

Modélisation et validation d'une méthode de réduction de vibrations mécaniques par effet piézo-électrique

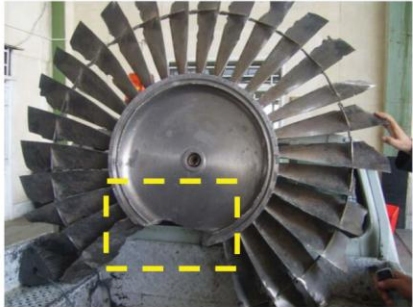
TALJAOUI ANAS

2026

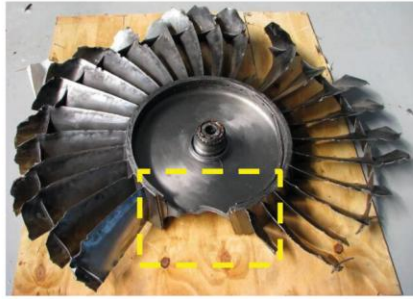
Plan

- ❑ Problématique
- ❑ Modélisation et étude théorique
- ❑ Simulation
- ❑ Montage expérimental

Dégradations mécaniques liées aux vibrations en aéronautique



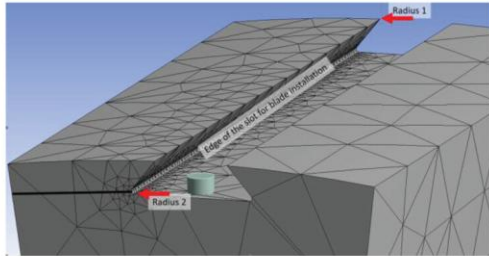
(A)



(B)



(C)



(D)



a)

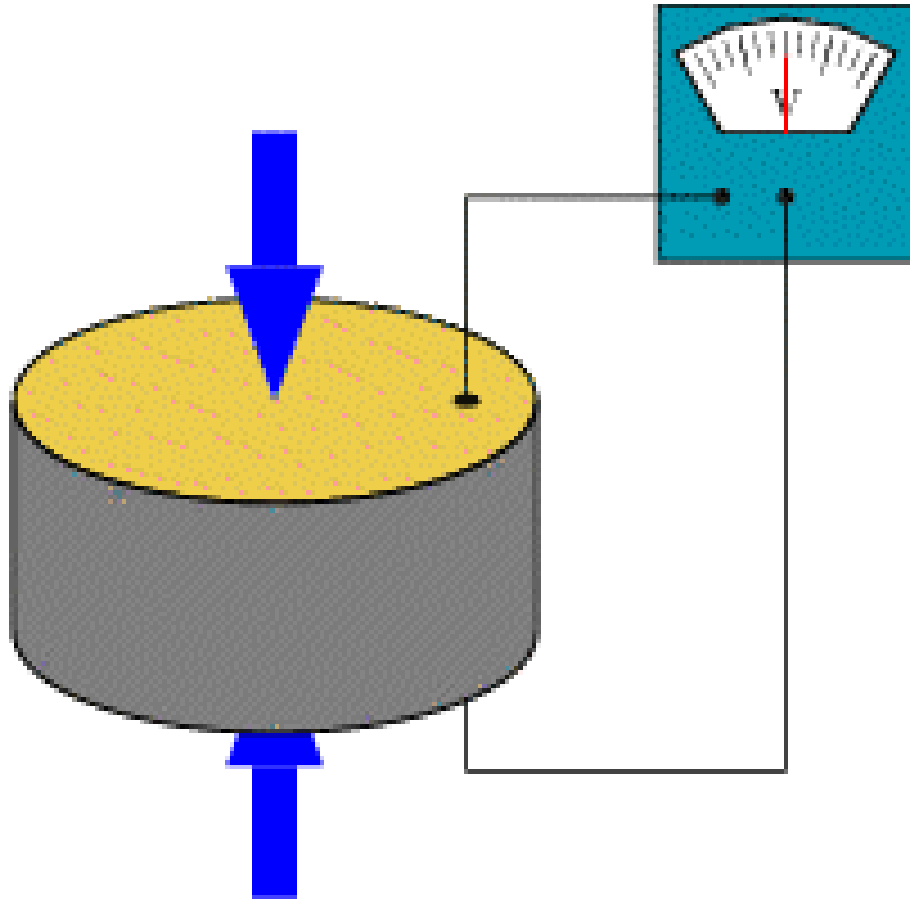


b)

Problématique

Comment réduire les vibrations d'une poutre mécanique en utilisant un couplage électromécanique et un contrôle semi-actif?

La piézoélectricité



Un **matériau piézoélectrique** est, par définition, capable de **convertir de l'énergie entre les formes mécanique et électrique** :

***Effet piézoélectrique direct :**

-Conversion de **l'énergie mécanique en énergie électrique**.

***Effet piézoélectrique inverse :**

-Conversion de **l'énergie électrique en énergie mécanique**.

La piézoélectricité

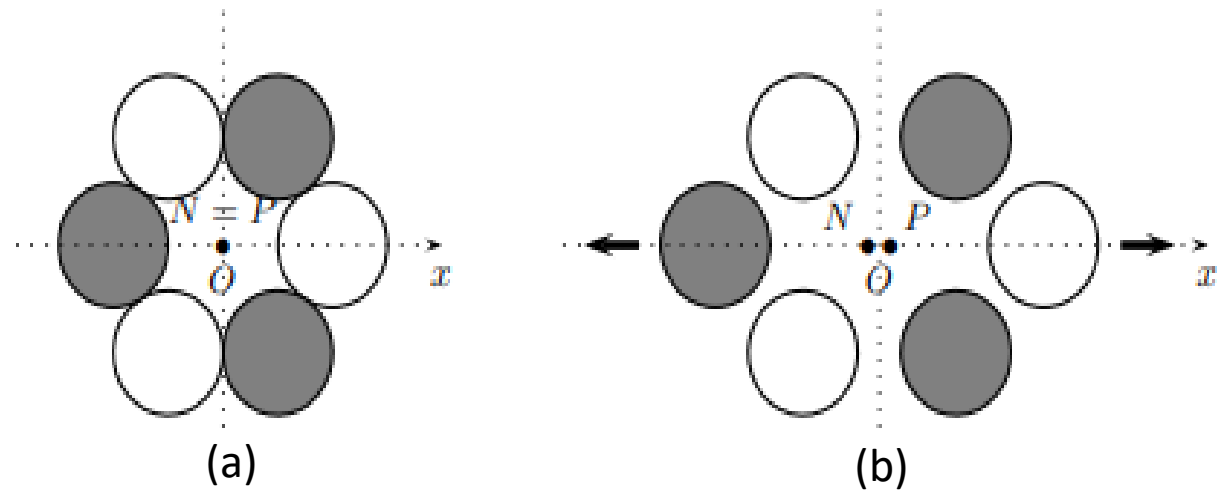
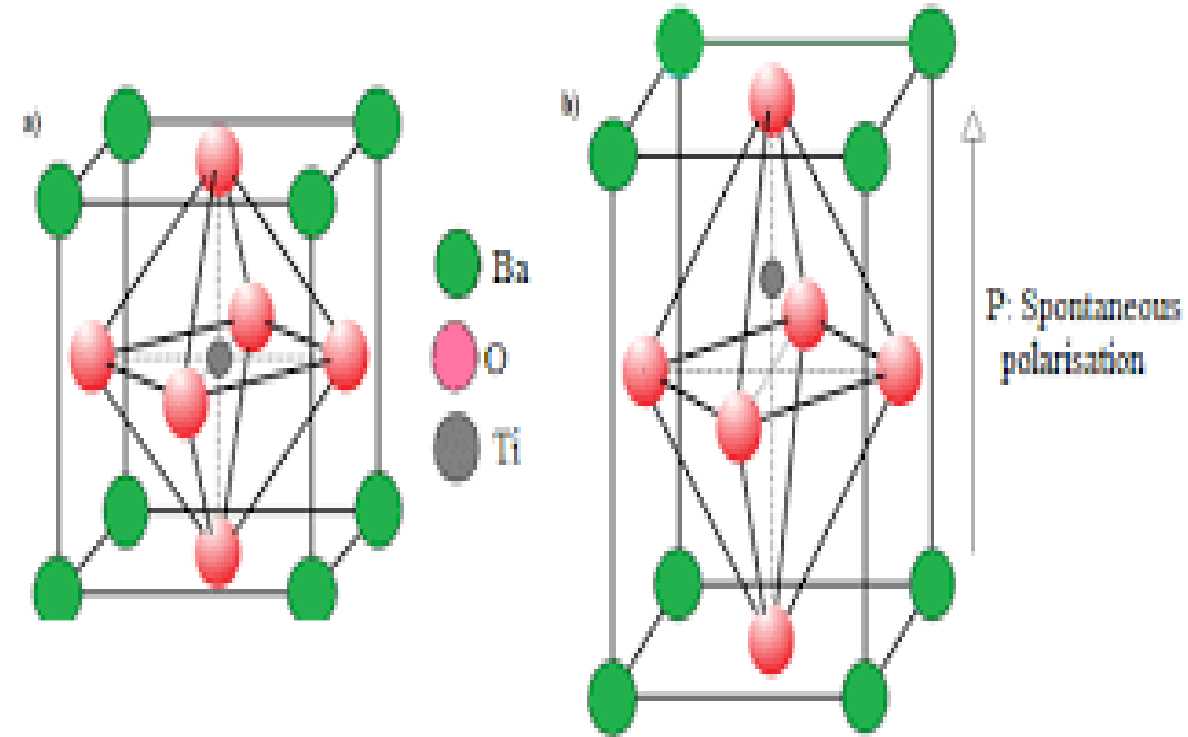


Figure 1: Illustration de l'effet piézoélectrique :

- (a) Maille non déformée, les barycentres P et N des atomes électropositifs et électronégatifs sont confondus ;
- (b) L'étirement de la maille selon l'axe Ox fait apparaître un dipôle électrostatique orienté par le vecteur $\vec{NP}$.



