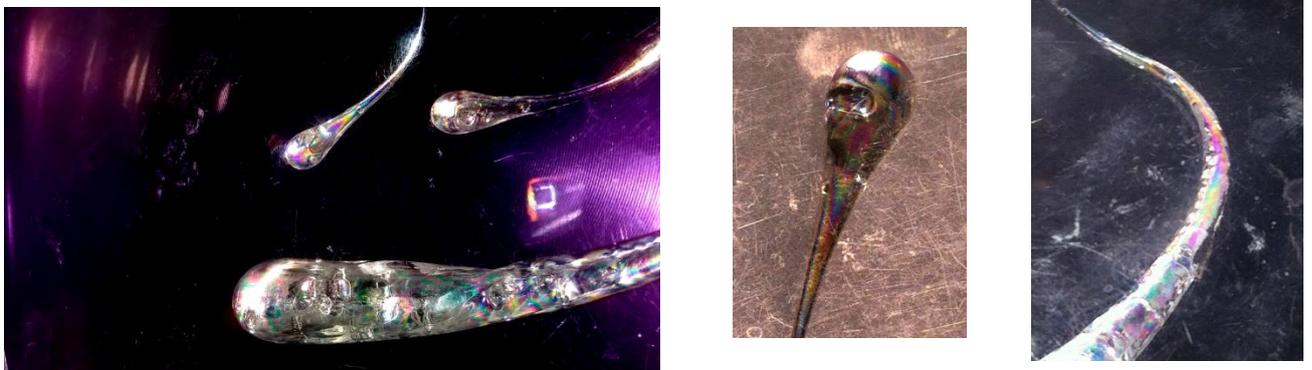
**Fig 0** – Exemple de gouttes que j'ai obtenues par les deux méthodes

## Contraintes dans la goutte

Une première remarque que j'ai faite est l'analogie avec le phénomène de la trempe thermique. Le procédé de fabrication des gouttes ressemble fortement à celui de la trempe. Les propriétés du verre trempé sont dues aux contraintes formées lors de sa fabrication. Une première hypothèse fut donc que les phénomènes observés sont dus à des contraintes dans la goutte. Pour vérifier cela j'ai procédé par photoélasticimétrie sur les gouttes : j'envoie de la lumière polarisée sur les gouttes et je les observe à travers un analyseur (**Fig1**). J'ai ainsi observé des isochromatiques, preuve de l'existence de contraintes à l'intérieur de la goutte (**Fig2**). Pour expliquer la présence de contraintes, on suit l'évolution de la goutte lors de la fabrication : après avoir trempé la goutte dans l'eau, la couche extérieure, en contact avec l'eau, refroidit rapidement et se solidifie. Le cœur de la goutte, piégé à l'intérieur de la surface, refroidit plus lentement (le verre est un mauvais conducteur thermique  $\lambda = 1.2 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ). Une fois la surface extérieure solide, le cœur se contracte en refroidissant, mais celui-ci est confiné dans le volume déterminé par la couche extérieure solide. Le cœur se retrouve ainsi sous contraintes de tension, et la surface extérieure sous contraintes de compression. Ces contraintes sont le phénomène clé sur lequel repose l'explication des propriétés de la goutte.



