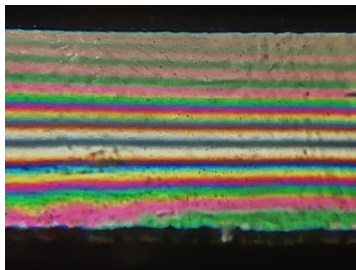


Cartographie des champs de contraintes par photoélasticimétrie

Confrontation expérimentale d'un modèle par éléments finis

MOLINA Angelo



1. Introduction

- **Objectif** : Prédire la distribution des efforts internes dans les structures.
- **Méthode standard** : Méthode des Éléments Finis (MEF).
- **Intérêt** : Valider cette méthode par un contrôle expérimental direct non destructif : la Photoélasticimétrie.

1.1 Les matériaux Photoélastiques

- Les matériaux photoélastiques sont des matériaux qui gagnent une anisotropie optique lorsque soumis à une contrainte.
- Exemples de matériaux photoélastiques :
 - Polymétacrylate de méthyle/ Plexiglass™
 - Polycarbonate

1.2 Problématique

Problématique centrale du TIPE :

Comment exploiter la biréfringence accidentelle des matériaux photoélastiques pour quantifier un champ de contraintes et identifier les limites de validité d'un solveur numérique ?

- **Idéalisation Géométrique :**

Modélisation des surfaces d'appui par des entités de mesure nulle (points, lignes).

Génération de singularités mathématiques artificielles à l'interface de contact.

- **Discrétisation**

Dépendance stricte des résultats vis-à-vis du maillage.

Le raffinement local fait diverger la contrainte numérique vers l'infini au point d'application.

2. Le Phénomène Photoélastique

- **Matériau d'étude** : Polycarbonate
- Hypothèses d'études :
 - Isotropie optique au repos caractérisé par un unique indice de réfraction n_0 .
 - Élasticité linéaire : la contrainte imposée reste dans le domaine d'élasticité du matériau
 - Étude bidimensionnelle : Le matériau ne subit des contraintes que selon la surface normale à l'axe de propagation de la lumière

2.1 Base privilégiée

- Il existe une base privilégiée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ où le matériau ne subit pas de contraintes de cisaillement et $\vec{e}_3$ est le sens de propagation de la lumière.

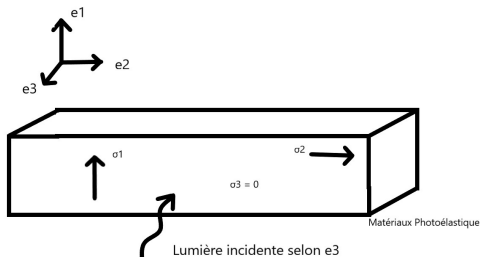


Figure 1 : Champ de contraintes internes principales (σ_1, σ_2) au matériau photoélastique

2.2 Modèle Phénoménologique de Maxwell

- Ce modèle postule un couplage opto-mécanique direct dans le domaine linéaire. On a alors ($\sigma_3 = 0$) :

$$n_1 - n_0 = C_1\sigma_1 + C_2\sigma_2 \quad (1)$$

$$n_2 - n_0 = C_1\sigma_2 + C_2\sigma_1 \quad (2)$$

2.3 Loi de Brewster

- On obtient alors, en effectuant (1) - (2) et en posant $C = C_1 - C_2$, la Loi de Brewster :

$$n_1 - n_2 = C(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (3)$$

avec C en Brewster B ($1B = 10^{-12} Pa^{-1}$)

3 Le Polariscope

Pour exploiter le retard de phase induit par ces contraintes, le matériau photoélastique est placé dans un polariscope plan. Ce montage est constitué d'un polariseur et d'un analyseur rectilignes croisés.

