

Topologie algébrique : étude de l'homotopie et du groupe fondamental

Le choix du sujet découle d'une passion pour les Mathématiques et particulièrement pour la topologie. Ce sujet établit les bases de la théorie de l'homotopie et du Groupe Fondamental et explore les possibilités offertes par la topologie algébrique dans les autres branches de mathématiques et l'efficacité des preuves qu'elle peut fournir.

La notion de cycle, au sens de lacet fermé, est l'objet fondamental de ce TIPE

Le candidat atteste avoir travaillé en groupe.

Liste des membres du groupe :

- *MONCHAL Mathis*

Positionnement thématique (ÉTAPE 1) :

- *MATHEMATIQUES (Algèbre)*

- *MATHEMATIQUES (Analyse)*

Mots-clés (ÉTAPE 1) :

Mots-clés (en français) Mots-clés (en anglais)

<i>Topologie</i>	<i>Topology</i>
<i>Cycles</i>	<i>Cycles</i>
<i>Homotopie</i>	<i>Homotopy</i>
<i>Groupe fondamental</i>	<i>Fundamental Group</i>
<i>Analyse Complexe</i>	<i>Complex Calculus</i>

Bibliographie commentée

La continuité est l'une des propriétés les plus fondamentales des mathématiques. La topologie se distingue de la géométrie classique par son caractère qualitatif : elle étudie les propriétés des objets qui restent invariants sous une déformation continue. Je vais m'intéresser en particulier aux cycles , puisque cela s'inscrit dans le thème de cette année. L'étude des cycles amène

ensuite très rapidement la notion d'homotopie. C'est la théorie de l'homotopie [2][4] qui révèle le potentiel des cycles. Une homotopie peut être définie comme étant une déformation d'un lacet de manière continue, c'est l'outil qui permet de “ détecter les trous “ dans une variété topologique. L'homotopie, en plus d'être un outil pratique, permet d'introduire le groupe fondamental d'un ensemble [3][4]

L'application la plus emblématique est la construction du groupe fondamental. En considérant l'ensemble des cycles basés en un point, quotienté par la relation d'homotopie, on obtient une structure de groupe. A chaque espace on peut donc associer le groupe fondamental : $\pi_1(X)$. Le groupe fondamental permet de catégoriser les espaces topologiques, par exemple, le groupe fondamental d'un cercle est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$, chaque entier représentant le nombre de tours effectués autour du centre. Grâce au groupe fondamental on peut prouver assez aisément que dans l'espace à trois dimensions, le tore et la sphère ne sont pas homéomorphes, c'est à dire qu'il ne possèdent pas les mêmes propriétés intrinsèques. Le développement de la topologie algébrique est particulièrement utile pour l'étude des graphes, ou en informatique où l'on peut lier théorie des types et homotopie, en robotique et enfin en analyse complexe, comme par exemple pour le théorème du point fixe de Brouwer.

Au-delà de la classification pure, l'homotopie s'avère être un outil de calcul puissant dans cette discipline. Le théorème de Cauchy [1] illustre parfaitement cette synergie : l'intégrale d'une fonction holomorphe sur un lacet est invariante si l'on déforme le lacet au sein d'un domaine d'holomorphie. Ici, l'homotopie garantit la conservation d'une quantité physique ou analytique.

L'homotopie transforme des problèmes géométriques complexes en structures algébriques manipulables. C'est un outil de réduction de la complexité qui trouve des échos aussi bien dans la résolution d'équations différentielles que dans la conception d'algorithmes de navigation.

Problématique retenue

En quoi l'invariant algébrique issu de l'étude des cycles permet-il de dépasser l'intuition géométrique pour classer rigoureusement les surfaces et traiter des problèmes d'analyse complexe ?

Objectifs du TIPE du candidat

Définir l'homotopie et grâce aux propriétés remarquables de la relation d'équivalence qu'elle apporte à l'ensemble des cycles, introduire le groupe fondamental. Le calcul du groupe fondamental est déjà un exercice intéressant en lui-même, je calculerai le groupe fondamental du cercle, du tore et d'autres parties simples d'un espace métrique. J'aborderai ensuite les applications que peut avoir le groupe fondamental tout d'abord pour la classification des surfaces, et ensuite dans d'autres branches des mathématiques comme l'analyse complexe.

Références bibliographiques (ÉTAPE 1)

- [1] MATHS * : Topologie Algébrique : <https://www.youtube.com/@MathsEtoile>
- [2] VINCENT BECK : Un tout petit peu d'homotopie : <https://www.idpoisson.fr/beck/wp-content/uploads/sites/16/2018/06/homotopie.pdf>
- [3] PIERRON THÉO : Topologie Algébrique : <https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~tpier758/cours/topa.pdf>
- [4] CLÉMENT LECOMTE : Groupe fondamental et homotopie : <https://perso.math.u-pem.fr/fradelizi.matthieu/pdf/tpe-lecomte-13.pdf>

DOT

- [1] : *En Décembre 2025, j'ai quitté mon ancien binôme de TIPE avec lequel je travaillai sur un sujet de Physique : l'optimisation de charge des batteries à l'aide de panneaux solaires par un programme informatique, pour commencer mes recherches en Topologie Algébrique. Pendant cette période, je n'ai fait que me familiariser avec les notions que j'allait ensuite exploiter de manière plus poussée.*
- [2] : *En Janvier 2026, j'ai commencé à lire et faire des recherches plus approfondies sur le coeur de mon sujet : l'Homotopie et le Groupe fondamental.*
- [3] : *En Février 2026, après avoir accumulé le savoir qui allait m'être nécessaire, j'ai fait le lien avec l'analyse complexe, qui constitue la deuxième partie de mon TIPE*
- [4] : *En Mars 2026, j'ai tapé en LaTeX la présentation de mon travail, puis je suis passé à l'oral et j'ai présenté mon travail à un public de plus de 50 personnes.*