Equations clés de la piézo-électricité:

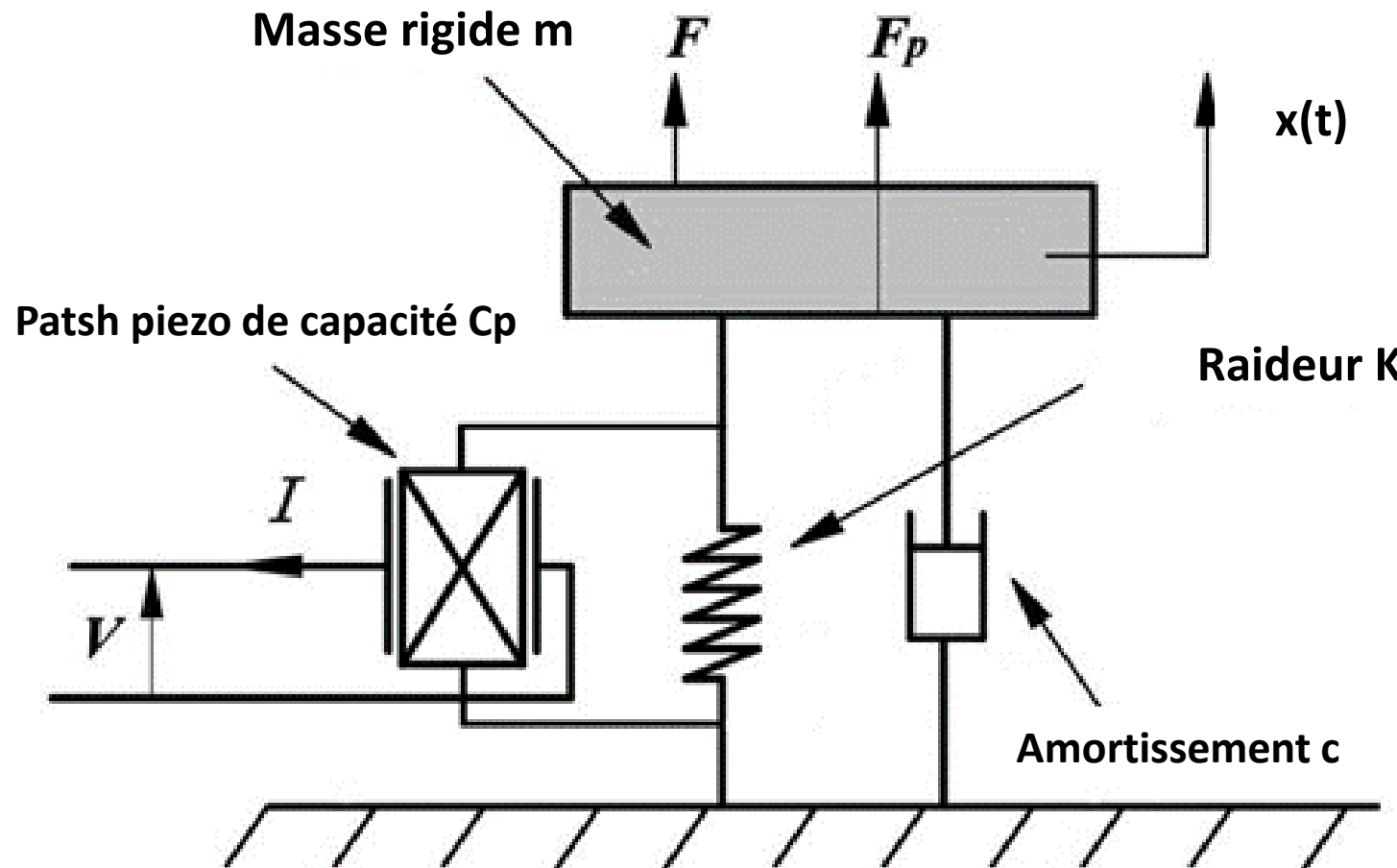


Figure2: schéma de principe d'une structure rigide à un ddl relié à un PZT

Equations clés de la piézo-électricité:

Effet direct	Effet inverse
$I = \alpha \dot{x} - C_p.V_p \quad (1)$	$F_p = -\alpha V_p \quad (2)$

F_p : force générée par l'élément piézo-électrique

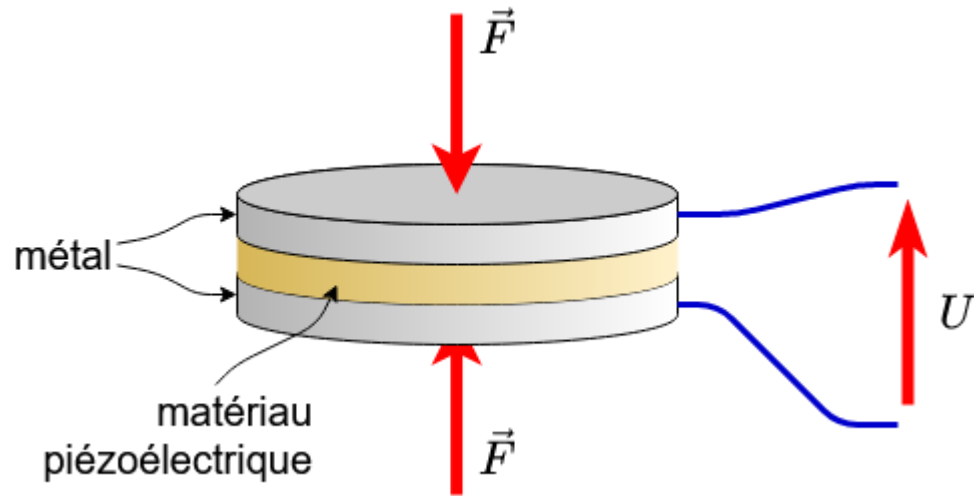
F : force excitatrice

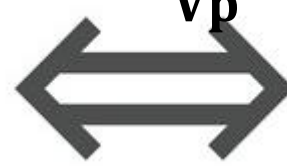
$x(t)$: élongation instantanée

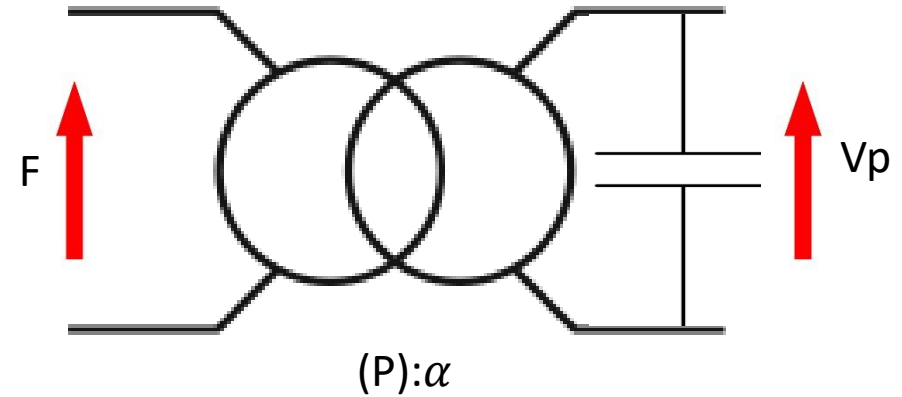
Le principe fondamentale s'énonce donc:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F - F_p \quad (3)$$

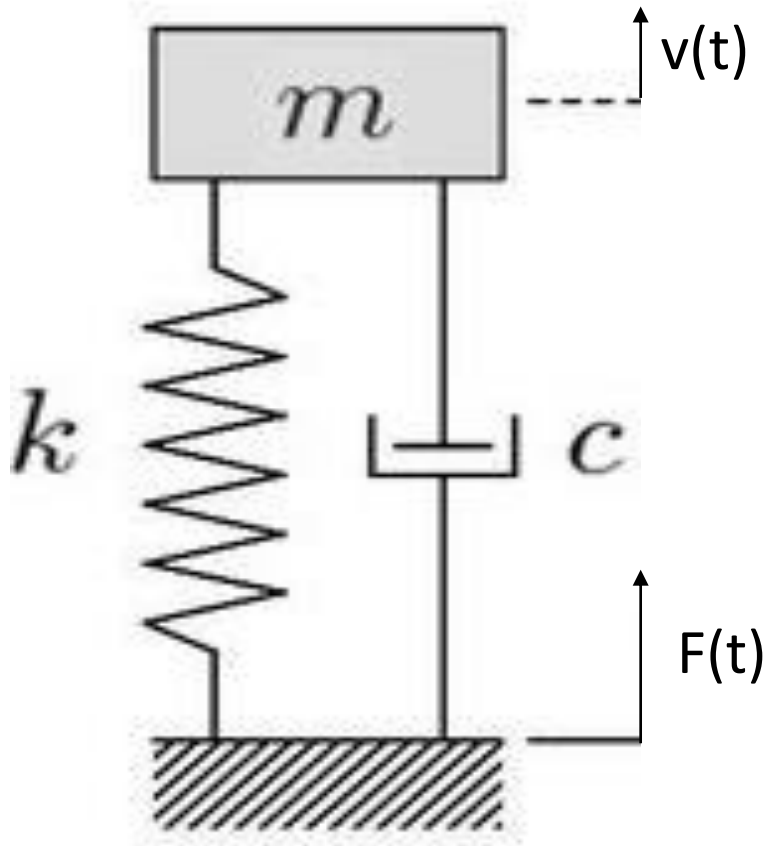
Le transformateur piézo-électrique



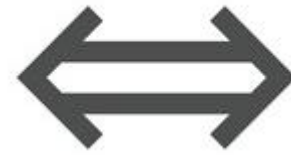
$$\alpha = \frac{F}{V_p}$$




Modélisation électro-mécanique



Modèle de l'impédance mécanique



$$L = \frac{m}{\alpha^2} \quad C = \frac{\alpha^2}{K} \quad R = \alpha^2 c$$

$U(t)$

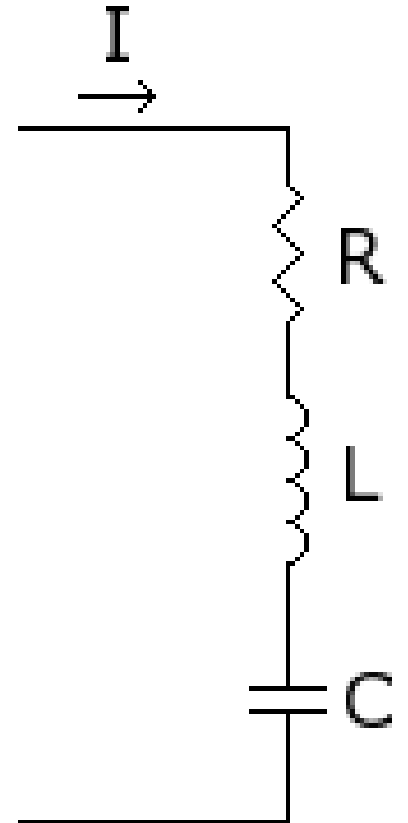
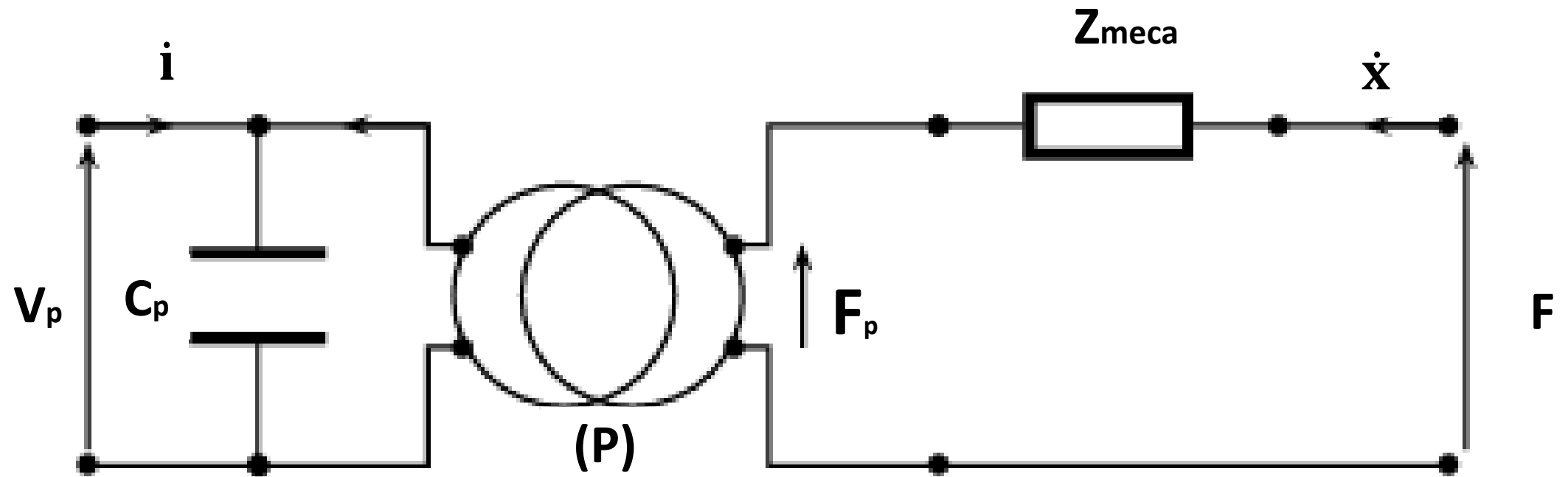
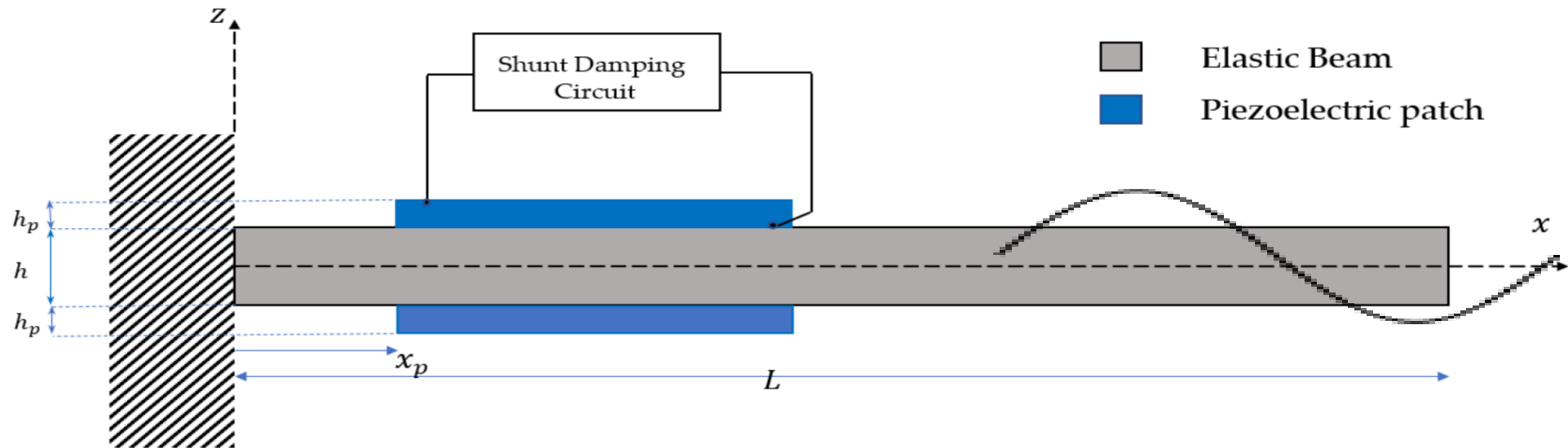