3.1 Le Polariscope Plan

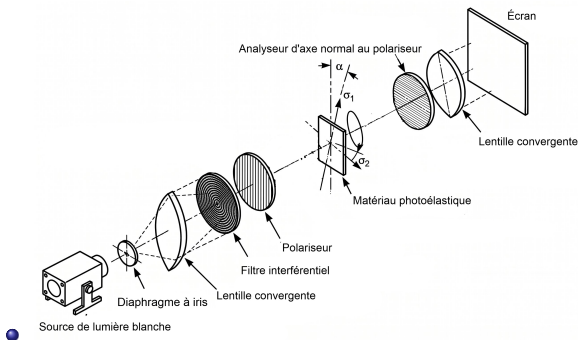


Figure 2.1 : Schéma du Polariscope Plan [1]

3.1.1 Analyse du Polariscope Plan

- L'intensité lumineuse mesurée sur l'écran dépend de deux paramètres :
 - La sélection vectorielle du champ électrique par les filtres polarisants
 - Les interférences provenant du phénomène photoélastique
- Soit $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ le repère du polariscope, où le polariseur impose une polarisation selon $\vec{u}_x$ et l'analyseur, selon $\vec{u}_y$. Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ le repère des contraintes principales au point d'étude. Alors :

$$\vec{E}_{inc} = E_0 \vec{u}_x = E_0 \cos \alpha \vec{e}_1 - E_0 \sin \alpha \vec{e}_2$$

3.1.2 Calcul d'intensité lumineuse

- La traversée dans le matériau photoélastique induit un retard de phase ϕ :

$$\vec{E}_{sort} = E_0 e^{i\phi} \cos \alpha \vec{e}_1 - E_0 \sin \alpha \vec{e}_2$$

- Alors :

$$E_A = \vec{E}_{sort} \cdot \vec{u}_y = (E_0 e^{i\phi} \cos \alpha \vec{e}_1 - E_0 \sin \alpha \vec{e}_2)(\sin \alpha \vec{e}_1 + \cos \alpha \vec{e}_2)$$

3.1.2 Calcul d'intensité lumineuse par le polariscope plan

$$E_A = ie^{i\phi/2} E_0 \sin(2\alpha) \sin(\frac{\phi}{2})$$

Enfin, on obtient la loi du polariscope plan :

$$I = k \cdot E_A \cdot E_A^* = I_0 \sin^2(2\alpha) \sin^2(\frac{\phi}{2}) \quad (4)$$

3.1.3 Calcul de retard de phase

- Le calcul du déphasage ϕ s'effectue comme tel :

En notant a l'épaisseur du matériau selon l'axe du rayon lumineux

$$\delta = |(SM)_2 - (SM)_1|$$

avec S le point source lumineuse et M un point après passage dans le polariscope.

Alors :

$$\delta = |an_1 - an_2|$$

$$\delta = a|n_1 - n_2| = aC|\sigma_1 - \sigma_2|$$

3.1.4 Expression finale de I dans le polariscope plan

- On obtient enfin la loi du polariscope plan en fonction de la différence des contraintes principales :

$$I = I_0 \sin^2(2\alpha) \sin^2\left(\frac{\pi a C}{\lambda} |\sigma_1 - \sigma_2|\right) \quad (5)$$

- La figure obtenue sur l'écran dépend en effet de la superposition de deux réseaux de franges :
 - Les isochromes, caractéristiques du phénomène photoélastique
 - Les isoclines, caractéristiques de l'angle α .

