

Topologie algébrique : étude de l'homotopie et application en analyse complexe

JOLIVEL Antoine

En quoi l'invariant algébrique issu de l'étude des cycles permet-il de classifier rigoureusement les espaces et traiter des problèmes d'analyse complexe ?

1 Introduction

2 Homotopie

- Définition
- Groupe Fondamental
- Quelques groupes fondamentaux

3 Analyse Complexe

- Les bases
- Homotopie et Analyse complexe

- X est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$
- γ est un chemin dans X , $\gamma : [0, 1] \longrightarrow X$
- γ est un lacet si $\gamma(0) = \gamma(1)$
- x_0 est un point de X

Homotopie

γ_0 et γ_1 deux lacets de même extrémités

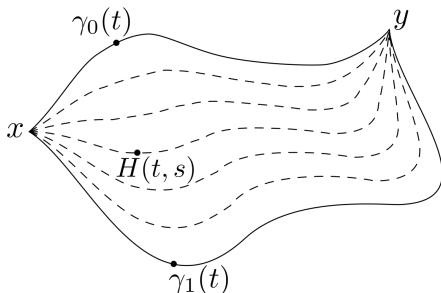
γ_0 est homotope à γ_1



$$\exists H : [0, 1]^2 \longrightarrow X,$$

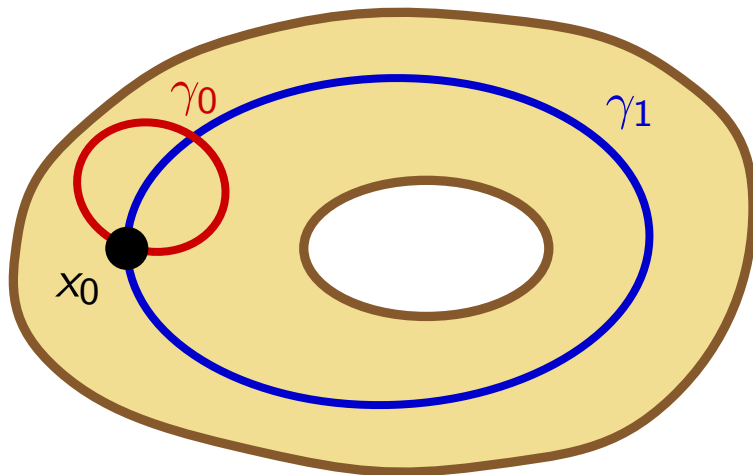
$$\forall t \in [0, 1], H(0, t) = \gamma_0(t) \text{ et } H(1, t) = \gamma_1(t),$$

$$\forall s \in [0, 1], H(s, 0) = x \text{ et } H(s, 1) = y$$



Homotopie - Un exemple

Un exemple de lacets non homotopes :



Le groupe Fondamental de X relativement à x_0 est noté : $\pi_1(X, x_0)$

Opération de concaténation de lacets :

$$\gamma_0 \cdot \gamma_1(t) = \begin{cases} \gamma_0(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_1(2t - 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

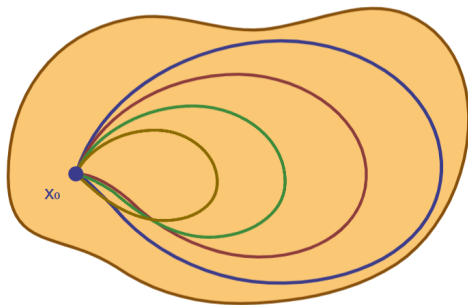
Élément neutre : $[\mathcal{C}_{x_0}]$ le lacet constant valant x_0

Associativité : $[(\gamma_0 \cdot \gamma_1) \cdot \gamma_2] = [\gamma_0 \cdot (\gamma_1 \cdot \gamma_2)]$

Tout élément est symétrisable, de symétrique : $\bar{\gamma} : t \mapsto \gamma(1 - t)$

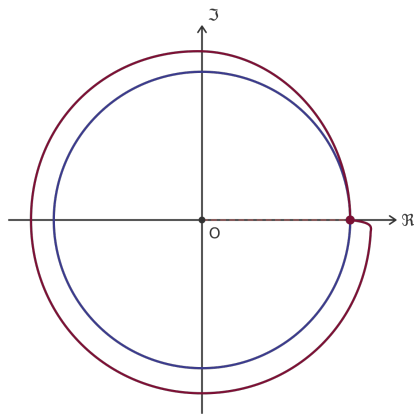
$(\pi_1(X, x_0), \cdot)$ est un groupe

Un premier exemple de Groupe Fondamental



$$\pi_1(X, x_0) \simeq \{0\}$$

Objectif : montrer que $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \simeq \mathbb{Z}$