Schéma équivalent

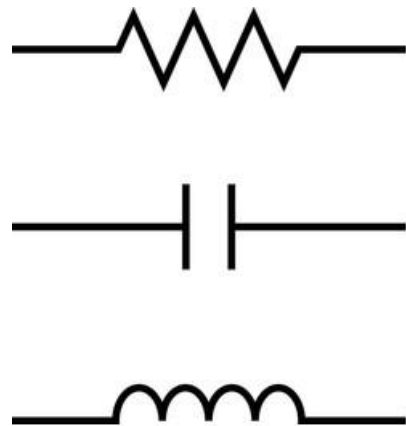


$$\alpha = F_p/V_p = i/\dot{x}$$

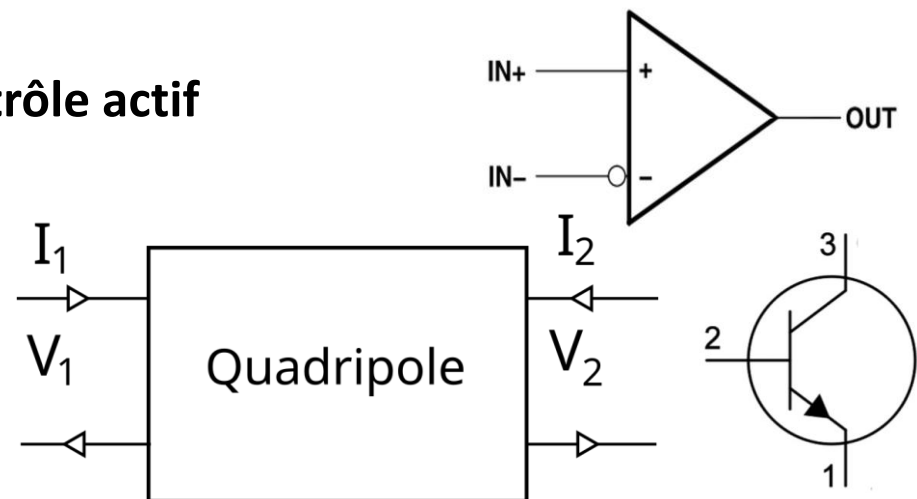
Contrôle Vibratoire par amortissement électrique



Contrôle passif



Contrôle actif



Contrôle Vibratoire par amortissement électrique

- La solution proposé s'appuie sur une stratégie (SSDi) de contrôle **semi-active** qui nécessite **peu d'énergie** pour être implémenté (que pour alimenter la commutation).*
- On active l'amortissement électrique qu'aux **extremums** de vibrations.*

Modèle théorique

Schéma de principe:

Figure3: schéma de principe de la solution proposé

(s) : le système en vibration

L: inductance

R: résistance

K: interrupteur contrôlé

(éventuellement un transistor)

PZT: céramique piézoélectrique

(Plomb Zirconate Titanate) relié à la structure vibrante

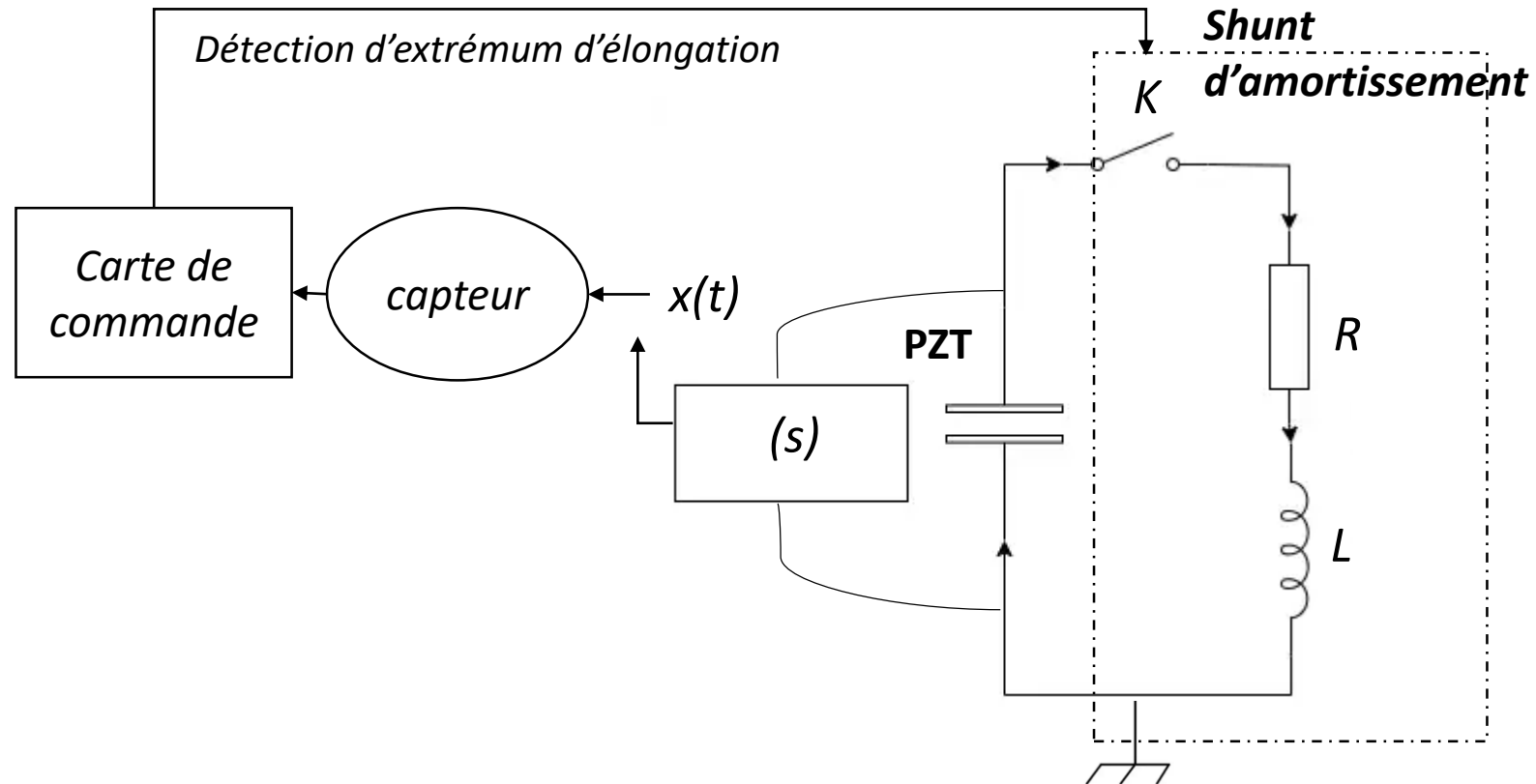
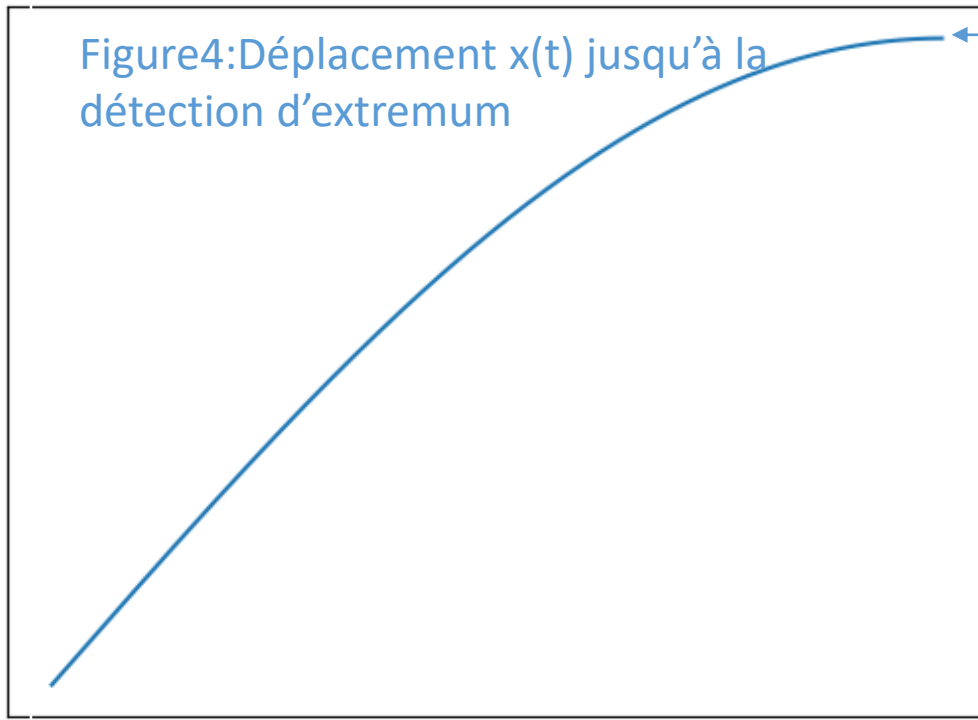