3.2 Le Polariscope Circulaire

- Les isoclines , provenant des projections des axes principaux sur ceux du couple polariseur/analyseur composent ici un signal parasite. On s'en débarrasse avec un polariscope circulaire :

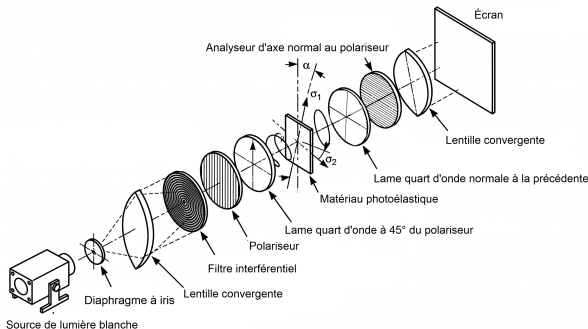


Figure 2.2 : Schéma du Polariscope Circulaire [1]

3.2.1 Calcul d'intensité lumineuse par le polariscope circulaire

- Le polariscope circulaire simplifie alors l'expression de I en la loi du polariscope circulaire :

$$I = I_0 \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (6)$$

$$I = I_0 \sin^2\left(\frac{\pi a C}{\lambda} |\sigma_1 - \sigma_2|\right) \quad (7)$$

4 Exploitation de la photoélasticité : Détermination de C

- Soit une poutre de Polycarbonate de dimensions $L_0 * a * a \text{ mm}^3$. Un bout de la poutre est encastré tandis que l'autre bout voit une masse en pendre. La poutre est en flexion simple :

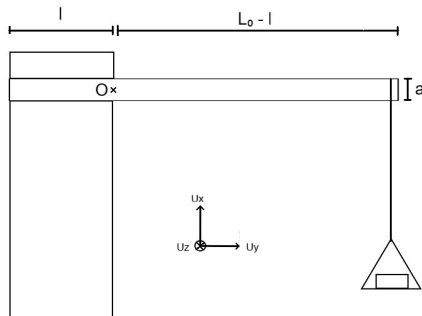


Figure 3 : Schéma de la poutre en flexion simple

4.1 Étude de la poutre en flexion simple

- Sous l'action du poids de masse m de force $F = mg$, le système développe un moment fléchissant M_{fz} , créant des contraintes internes à la poutre. Les axes principaux sont $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$. De plus, $\sigma_x = \sigma_2 = 0$ ici.
- On détermine σ_y avec le modèle d'Euler-Bernoulli :

$$|\sigma_y(x, y)| = \frac{|M_{fz}(y)|}{I_{gz}} \cdot |x| \quad (8)$$

Où :

$-M_{fz}(y)$ est le moment fléchissant de la poutre en y induit par le moment du poids P : $|M_{fz}(y)| = mg|L_0 - l - y|$

$-I_{gz}$ est le moment quadratique de la section carrée $a \times a$. Ici, $I_{gz} = \frac{a^4}{12}$.

4.1 Étude de la poutre en flexion simple

- Alors :

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = |\sigma_y(x, y)| = \frac{12mg|L_0 - l - y|}{a^4}|x| \quad (9)$$

4.2 Lien Opto-mécanique et expression de l'interfrange dans le cas de la flexion simple

- En injectant (9) dans (7), on obtient :

$$I = I_0 \sin^2(\pi A m x) \quad (10)$$

Avec $A(y) = \frac{C}{\lambda} \cdot \frac{12g|L_0 - l - y|}{a^3}$.

- L'expression de l'interfrange est alors immédiate :

$$i(y) = \frac{1}{A(y)m}, \quad \frac{1}{i(y)} = A(y)m \quad (11)$$

4.3 Exploitation de l'expression de l'intégrale : étalonnage et détermination de C

- En effectuant une régression linéaire de $1/i$ en fonction de m , la pente de l'équation $1/i = f(m)$ sera de pente $P(y)$ telle que :

$$P(y) = A(y), \quad C = P(y) \frac{\lambda a^3}{12g|L_0 - l - y|} \quad (12)$$

5 Résultats expérimentaux

- Dans notre cas, on utilise un polariscope plan avec le couple polariseur/analyseur orienté à ± 45 par rapport à la verticale. Sachant que la contrainte principale est selon l'horizontale dans la poutre, l'influence des isoclines est ici éliminée.