Théorème de relèvement :

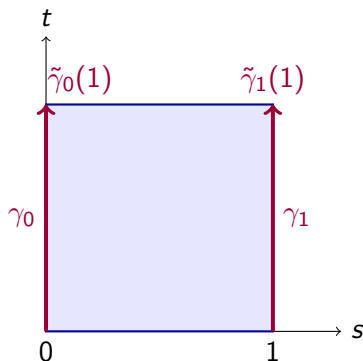
$$\begin{aligned} \exists! \tilde{\gamma} : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}, \text{ continue} \\ \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\gamma}(0) = 0 \\ \forall t \in [0, 1], \gamma(t) = e^{i2\pi\tilde{\gamma}(t)} \end{array} \right. \end{aligned}$$

$\tilde{\gamma}$ est l'argument continu de γ

qui commence à 0

$$\tilde{\gamma}(1) \in \mathbb{Z}$$

Calcul du groupe fondamental du cercle



Montrons que $\gamma_0 \simeq \gamma_1 \implies \tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_1(1)$

On pose φ qui parcourt le carré

$$\tilde{\varphi}\left(\frac{1}{4}\right) = \tilde{\gamma}_0(1) \text{ et } \tilde{\varphi}\left(\frac{1}{2}\right) = \tilde{\gamma}_1(1)$$

$\tilde{\varphi}$ est à valeurs entières sur $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$

Par continuité, $\tilde{\varphi}$ est constante sur $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$

$$\tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_1(1)$$

Calcul du groupe fondamental du cercle

Φ est bien un morphisme :

$$\forall t \in [0, 1], \gamma_k(t) = e^{i2k\pi t}$$

$\gamma \cdot \gamma'$ coïncide d'abord avec γ puis avec γ'

$$\Phi : \begin{array}{l} \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z} \\ [\gamma] \mapsto \tilde{\gamma}(1) \end{array}$$

Par unicité du relèvement, cela nous donne :

$$\widetilde{\gamma \cdot \gamma'}\left(\frac{1}{2}\right) = \tilde{\gamma}(1) \text{ et } \widetilde{\gamma \cdot \gamma'}(1) - \tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}'(1)$$

$$\widetilde{\gamma_0 \cdot \gamma_1}(1) = \tilde{\gamma}(1) + \tilde{\gamma}'(1)$$

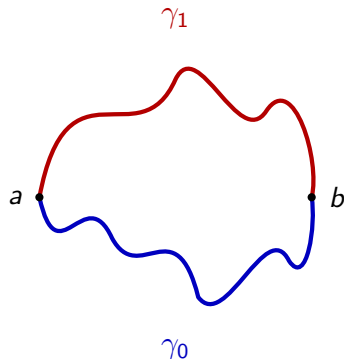
est bijective

Φ est un isomorphisme de groupes

$$\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \simeq \mathbb{Z}$$

- Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$
- f est une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$
- on définit l'intégrale de f sur le chemin γ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ par

$$\int_{\gamma} f = \int_0^1 f(\gamma(t)) \times \gamma'(t) dt$$



H une homotopie de γ_0 à γ_1
des chemins sur Ω , de classe $\mathcal{C}^2$

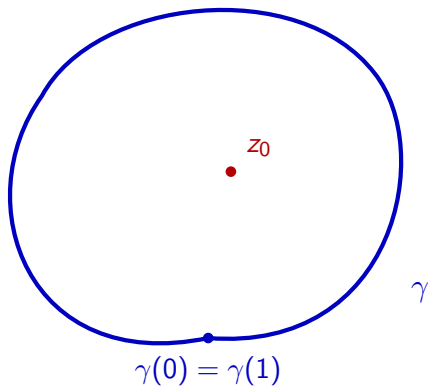
$$I(s) = \int_{H(s, \cdot)} f, \quad \frac{d}{ds} I(s) = 0$$