Figure4: Déplacement $x(t)$ jusqu'à la détection d'extremum

déplacement $x(t)$ (m)



temps t (s)

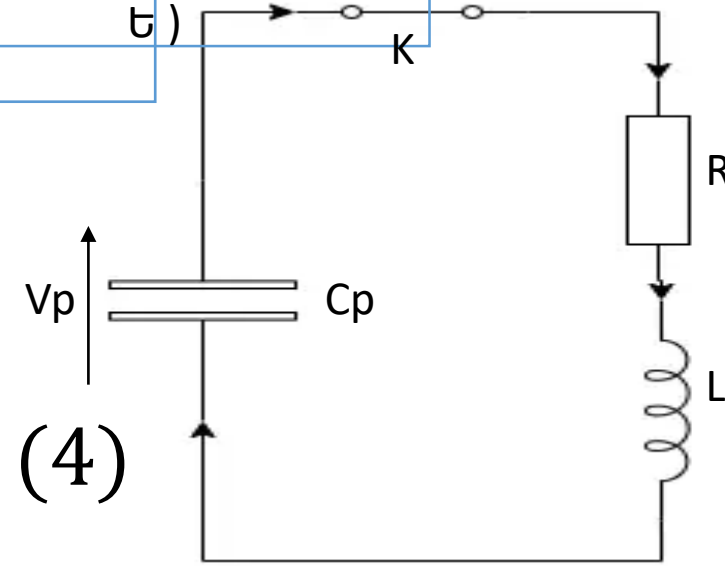
Pic de vibration détecté

Fermeture du circuit (pendant une durée τ)

Boucle RLC

Ouverture du circuit

$$V_f = -\gamma \cdot V_i \quad (4)$$



V_i : valeur de V_p avant la commutation

V_f : valeur de V_p après la commutation

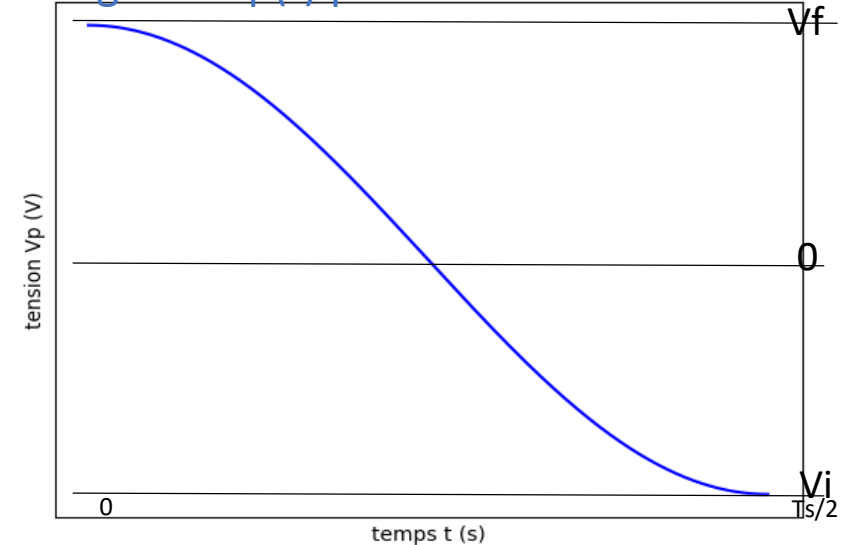
$\gamma = e^{-\frac{\pi}{2Q}}$: coefficient d'inversion

$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C_p}}$: facteur de qualité du circuit

$\tau = T_{\text{shunt}}/2 = \pi \sqrt{L \cdot C_p}$: durée d'inversion

Avec $\tau \ll T$ (T : période d'oscillation du système)

Figure5: $V_p(t)$ pendant la commutation



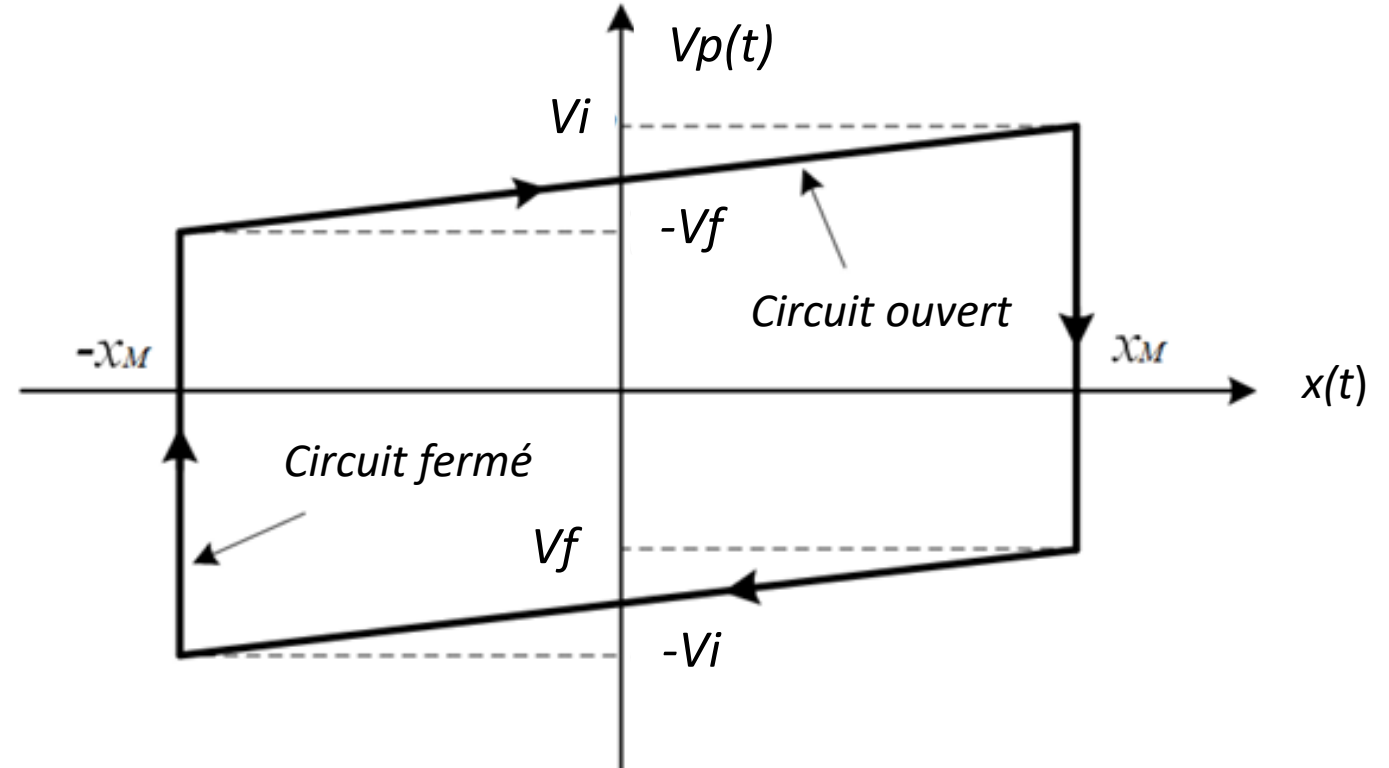
Boucle d'Hysteresis:

Figure6: illustration de la boucle d'hysteresis

En prenant en compte $\tau \ll T$

On néglige le temps d'inversion dans
considérant donc dans une approximation que
l'inversion se fait instantanément

Avec X_m : l'élongation maximale



D'après (1)+ condition initiales:

$$V_f = V_i + 2 \frac{\alpha}{C_p} X_m \quad (5)$$

Grâce à la boucle d'hysteresis (figure 6), à la formule (4) et la formule (5) on peut tirer la relation :

$$V_p(t) = \frac{1+\gamma}{1-\gamma} \cdot \frac{\alpha}{C_p} X_m \cdot \text{sign}(\dot{x}(t)) + \frac{\alpha}{C_p} x(t) \quad (6)$$

D'après la formule (2):

$$F_p(t) = -\alpha \cdot V_p(t) \stackrel{(6)}{\Rightarrow}$$

$$F_p(t) = -\frac{1+\gamma}{1-\gamma} \cdot \frac{\alpha^2}{C_p} X_m \cdot \text{sign}(\dot{x}(t)) - \frac{\alpha^2}{C_p} x(t) \quad (7)$$

D'après l'équation différentielle d'évolution (3): $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F - F_p$ (3)

On considère une excitation $F(t)$ sinusoïdale: $F = F_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ (8)

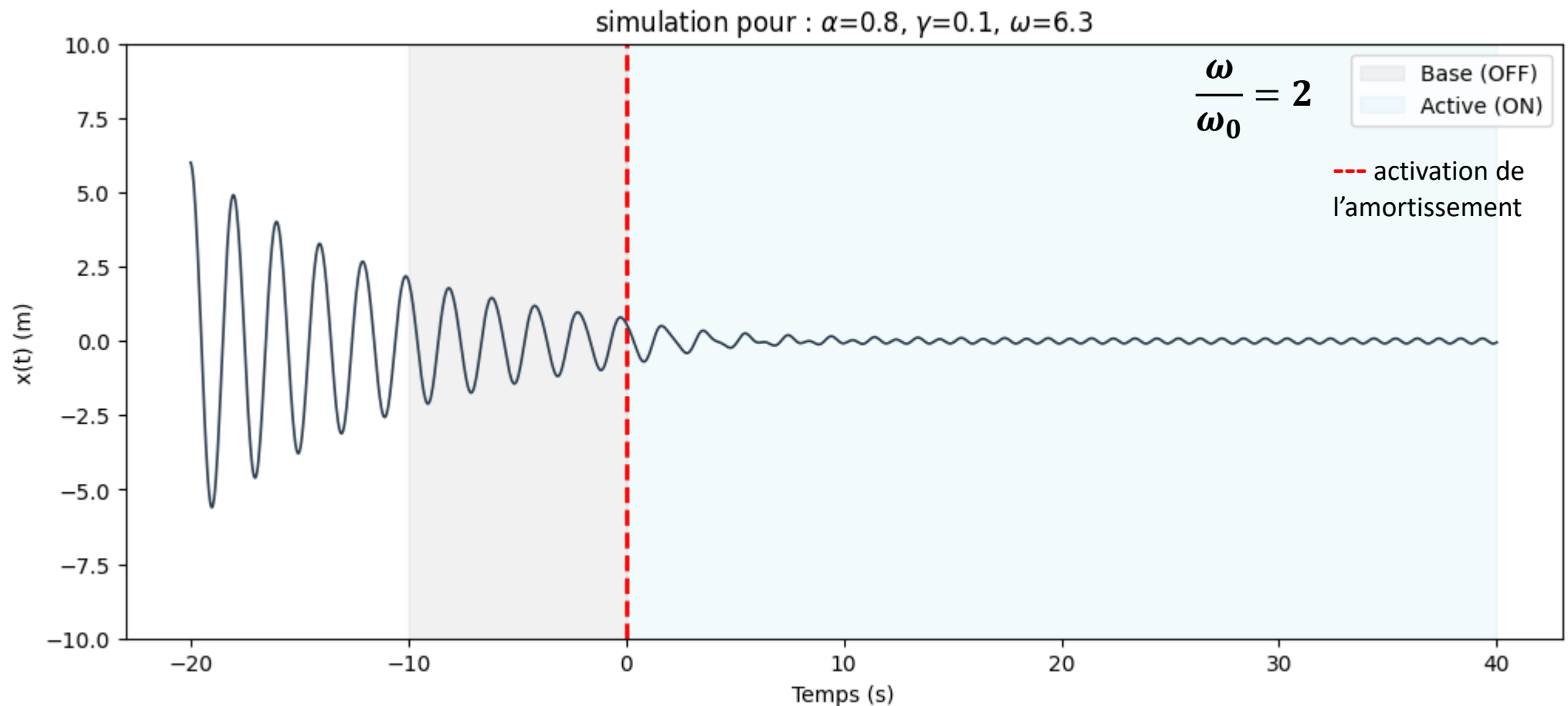
$$\stackrel{(7)}{\Rightarrow} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi) - \frac{1+\gamma}{1-\gamma} \cdot \frac{\alpha^2}{C_p} X_m \cdot \text{sign}(\dot{x}(t)) - \frac{\alpha^2}{C_p} x(t) \quad ***$$