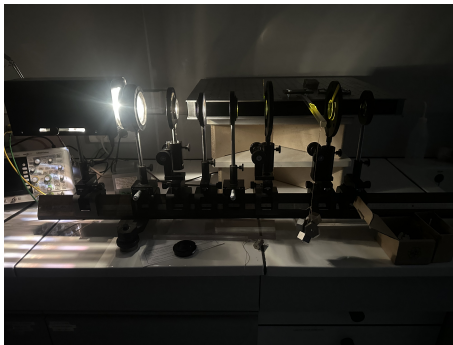


Figure 4 : Montage réel en polariscope simple astucieux

5.1 Grandeurs réelles

- On travaille ici à $\lambda = 546nm$, $l = 50mm$, $L_0 - l - y = 125mm$. Les masses utilisées ici vont de $200g$ à $500g$ avec un pas de $50g$. On prendra $g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$.
- De plus, les incertitudes associées à ces grandeurs sont :
 $u(\lambda) = 3nm$ pour un filtre interférentiel moyen,
 $u(a) = 0.05mm$ et $u(|L_0 - l - y|) = 0.15mm$, ces grandeurs ont été mesurées avec un pied à coulisse analogique à vernier d'incertitude $0.05mm$.

5.2.1 Figures d'interférence à différentes masses m

- À vide :

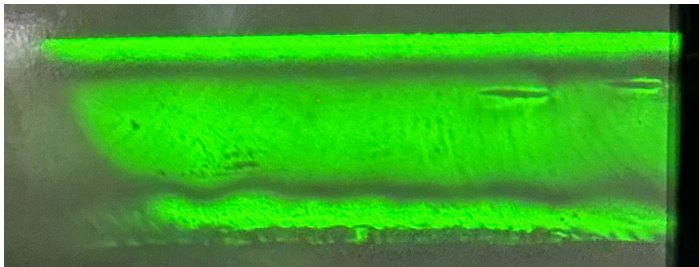


Figure 4.0 : Figure à travers le polariscope par la poutre à vide.

- Il existe donc une contrainte interne résiduelle dans la poutre, probablement due au fait qu'une face a été sciée. On évitera donc les calculs proche de cette face. Cette contrainte se manifestera par une constante additive dans l'expression de $1/i = f(m)$.

5.2.1 Figures d'interférence à différentes masses m

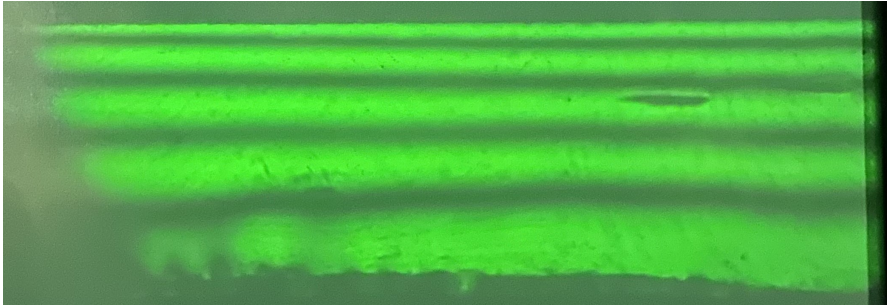


Figure 4.1 : Figure à travers le polariscope par la poutre à 200g. $i = 2.86\text{mm}$

5.2.1 Figures d'interférence à différentes masses m

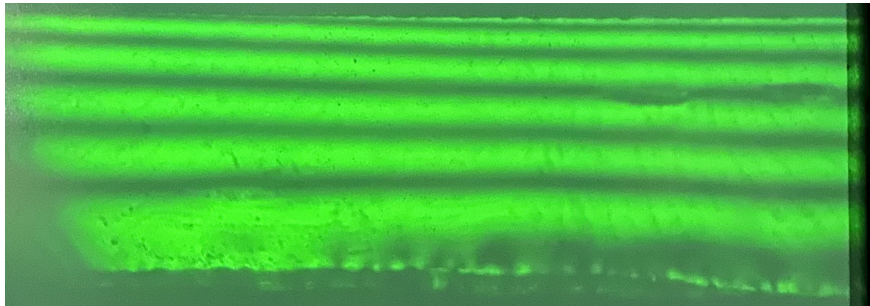


Figure 4.2 : Figure à travers le polariscope par la poutre à 250g. $i = 2.04\text{mm}$