**Fig 1** – Procédé expérimental utilisé pour vérifier l'existence de contraintes dans la goutte (Photoélasticimétrie).



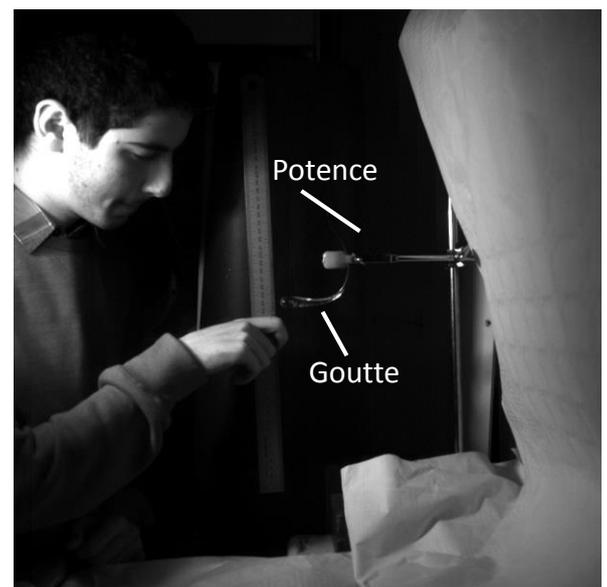
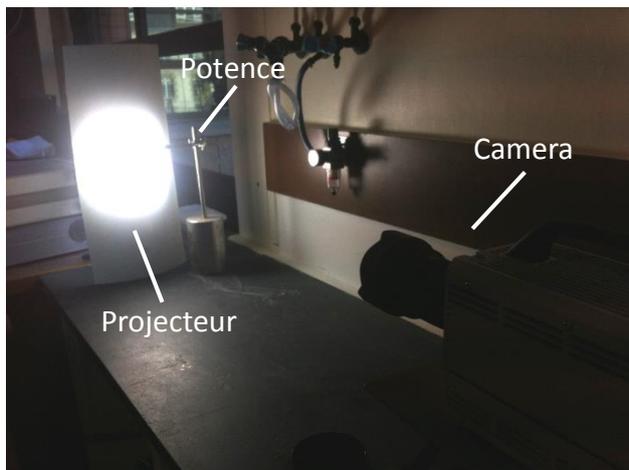
**Fig 2** – Photos prises par la caméra lors de la photoélasticimétrie, on observe des isochromatiques ce qui révèle la présence de contraintes.

## Résistance de la tête

On est ainsi en mesure d'expliquer la résistance de la tête de la goutte avec les contraintes dans sa couche extérieure. En imaginant une fracture fictive qui se crée à la surface de la goutte, on trouve que les forces sur la fracture tendent à la refermer. Ainsi une force susceptible de briser la goutte doit non seulement être suffisamment forte pour briser du verre ordinaire mais aussi pour contrer les contraintes. C'est ainsi que s'explique la résistance de la tête de la goutte.