(3)

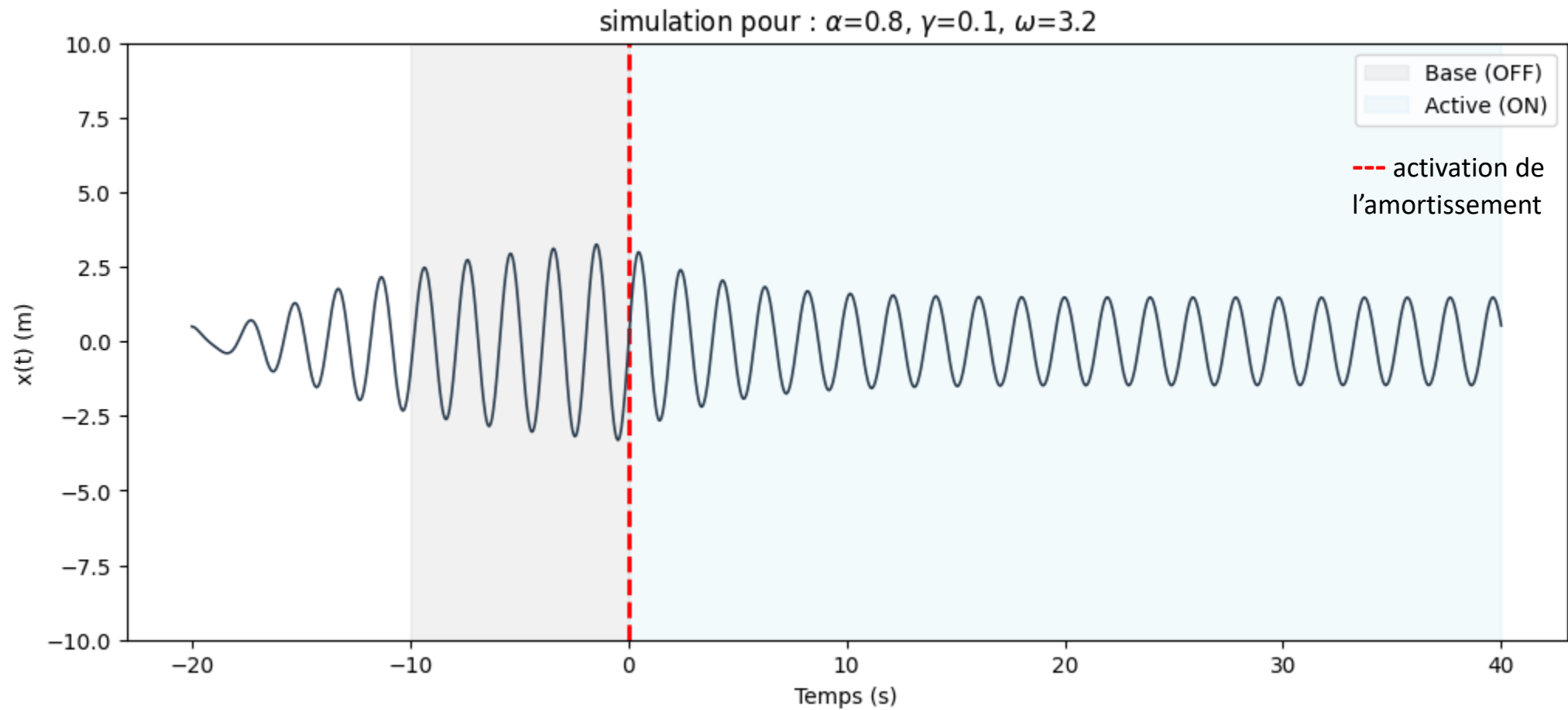
(8)

Simulation

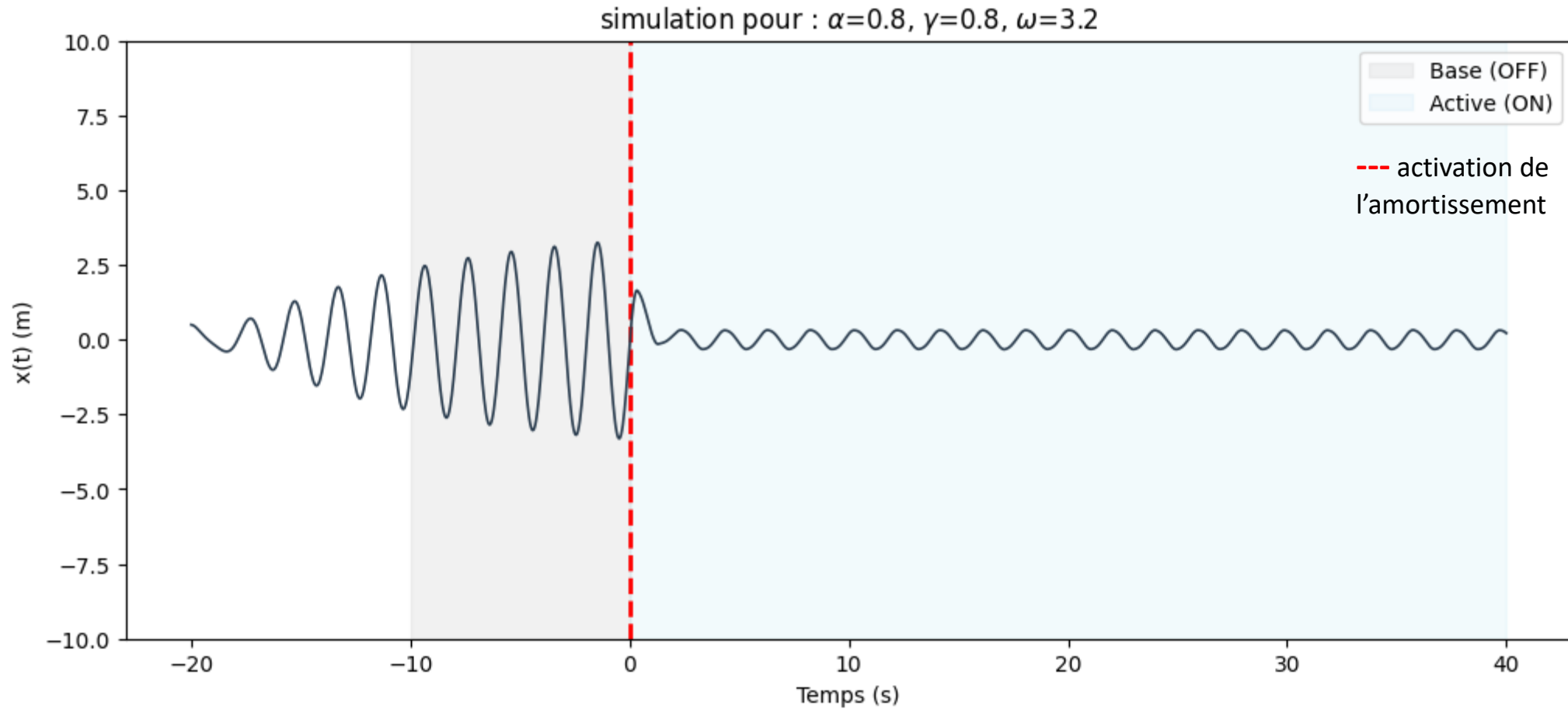
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi) - \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma} \cdot \frac{\alpha^2}{C_p} X_m \cdot \text{sign}(\dot{x}(t)) - \frac{\alpha^2}{C_p} x(t) \quad ***$$



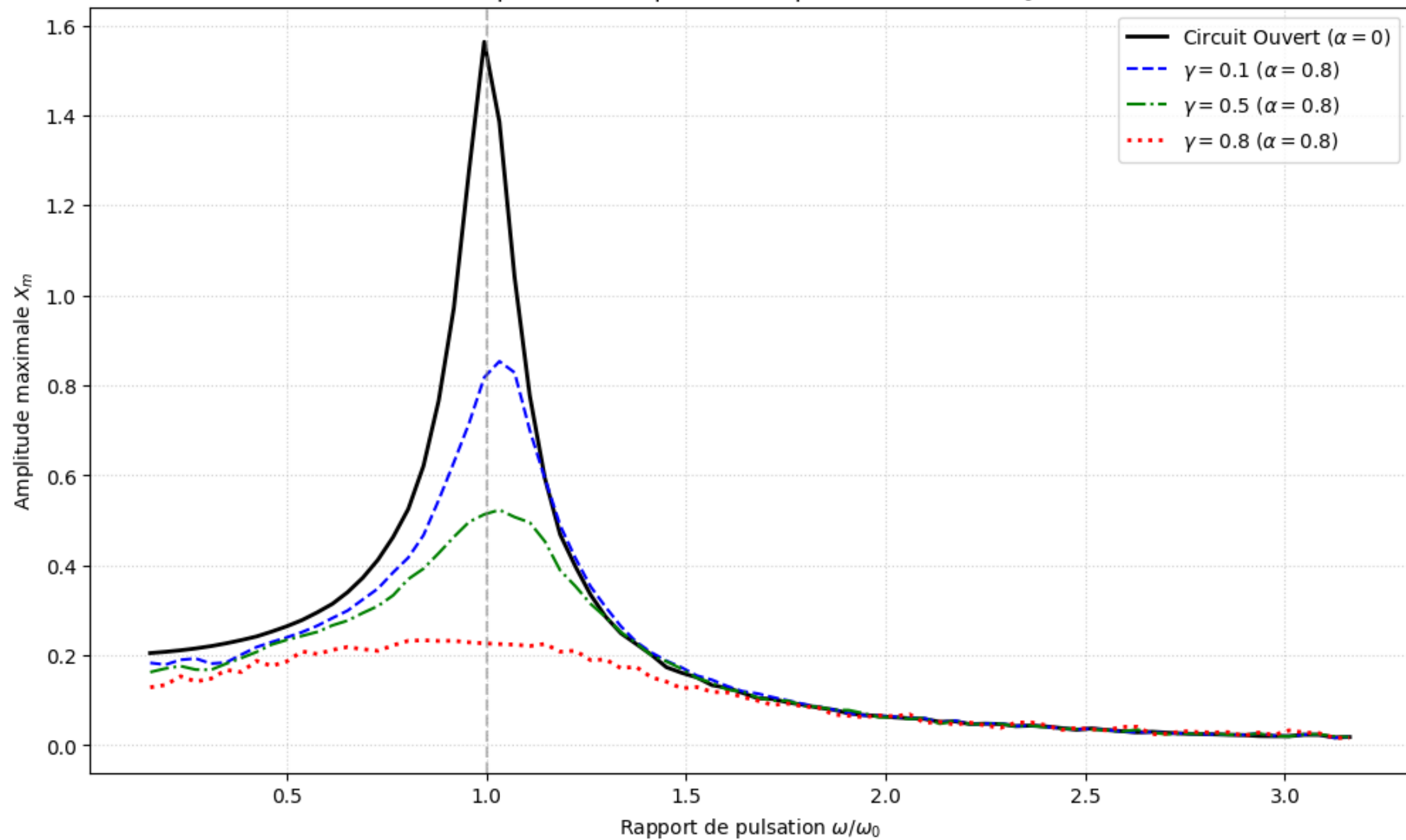
A la résonance $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$ $\gamma = 0,1$