5.2.1 Figures d'interférence à différentes masses m

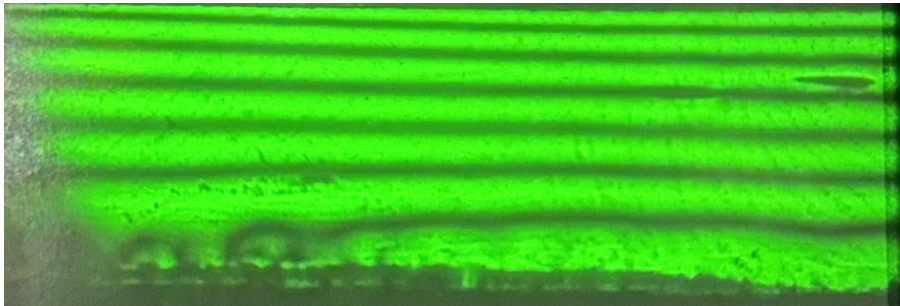


Figure 4.3 : Figure à travers le polariscope par la poutre à 300g. $i = 1.66\text{mm}$

5.2.1 Figures d'interférence à différentes masses m

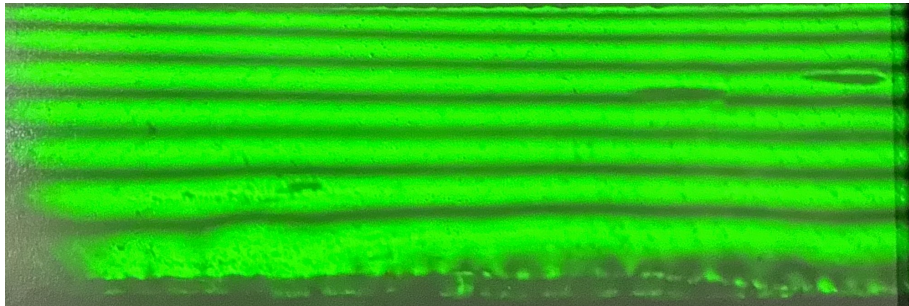


Figure 4.4 : Figure à travers le polariscope par la poutre à 350g. $i = 1.47\text{mm}$

5.2.1 Figures d'interférence à différentes masses m

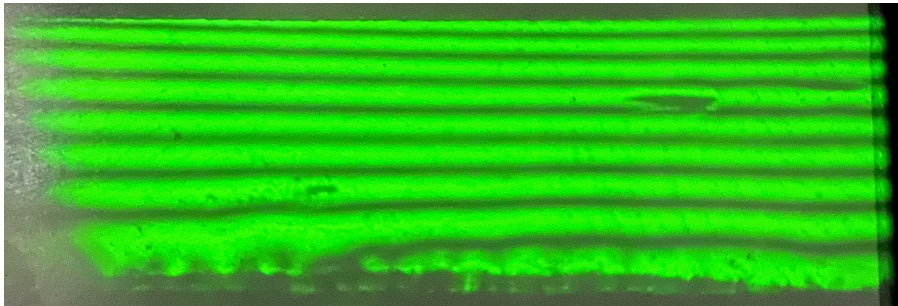


Figure 4.5 : Figure à travers le polariscope par la poutre à 400g. $i = 1.24\text{mm}$