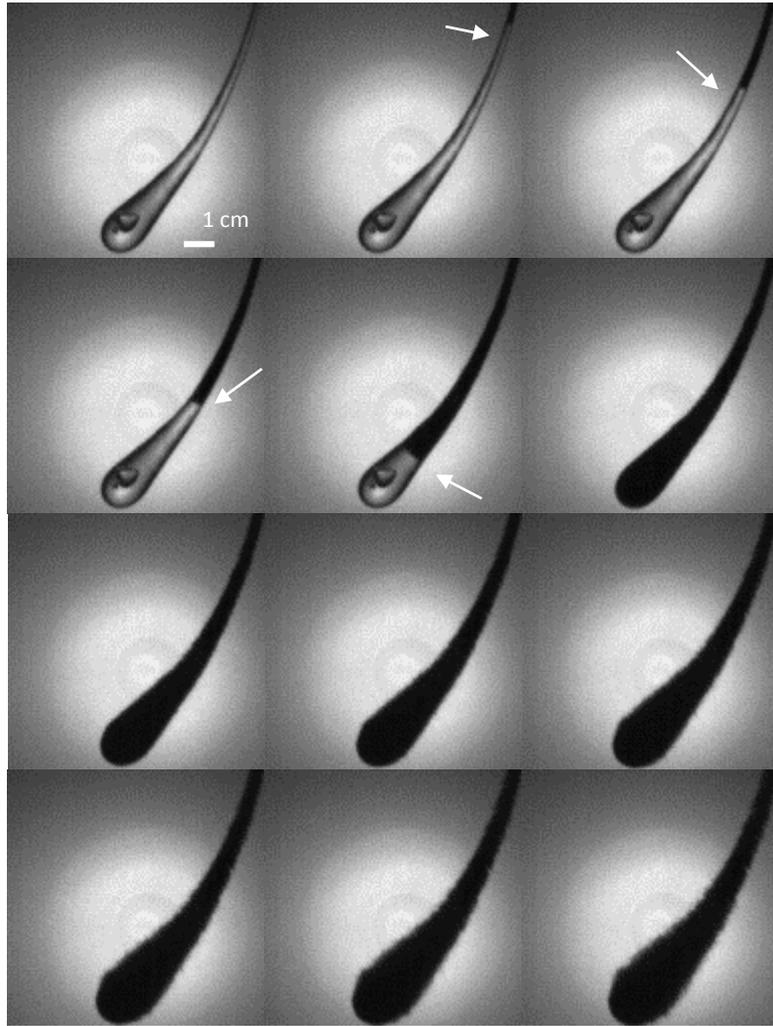
## Etude de l'explosion de la goutte

Pour étudier l'explosion de la goutte, j'ai voulu l'observer avec des caméras à très grande vitesse. J'ai contacté pour cela les chercheurs du laboratoire de physique statistique de l'ENS de Paris qui m'ont accueilli et m'ont fourni une caméra pouvant aller jusqu'à **150 000 fps** (FASTCAM-APX RS model 250K). J'ai effectué plusieurs séries de prises (6 prises au total, deux fois à **60 000fps**, une fois à **125 000**, et deux fois à **150 000**) et j'ai pu ainsi observer la propagation de la fracture de la queue de la goutte à sa tête. Les séquences m'ont permis de mesurer la vitesse de propagation de la fracture et la vitesse des fragments projetés. Une prise effectuée à 60 000fps est représentée **Fig 6-7**. (D'autres prises effectuées, à 125 000 et 150 000fps, sont données en annexe **Fig 11-12**.)

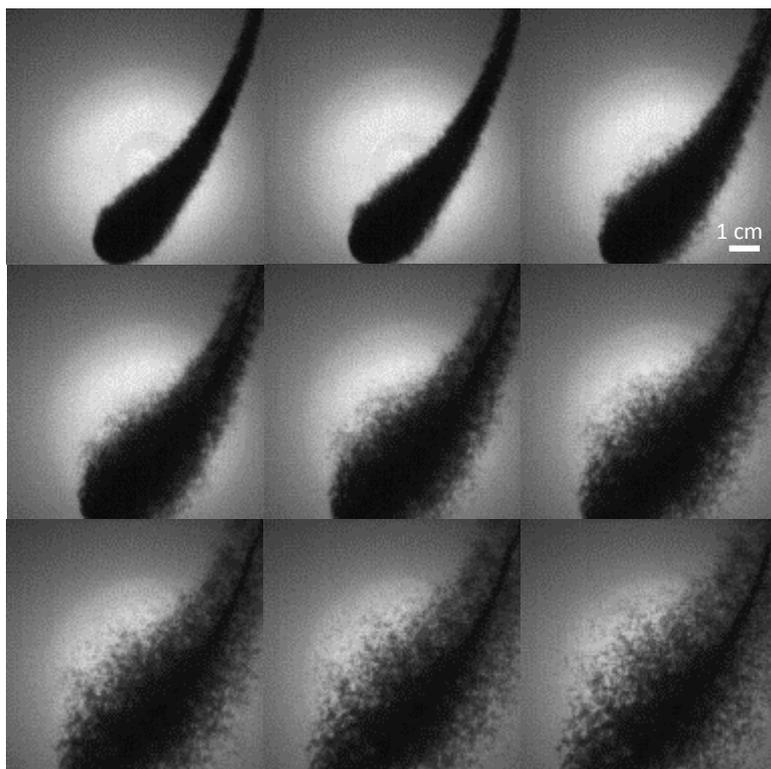


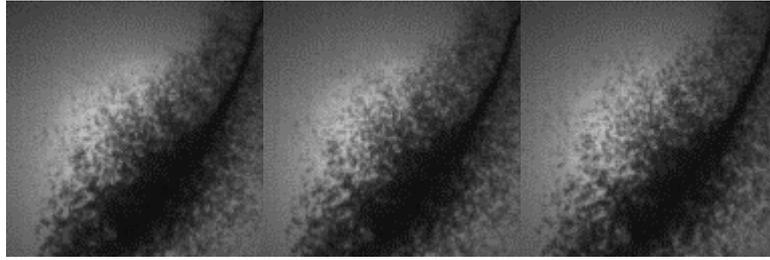
**Fig 5** – (à gauche) Procédé expérimental pour filmer l'explosion des gouttes, (à droite) prise faite pour avoir une échelle.