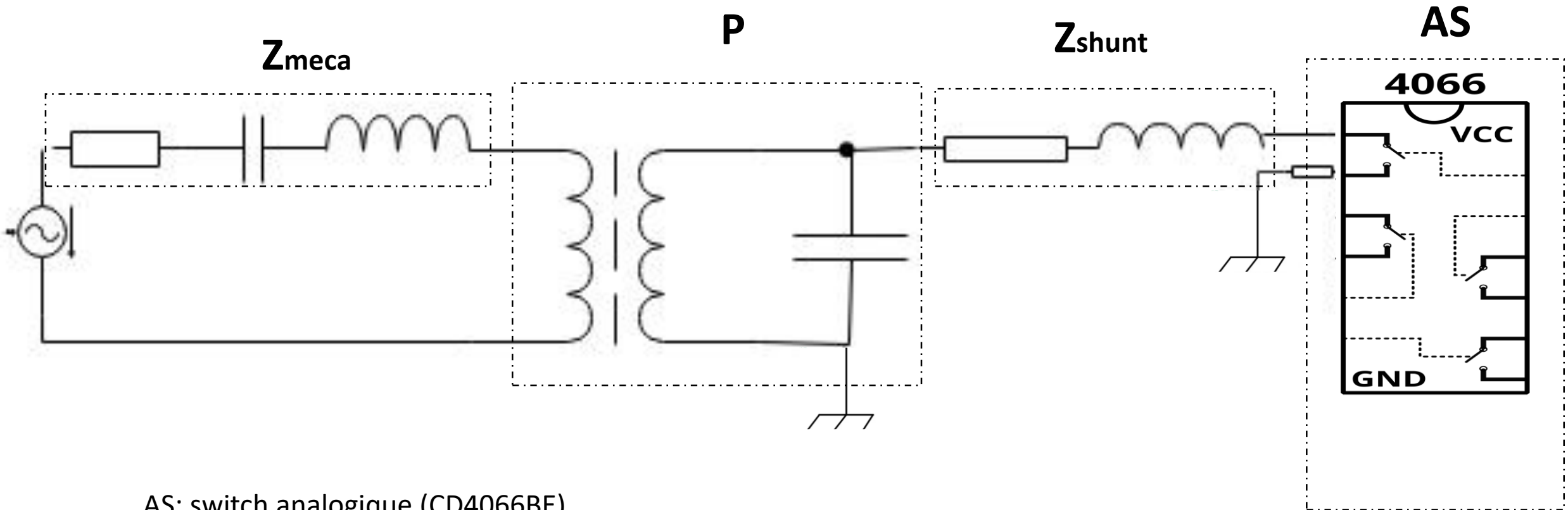
A la résonance $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$ $\gamma = 0,8$



Réponse en fréquence : Amplitude max vs ω/ω_0



Montage électrique équivalent



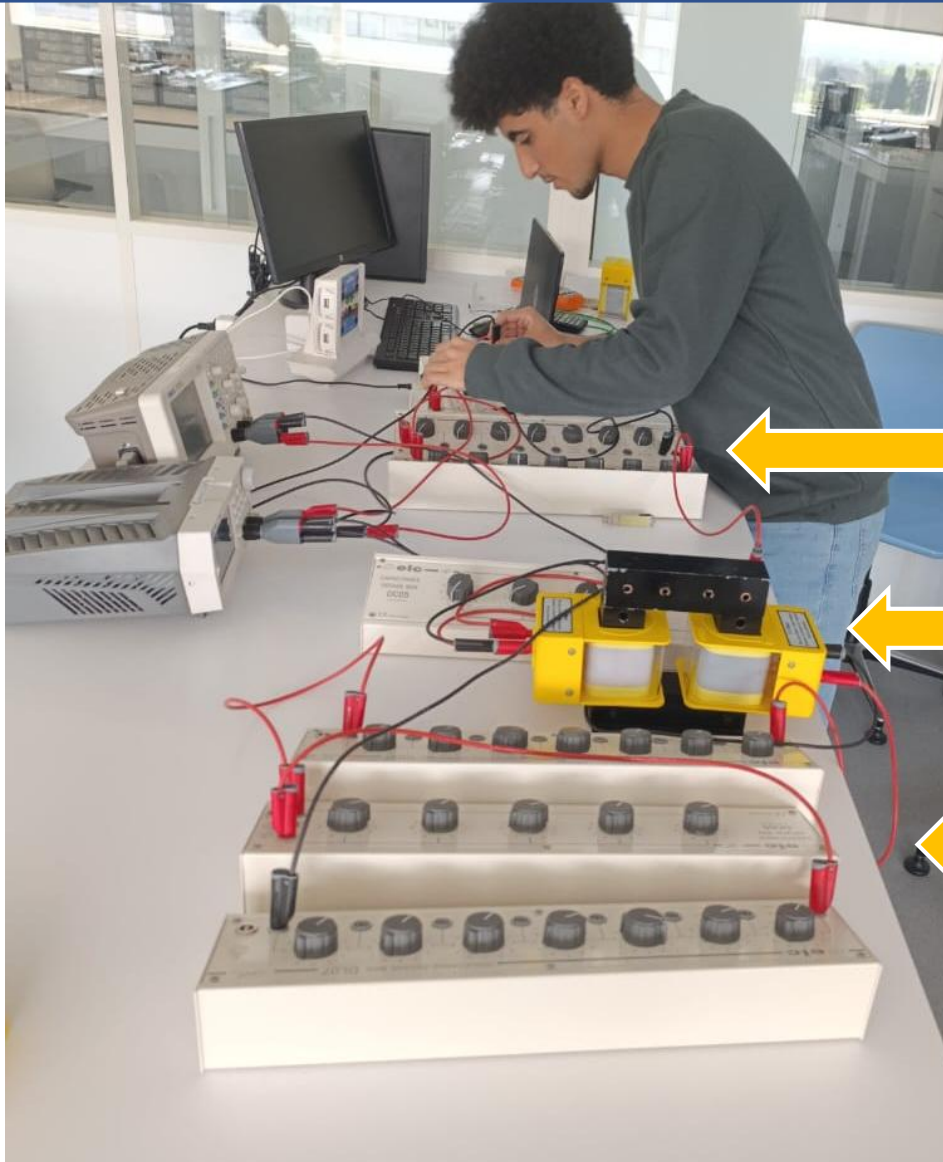
AS: switch analogique (CD4066BE)

Z_{shunt}: la shunt d'amortissement RL

Z_{meca}: l'impédance « mécanique » équivalente

P: bloc piézo-électrique équivalent

Montage expérimentale



On cherche une simulation au voisinage de la fréquence de résonance de Z_{meca} qui est ici :

$$f_0 = 1,4\text{kHz}$$

Bloc shunt R,L

Bloc piézo-électrique

Bloc « impédance mécanique »

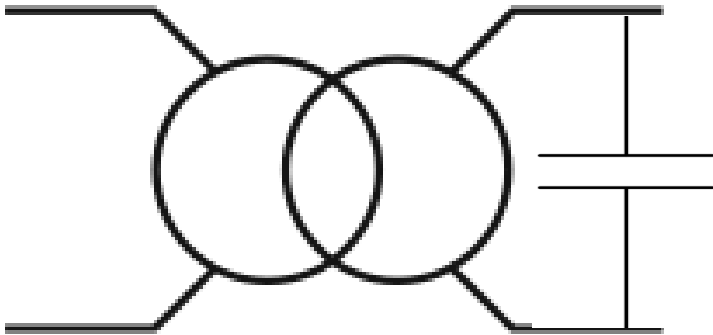
$L=13\text{mH}$

$R=10\text{ k}\Omega$

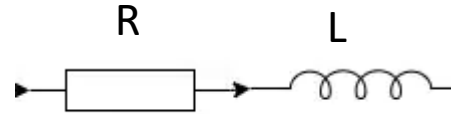
$C=1\text{ }\mu\text{F}$

Le transformateur piezo-électrique (P):

Rapport de nombre
de spire: $t=0,16$
En plus de la capacité
 $C_p=1\text{nF}$



Shunt R,L:



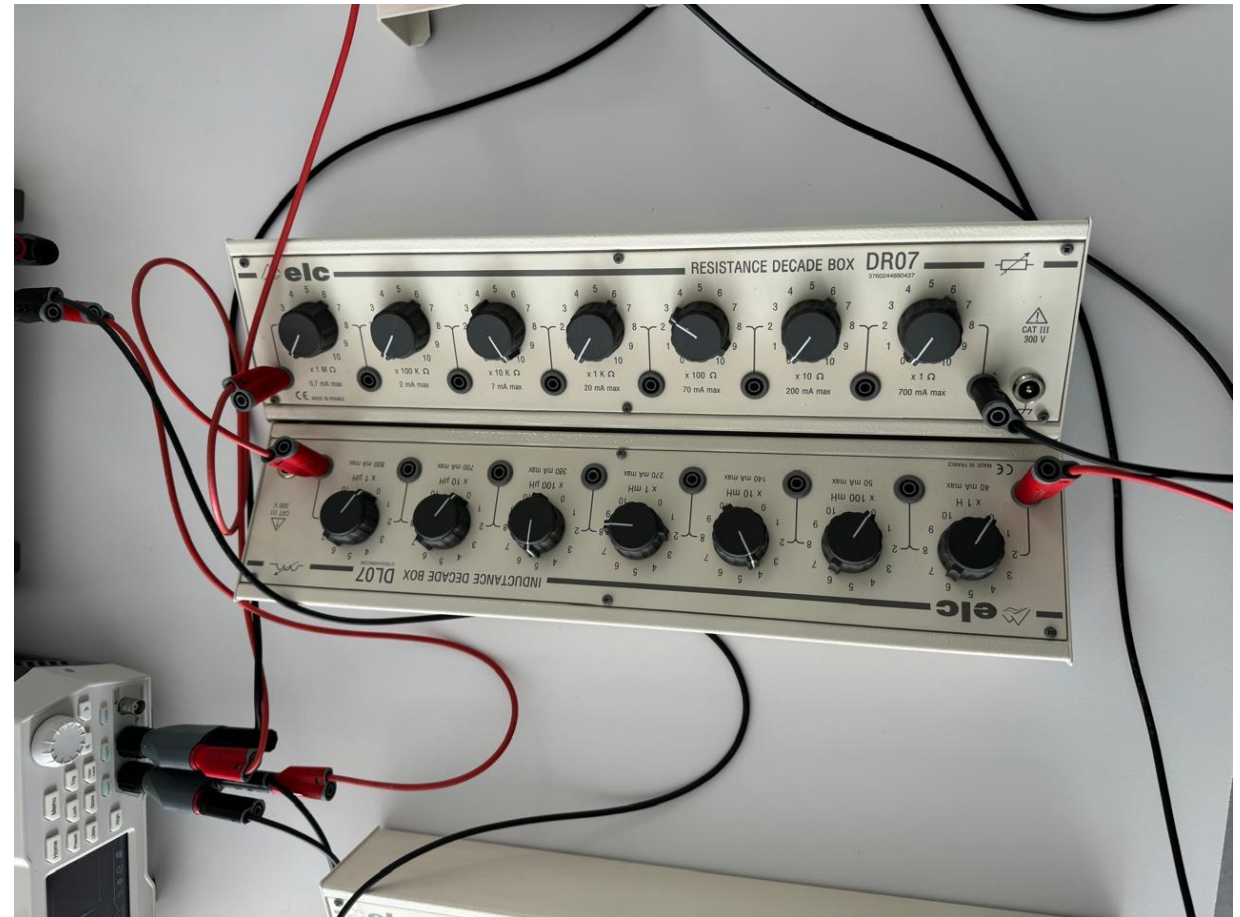
Valeurs numeriques:

$R=10\text{ k}\Omega$

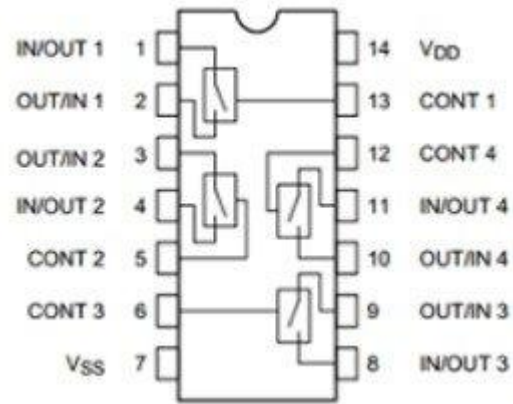
$L=40\text{mH}$

Ce qui donne:

$$\gamma = 0,08$$

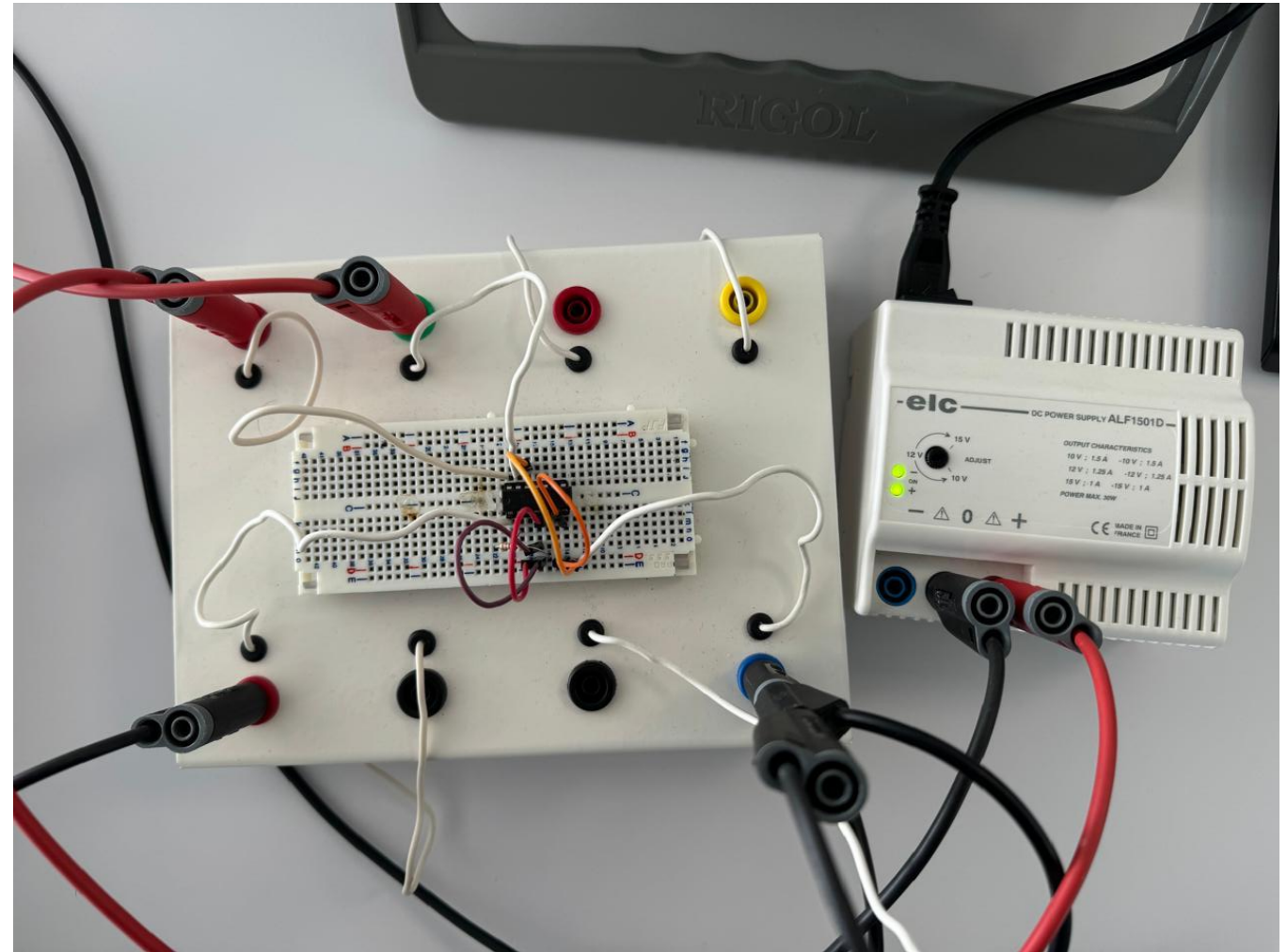


Le switch analogique (AS):

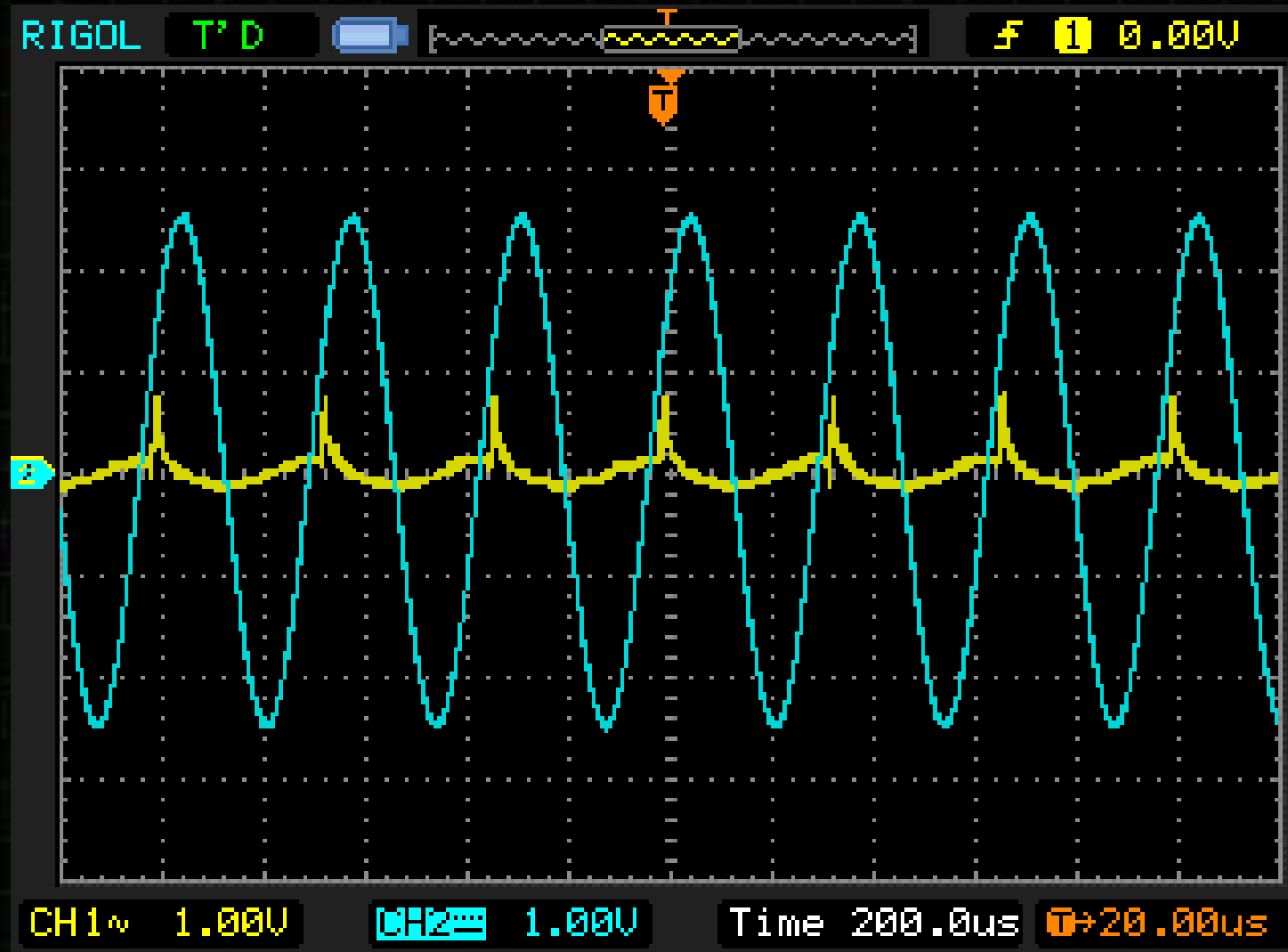


R

Le signal de commande modélisant les max de vibrations est un signal de même fréquence que la force $f=1,4\text{kHz}$