5.2.1 Figures d'interférence à différentes masses m

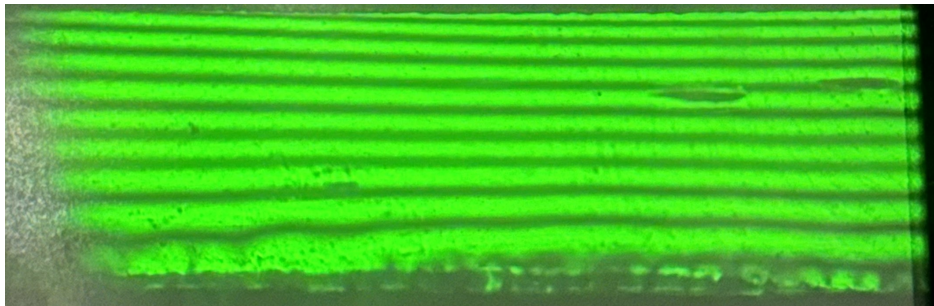


Figure 4.6 : Figure à travers le polariscope par la poutre à 450g. $i = 1.10\text{mm}$

5.2.1 Figures d'interférence à différentes masses m

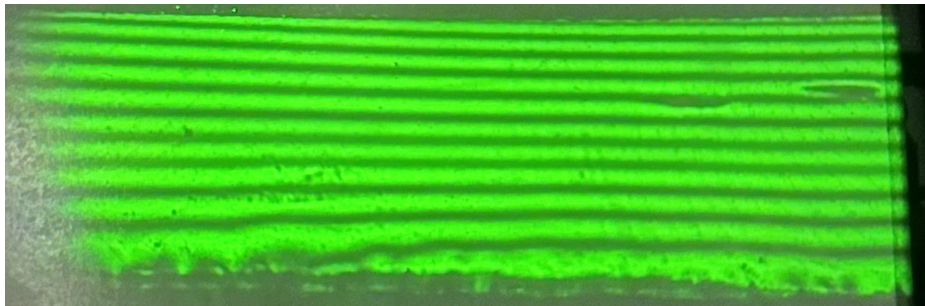


Figure 4.7 : Figure à travers le polariscope par la poutre à 500g. $i = 0.98\text{mm}$

5.3 Exploitation des résultats de l'expérience

- Après régression linéaire, on trouve :

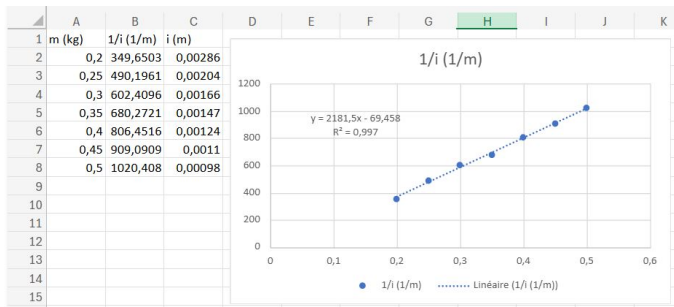


Figure 5 : Régression linéaire de $1/i$

5.3 Exploitation des résultats de l'expérience

$$\frac{1}{i} = 2181.5m + 69.458, \quad R^2 = 0.997 \quad (13)$$

- On a bien une ordonnée à l'origine non nulle due à la contrainte résiduelle
- On identifie $P(y) = 2181.5 \text{ m}^{-1} \text{ kg}^{-1}$ donc, par (12) :

$$C_{\text{mesure}} = 80 \text{ B} \quad (14)$$

5. Détermination totale de C

- L'incertitude de $P(y)$ se détermine par la méthode des moindres carrés ordinaires ($n=7$) :

$$u(P) = |P| \sqrt{\frac{\frac{1}{R^2} - 1}{n-2}} = 53.5 \text{ m}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$$