On constate à travers les séquences qu'une fracture se propage de la queue à la tête de la goutte. La propagation de cette « onde de fracture » est observable dans les séquences. A l'aide des différentes prises effectuées, j'ai mesuré la vitesse de propagation de la fracture :  $v \approx 1300 \text{ ms}^{-1}$  à  $1400 \text{ ms}^{-1}$  avec une incertitude de  $\pm 100 \text{ ms}^{-1}$  (le tableau de mesures est donné en annexe, **Tab1**). J'ai également mesuré la vitesse de propagation des fragments :  $v_{\text{fragment}} \approx 40 \text{ ms}^{-1}$  pour la majorité des fragments. Il faut noter que certains fragments, notamment au centre de la goutte, avaient des vitesses très inférieures.



**Fig 6** – Séquence à 60 000fps, interframe = 16.7  $\mu$ s, le front de l'onde de fracture est indiqué par la flèche. (Lecture de gauche à droite).





**Fig 7** – Suite de la séquence de Fig 6 accélérée, Interframe = 116.9 $\mu$ s.

## Etude des fragments

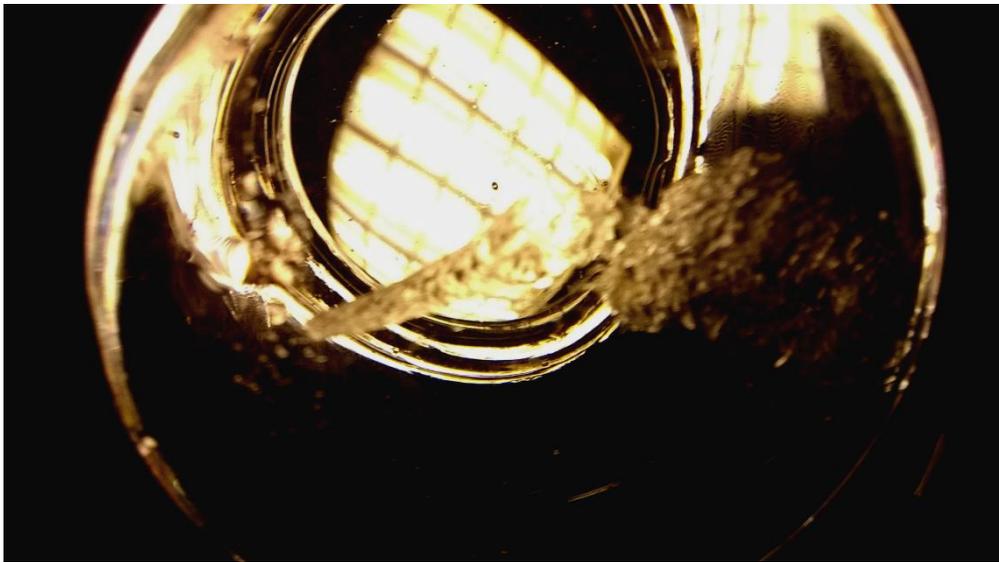
Pour pouvoir finalement énoncer un modèle de propagation de la fracture, j'ai étudié les fragments issus de l'explosion. J'ai mesuré une taille de l'ordre du  $10^{-1}$ mm et une masse de l'ordre du  $10^{-3}$ g. J'ai remarqué que la majorité des fragments étaient en forme de V ce qui suggère que la propagation se fait par bifurcation (**Fig 8**). Pour pouvoir examiner plus en détail la forme de la propagation de la fracture, j'ai tenté d'amorcer l'explosion d'une goutte trempée dans du glycérol en espérant que la grande viscosité du glycérol maintiendrait les fragments solidaires après la propagation de la fracture, ce qui permettrait d'observer la forme de la propagation et éventuellement confirmer l'hypothèse de bifurcations énoncée précédemment. J'ai effectué l'expérience sur de petites et de grosses gouttes (obtenues avec les deux méthodes de fabrication). Pour les petites gouttes, après la propagation de la fracture, plusieurs bouts de la goutte se détachent, mais une bonne partie reste solidaire. Il a été difficile d'observer les fractures dans le cœur de la goutte étant donné sa taille, mais j'ai pu observer leur forme au niveau de la couche extérieure (**Fig 9**). Celles-ci étaient sous la forme de traits quasi-horizontaux, la goutte étant placée verticalement (cela ne contredit pas l'hypothèse de bifurcations car elle ne concerne que le cœur de la goutte). Pour les grosses gouttes, l'explosion était trop puissante et a complètement détruit le bécher où a été effectuée l'expérience. Néanmoins, j'ai pu récupérer quelques blocs encore solidaires après explosion (**Fig 10**). L'observation de l'intérieur de ces blocs permet de confirmer l'hypothèse de bifurcations. Je retrouve d'ailleurs la même forme des fractures au niveau de la couche extérieure que celles dans l'expérience avec les petites gouttes.