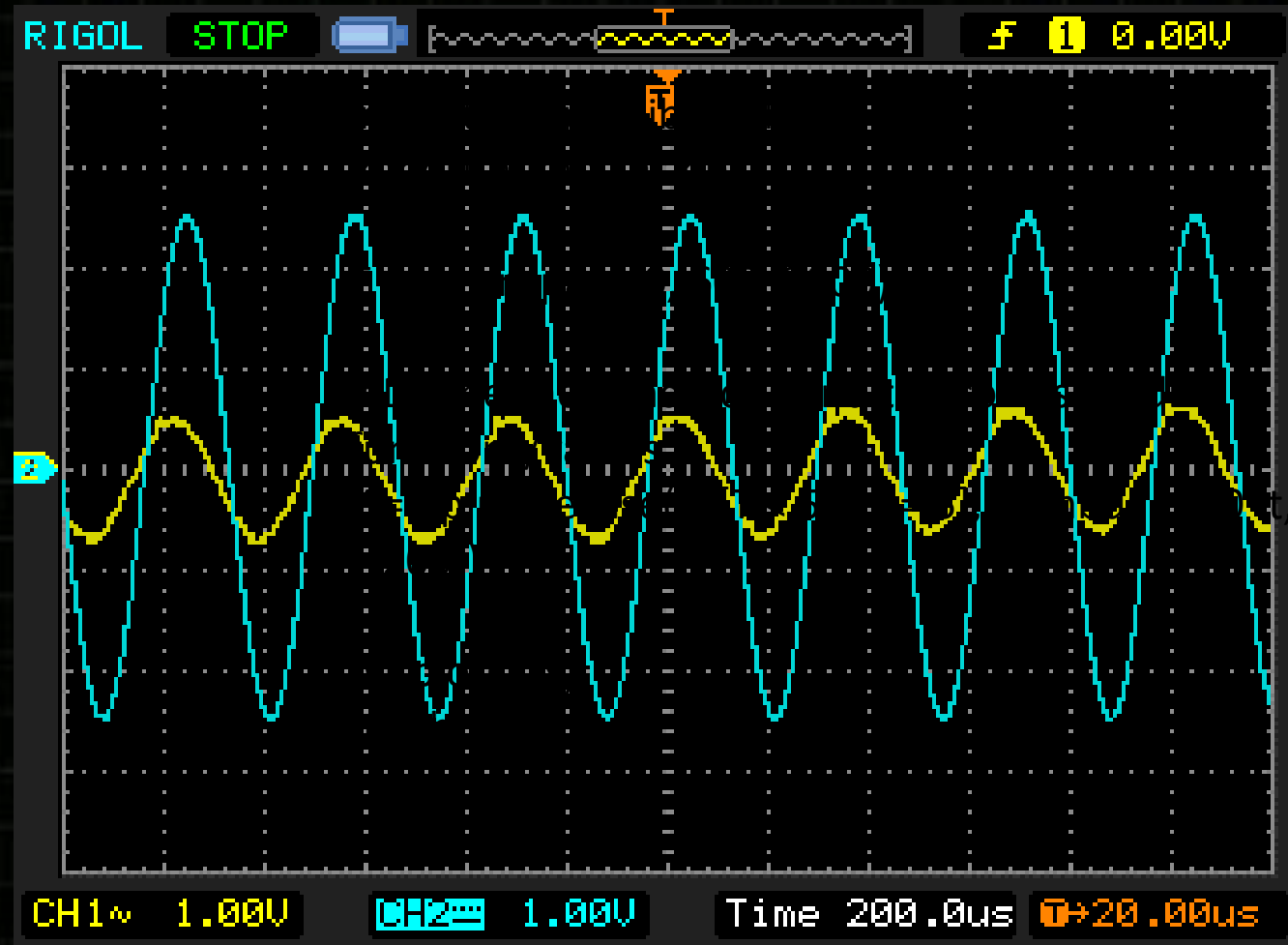
Résultat empirique: avec SSDI



--- tension appliqué
(image de la force
mecanique)

--- tension aux
bornes du PZT
(image de
l'élongation)

Résultat empirique: avec amortissement passif



--- tension appliqué
(image de la force
mecanique)

--- tension aux
bornes du PZT
(image de
l'élongation)

Critères	Contrôle passif	SSDI (semi-actif)	Contrôle actif
 Rapidité d'atténuation	Faible à moyenne L'amortissement est lent, la diminution des vibrations est progressive.	Élevée L'atténuation est rapide grâce à la force dissipative générée à chaque cycle.	Très élevée L'atténuation peut être très rapide, voire quasi instantanée selon la stratégie de contrôle.
 Amplitude finale des vibrations	Moyenne Réduction limitée des amplitudes résiduelles.	Faible Réduction importante des vibrations résiduelles.	Très faible Peut atteindre une quasi-annulation des vibrations.
 Apport énergétique	Nul Aucun apport énergétique nécessaire.	Faible Apport énergétique limité pour alimenter le circuit de commutation.	Élevé Nécessite une alimentation continue et un apport énergétique important.
 Complexité de mise en œuvre	Faible Mise en œuvre simple, pas d'électronique.	Moyenne Nécessite des composants électroniques de commutation (électronique simple).	Élevée Nécessite des capteurs, un contrôleur, des actionneurs et une électronique complexe.
 Besoin d'électronique de commande	Non Aucun système de commande nécessaire.	Oui (simple) Circuit de commutation pour inverser la tension.	Oui (complexe) Commande en temps réel basée sur les mesures des capteurs.
 Rendement énergétique	Excellent Aucune énergie consommée.	Très bon Fort amortissement pour un faible apport énergétique.	Plus faible Consommation énergétique relativement élevée.
 Coût de réalisation	Faible Matériaux simples, pas d'électronique.	Moyen Coût modéré lié aux composants piézoélectriques et à l'électronique.	Élevé Coût élevé des capteurs, actionneurs, contrôleur et électronique associée.

conclusion

- La méthode SSDI permet de réduire significativement l'amplitude des vibrations tout en nécessitant un apport énergétique limité. Cette efficacité résulte de la force dissipative générée à chaque cycle de vibration.
- Toutefois, sur le long terme, le contrôle passif peut présenter un amortissement résiduel plus important grâce à sa décroissance exponentielle continue.
- Par ailleurs, le contrôle actif se révèle le plus performant pour atténuer les vibrations et peut, dans certains cas, conduire à leur quasi-annulation. En contrepartie, il requiert un apport énergétique nettement plus élevé ainsi qu'une électronique de commande plus complexe.
- Ainsi, la méthode SSDI constitue un compromis particulièrement intéressant entre efficacité d'amortissement, simplicité de mise en œuvre et consommation énergétique

ANNEXES

```
%matplotlib inline
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# --- Paramètres Physiques ---
m, c, k = 1.0, 0.4, 10.0 # Amortissement passif c légèrement augmenté pour la stabilité
F0, Cp = 2.0, 1.0
alpha_fixe = 0.8 # Valeur de alpha pour comparer les gammas
w0 = np.sqrt(k/m) # Pulsation propre

# Plage de pulsations (de 0.2*w0 à 2.5*w0)
w_list = np.linspace(0.5, 10, 80)
w_ratio = w_list / w0

def get_stabilized_amplitude(w, alpha, gamma):
    t = np.linspace(0, 60, 1200) # Temps long pour stabiliser
    dt = t[1] - t[0]
    x, v = 0.5, 0.0
    current_Xm = x

    # Simulation simplifiée pour trouver l'amplitude max stable
    for i in range(len(t)):
        if i > 1 and v_old * v < 0:
            current_Xm = abs(x)

        v_old = v
        forcing = F0 * np.cos(w * t[i])

        # Équation
        term_non_lin = ((1 + gamma) / (1 - gamma)) * (alpha**2 / Cp) * current_Xm * np.sign(v)
        term_piezo = (alpha**2 / Cp) * x

        accel = (forcing - c*v - k*x - term_non_lin - term_piezo) / m
        v += accel * dt
        x += v * dt

    # On retourne le max des derniers cycles uniquement
    return current_Xm
```

ANNEXES

```
# --- Calcul des Courbes ---
print("Calcul des courbes en cours... (veuillez patienter)")
amp_open = [get_stabilized_amplitude(w, 0, 0) for w in w_list]
amp_g01 = [get_stabilized_amplitude(w, alpha_fixe, 0.1) for w in w_list]
amp_g05 = [get_stabilized_amplitude(w, alpha_fixe, 0.5) for w in w_list]
amp_g08 = [get_stabilized_amplitude(w, alpha_fixe, 0.8) for w in w_list]

# --- Tracé du Graphique ---
plt.figure(figsize=(12, 7))

plt.plot(w_ratio, amp_open, 'k-', lw=2, label='Circuit Ouvert ( $\alpha=0$ )')
plt.plot(w_ratio, amp_g01, 'b--', lw=1.5, label=f' $\gamma=0.1$  ( $\alpha={alpha\_fixe}$ )')
plt.plot(w_ratio, amp_g05, 'g-.', lw=1.5, label=f' $\gamma=0.5$  ( $\alpha={alpha\_fixe}$ )')
plt.plot(w_ratio, amp_g08, 'r:', lw=2.0, label=f' $\gamma=0.8$  ( $\alpha={alpha\_fixe}$ )')

# Mise en forme scientifique
plt.axvline(1.0, color='gray', linestyle='--', alpha=0.5) # Ligne à la résonance
plt.title("Réponse en fréquence : Amplitude max vs  $\omega/\omega_0$ ")
plt.xlabel("Rapport de pulsation  $\omega / \omega_0$ ")
plt.ylabel("Amplitude maximale  $X_m$ ")
plt.legend()
plt.grid(True, which='both', linestyle=':', alpha=0.6)

plt.show()

# --- Création de l'interaction ---
interact(simulate,
        alpha=FloatSlider(min=0, max=1, step=0.05, value=0.5),
        gamma=FloatSlider(min=0, max=0.8, step=0.05, value=0.1))
```

ANNEXES

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from ipywidgets import interact, FloatSlider
import warnings

# On ignore les petites erreurs de division par zéro temporaires pendant qu'on bouge le slider
warnings.filterwarnings('ignore')

def simulate_switch_v2(alpha, gamma, omega):

    m, c, k = 1.0, 0.2, 10.0
    F0, Cp = 2.5, 1.0

    t = np.linspace(-20, 40, 1500)
    dt = t[1] - t[0]

    x = np.zeros_like(t)
    v = np.zeros_like(t)
    x[0] = 6 # Condition initiale

    current_Xm = abs(x[0])

    for i in range(1, len(t)):
        # Détection du pic pour Xm (Amplitude locale)
        if i > 1 and v[i-1]*v[i-2] < 0:
            current_Xm = abs(x[i-1])

        # Sécurité pour éviter que Xm devienne fou
        current_Xm = min(current_Xm, 10.0)

        forcing = F0 * np.cos(omega * t[i])

        # Logique de switch à t=0
        if t[i] < 0:
            a_eff, g_eff = 0.0, 0.0
        else:
            a_eff, g_eff = alpha, gamma

        # Ton équation (Note: on ajoute un petit terme pour éviter la division par zéro si Cp=0)
        term_non_lin = ((1 + g_eff) / (1 - g_eff)) * (a_eff**2 / max(Cp, 0.001)) * current_Xm *
np.sign(v[i-1])
        term_piezo = (a_eff**2 / max(Cp, 0.001)) * x[i-1]

        accel = (forcing - c*v[i-1] - k*x[i-1] - term_non_lin - term_piezo) / m

        # Intégration (Euler-Cromer pour la stabilité)
        v[i] = v[i-1] + accel * dt
        x[i] = x[i-1] + v[i] * dt
```

ANNEXES

```
# Création du plot
fig, ax = plt.subplots(figsize=(12, 5))
ax.axvspan(-10, 0, color='lightgray', alpha=0.3, label='Base (OFF)')
ax.axvspan(0, 40, color='skyblue', alpha=0.1, label='Active (ON)')
ax.axvline(0, color='red', linestyle='--', lw=2)

ax.plot(t, x, color='#2c3e50', lw=1.2)
ax.set_ylim(-10, 10)
ax.set_title(f"simulation pour :  $\alpha=\{\alpha\}$ ,  $\gamma=\{\gamma\}$ ,  $\omega=\{\omega\}$ ")
ax.legend(loc='upper right')
plt.xlabel("Temps (s)")
plt.ylabel("x(t) (m)")
plt.show()

# Commande interact
interact(simulate_switch_v2,
        alpha=FloatSlider(min=0.0, max=2.5, step=0.1, value=0.8, description='Alpha'),
        gamma=FloatSlider(min=0, max=0.8, step=0.05, value=0.1, description='Gamma'),
        omega=FloatSlider(min=0.5, max=8.0, step=0.1, value=3.16, description='Omega'))
```