- Puis, par la loi de propagation des incertitudes :

$$\frac{u(C)}{C_{mesure}} = \sqrt{\left(\frac{u(|L_0 - l - y|)}{|L_0 - l - y|}\right)^2 + 9\left(\frac{u(a)}{a}\right)^2 + \left(\frac{u(\lambda)}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{u(P)}{P}\right)^2}$$

$$u(C) = 2,01B \quad (15)$$

5 Détermination totale de C

- Enfin,

$$\boxed{C = 80 \pm 2 B} \quad (16)$$

- La valeur tabulée de C [2] est de 84 B. On peut alors calculer l'écart normalisé de notre valeur de C :

$$E_n = \frac{|C_{\text{mesuré}} - C_{\text{ref}}|}{u(C)} = \frac{|80 - 84|}{2} = 2 \leq 2$$

- Notre valeur est compatible avec la valeur de référence.

6 Exemple d'application de la photoélasticité et comparaison de la méthode numérique

- Maintenant que nous avons la constante photoélastique du Polycarbonate, la photoélasticimétrie peut être utilisée comme un véritable outil de mesure du champ de contraintes de n'importe quelle structure plane en Polycarbonate.
- On étudie ici l'application d'une pointe à la poutre précédente aux deux bouts encastrés.

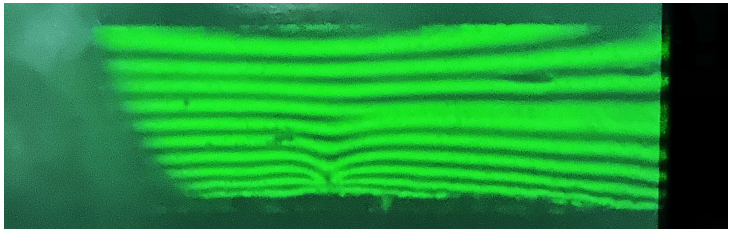


Figure 5 : Figure obtenue dans notre cas

7 Limites de la simulation numérique

- Le même expérience effectuée sous le solveur numérique FREECAD présente des incohérences dans les valeurs des contraintes internes de la poutre. Nous avons simulé l'application de la pointe quasi-ponctuelle par une force sur une petite surface de la poutre.

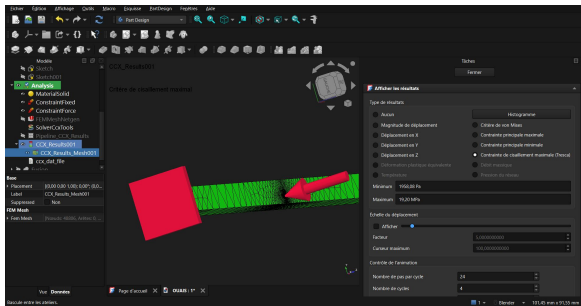


Figure 6 : Simulation de notre étude sous FREECAD montrant le champ de contraintes au sens de Tresca

7 Limites de la simulation numérique

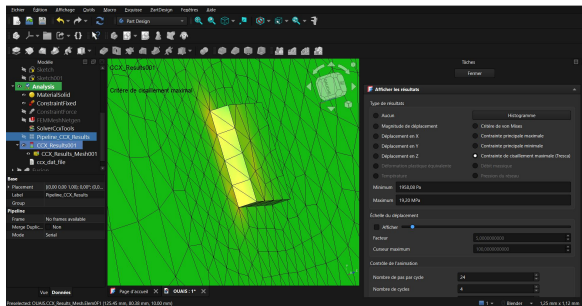


Figure 8 : Zoom sur le point d'application de la force

- On remarque en effet que le solveur présente une singularité des contraintes alors que l'on peut calculer les contraintes internes à l'aide de la figure formée par photoélasticimétrie.
- Les méthodes photoélastiques et numériques sont complémentaires.

Merci d'avoir écouté !

- [1] : https://cours.polymtl.ca/mec6405/A2012/Cours%207/Cours7_A12_v2.pdf
- [2] : <https://www.strainoptics.com/wp-content/uploads/2017/07/Photoelastic-Stress-Analysis-of-PolycarbonateMedical-Parts.pdf>