## Modèle de propagation

Je peux finalement énoncer un modèle de propagation : une fois la fracture amorcée au niveau de la queue, elle crée une onde de fracture qui se propage le long de la goutte, à une très grande vitesse  $v \approx 1300 \text{ ms}^{-1}$  à  $1400 \text{ ms}^{-1}$ , sous forme de bifurcations successives qui s'arrêtent et se transforment en simples traits verticaux au niveau de la couche extérieure, zone de compression. La propagation de la désintégration se fait comme suit : l'énergie élastique de tension stockée est libérée et transformée en énergie de surface (ainsi le verre se brise), énergie cinétique (propulsion des fragments, vitesse estimée à  $40 \text{ ms}^{-1}$ ) et énergie calorifique (élévation de la température estimée à  $0.3^\circ$  mesuré par Delfour <sup>[5]</sup>). Ainsi l'onde de fracture se propage comme vu expérimentalement.



**Fig 8** – *Fragments issus de l'explosion d'une goutte. Certains de ces fragments, les plus gros notamment, sont en réalité plusieurs fragments restés solidaires.*



**Fig 9** – *Résultat de l'explosion d'une petite goutte dans du glycérol.*



**Fig 10** – *Deux vues d'un bloc récupéré à l'issue de l'explosion d'une grosse goutte dans du glycérol (à gauche : vue de la surface ayant appartenu à la couche extérieure de la goutte ; à droite : vue de celle ayant appartenu au cœur de la goutte)*

## Estimation des contraintes de tension

Une fois le modèle établi, Je me suis proposé d'évaluer les contraintes de **tension** au cœur de la goutte. J'ai procédé de deux façons différentes, la première repose sur l'étude de la fabrication de la goutte, et la deuxième sur les données expérimentales obtenues sur l'explosion de la goutte.

- **Première évaluation :**

La température de début de contraction du cœur est estimée à :  $T_r \approx 520^\circ\text{C}$ . Cette estimation est obtenue grâce au tracé de la courbe du refroidissement de la goutte (**Fig13** en annexe). Le volume étant une fonction différentiable, on peut écrire :

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP$$

Or, les quantités suivantes sont des constantes :

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \quad \text{Et} \quad \alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

Avec  $K = \frac{1}{\chi_T}$  module d'élasticité isostatique et  $\alpha$  coefficient de dilatation volumique

En intégrant pour une petite variation de volume :

$$\frac{\Delta V}{V} = \alpha \Delta T + \frac{1}{K} \sigma$$

Où  $\sigma$  est la contrainte de tension.

Le volume du cœur de la goutte ne variant pas  $\Delta V = 0$  on obtient finalement :

$$\sigma = K\alpha|\Delta T| \quad (1)$$

Pour le verre utilisé:  $K \approx 37 \text{ GPa}$  ;  $\alpha \approx 25 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$  ;  $\Delta T \approx 500^\circ\text{C}$  ( $520^\circ \rightarrow 20^\circ$ )

$$\sigma \sim 460 \text{ MPa}$$

La relation (1) ainsi obtenue montre que les contraintes de tension dans la goutte ne dépendent que de la température au début de la fabrication ( $\sigma$  directement proportionnelle à  $\Delta T$ ) et des propriétés du verre ( $K$ ,  $\alpha$ ).

- **Deuxième évaluation :**

J'effectue un bilan énergétique sur un **fragment lors de l'explosion**, conformément au modèle :

$$E_{tension} = E_{thermique} + E_{cinétique} + E_{surface}$$

Delfour a mesuré une variation de température de  $\delta T \approx 0.3^\circ$ <sup>[5]</sup>, donc :

➤  $E_{thermique} = \rho V c \delta T \sim 5.4 \cdot 10^{-4} \text{ J}$  avec  $c_{verre} = 720 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$  ;  $\rho = 2500 \text{ kg m}^{-3}$

L'Énergie cinétique s'écrit:

➤  $E_c = \frac{1}{2} \rho V v^2 \sim 5.4 \cdot 10^{-3} \text{ J}$  où la vitesse mesurée  $v \approx 40 \text{ ms}^{-1}$

L'Énergie de surface du verre est  $\gamma = 4 \text{ J m}^{-2}$ .

$$\triangleright E_{surface} = S\gamma \sim 4 \cdot 10^{-6} \text{ J} \rightarrow \text{Négligeable devant } E_c \text{ et } E_{thermique}$$

L'Énergie de tension s'écrit :

$$\triangleright E_{tension} = \frac{V}{2K} \sigma^2$$

Je peut ainsi réévaluer les contraintes:

$$\sigma = \sqrt{\rho K} \sqrt{v^2 + 2c\delta T} \sim 430 \text{ MPa}$$

## Amélioration des évaluations

Les approches précédentes utilisent quelques approximations :

- **Première évaluation :**

La température du cœur lors début de son refroidissement à l'intérieur de la couche extérieure solide n'est pas connue avec certitude. Je l'ai estimé à  $T_r$ , grâce à une simulation numérique, mais la précision n'est pas très grande. Une estimation plus précise peut sans doute être faite.

Un deuxième élément est le fait que le coefficient de dilatation volumique varie légèrement pour de grandes températures, mais cette variation est faible. De plus, l'utilisation de  $K$  présuppose que les contraintes sont isotropes. Les contraintes sont majoritairement situées au niveau de la tête de la goutte qui est à peu près sphérique, on peut donc supposer que les contraintes sont isotropes.

- **Bilan Energétique :**

La vitesse des fragments issus de l'explosion a été prise égale à  $40 \text{ ms}^{-1}$ . Bien que la grande majorité des fragments se déplacent à cette vitesse, j'ai pu mesurer des vitesses très faibles, notamment pour les fragments au centre. Pour remédier à cela, j'ai remarqué que l'échauffement des fragments de la goutte pourrait être causé par le fait que les fragments au centre percutent les parois de la goutte lors de l'explosion, ce qui diminuerait leur vitesse. Ceci pris en compte, on peut effectuer un bilan plus exact avec  $v = 40 \text{ ms}^{-1}$  et  $\delta T = 0$ , on obtient :

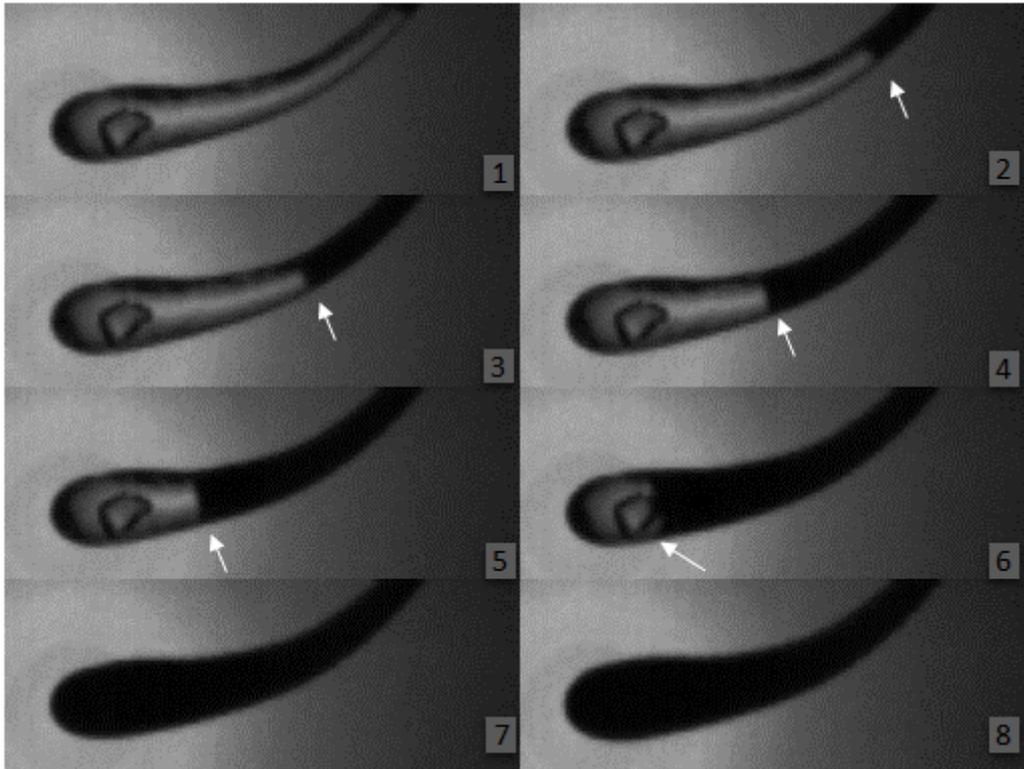
$$\sigma = \sqrt{\rho K} v \sim 380 \text{ MPa}$$

Notons que cette relation montre que la vitesse de propulsion des fragments est directement proportionnelle aux contraintes dans la goutte, le facteur de proportionnalité ne dépendant que des propriétés du verre ( $\rho$  et  $K$ ).

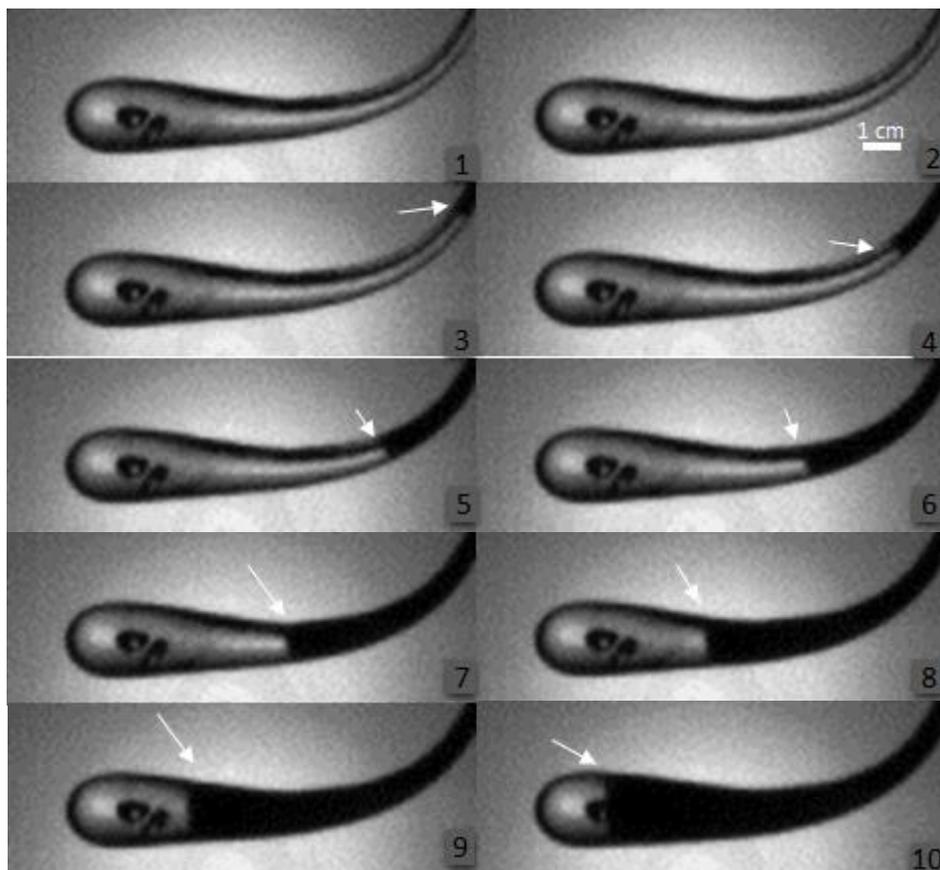
## **Bibliographie**

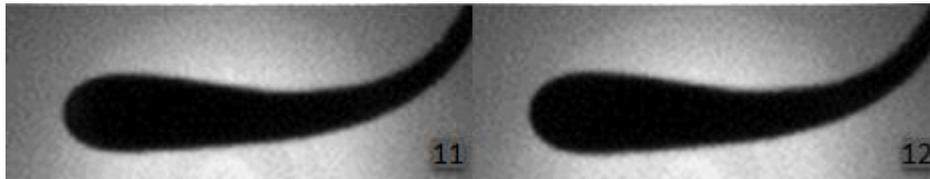
- [1] S. Chandrasekar & M. M. Chaudhri, The explosive disintegration of Prince Rupert's drops, Philosophical Magazine Part B, 1994, 70:6, 1195-1218
- [2] M. Munawar Chaudhri, Self-sustained fracture waves in a lead oxide-silica glass, JOURNAL OF APPLIED PHYSICS 110, 2011, 013523
- [3] M. Munawar Chaudhri, Self-Sustained Fracture Waves in Soda-Lime Glass, Materials Science Forum Vol 662, 2011, pp 95-104
- [4] William Leighton, Jr., Prince Rupert's Drops, Popular Science Monthly Volume 8 January 1876
- [5] M. Dufour: Philos. Mag. Vol. 37, 1869, p. 478

## Annexe



**Fig 11** – Séquence prise à 125 000fps, Interframe = 8 ms, le front de l'onde de fracture est indiqué par la flèche.

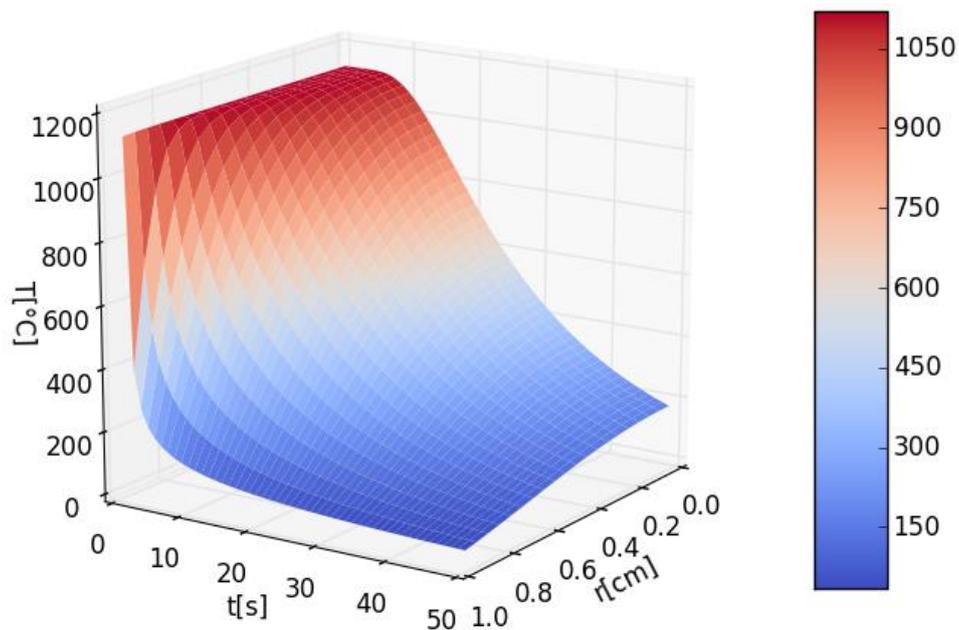




**Fig 12** – Séquence prise à 150 000fps, Interframe = 6.7 ms, le front de l'onde de fracture est indiqué par la flèche.

Instant Prise	T1-T2	T2-T3	T3-T4	T4-T5	T5-T6	T6-T7	T7-T8	Vitesse moyenne
<b>I</b> 60 000 fps $\delta t = 16.7 \mu s$	1477	1488	1452	-	-	-	-	1472
<b>II</b> 125 000 fps $\delta t = 8 \mu s$	1422	1334	1331	1217	1337	-	-	1328
<b>III</b> 150 000 fps $\delta t = 6.7 \mu s$	1288	1199	1211	1343	1354	1259	1354	1286
<b>IV</b> 150 000 fps $\delta t = 6.7 \mu s$	1288	1302	1394	1371	1248	1340	-	1323

**Tab 1** – Tableau des mesures de vitesses de propagation ( $ms^{-1}$ ) de l'onde de fracture effectuées sur les différentes prises (I, II, III et IV).



**Fig 13** – Simulation informatique du refroidissement de la goutte. La goutte est modélisée par une sphère de rayon 1cm. La température à  $t=0$  vaut 1120°C uniformément dans la goutte, et la température de l'eau vaut 20°C.