I est une fonction constante

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$$

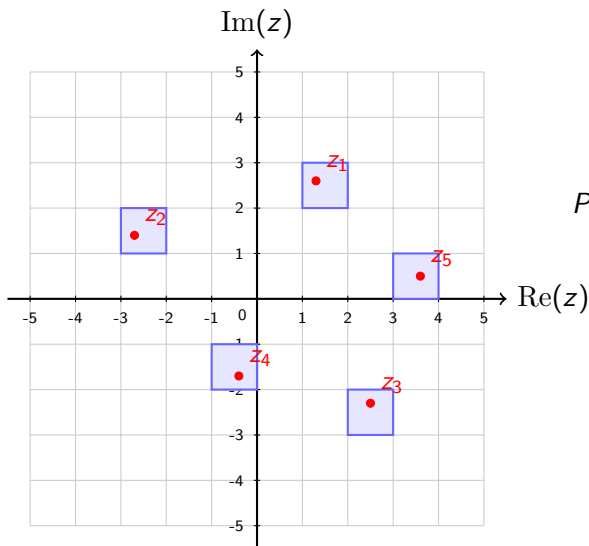
$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$$

$\frac{1}{f}$ est définie sur $\Omega' = \Omega \setminus f^{-1}(\{0\})$



$\int_{\gamma} \frac{1}{f}$ non nécessairement nulle

Application : détection de zéros de polynômes



$$P \in \mathbb{C}[X], \text{ Soit } g = \frac{P'}{P}$$

$$\int_{\gamma} g \neq 0 \implies$$

Il y a un zéro dans le carré

Annexe : Détection de zéros de polynômes, Algorithme

Algorithme :

Zéros $\leftarrow []$

File $\leftarrow \emptyset$

Trouver M tel que $\forall z \in \Omega, f(z) = 0 \Rightarrow |z| \leq M$

Placer le carré centré en 0 de côté $2M$ dans File

Tant que File $\neq \emptyset$

Retirer le carré en tête de File

Quadriller ce carré en 100 carrés égaux : $(c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 10}$

Pour i allant de 1 à 10

Pour j allant de 1 à 10

Si $\int_{c_{i,j}} g \neq 0$

Si le côté de $c_{i,j} \leq \varepsilon$

ajouter le centre de $c_{i,j}$ à Zéros

Sinon,

Ajouter $c_{i,j}$ à File

Annexe - $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \simeq \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$

On peut montrer que

$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ est isomorphe à $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$

L'application $\Psi : \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$
 $([\gamma_0], [\gamma_1]) \longmapsto [(\gamma_0, \gamma_1)]$

Annexe - Invariance de l'intégrale à homotopie près 1

f une fonction holomorphe

H une homotopie de classe $\mathcal{C}^2$

$$\text{On pose } I(s) = \int_{H(s, \cdot)} f = \int_0^1 f(H(s, t)) \times \frac{\partial}{\partial t} H(s, t) dt$$

On peut donc intervertir dérivation et intégrale, puisque $f \circ H$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le compact $[0, 1]^2$

Annexe - Invariance de l'intégrale à homotopie près 2

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}I(s) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s}((f \circ H)(s, t) \times \frac{\partial H}{\partial t}(s, t))dt = \\ &\int_0^1 \frac{\partial H}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial H}{\partial t}(s, t) \times f'(H(s, t)) + f \circ H(s, t) \times \frac{\partial^2 H}{\partial s \partial t} dt\end{aligned}$$

$$\text{Par Schwarz, } \frac{\partial^2 H}{\partial s \partial t} = \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial s}$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial H}{\partial t}(s, t) \times \left(\frac{\partial H}{\partial s}(s, t) \times f'(H(s, t)) + \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial s}(s, t) \times f \circ H(s, t) \right) dt$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}I(s) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial H}{\partial s}(s, t) \times f \circ H(s, t) \right) dt \\ &= \frac{\partial H}{\partial s}(s, 1) \times f(H(s, 1)) - \frac{\partial H}{\partial s}(s, 0) \times f(H(s, 0)) = 0\end{aligned}$$

Formules de Cauchy

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, analytique, $z_0 \in \Omega \forall \mathcal{B}(z_0, R) \in \mathbb{C}$ $f(z + z_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$

Soit $r \in]0, R[$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} a_n r^n e^{i(n-k)\theta} d\theta = a_k r^k$$

$$\text{Formule de Cauchy : } a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$$

Toute fonction holomorphe est analytique

Théorème des zéros isolés :

Si une fonction holomorphe admet un zéro qui n'est pas isolé i.e.

$$f(z) = 0 \text{ et } \exists (z_k)_{k \in \mathbb{N}}, z_k \neq z$$

une suite de zéros de f convergeant vers z , alors $f = 0$

Théorème de Liouville

Une fonction définie sur tout $\mathbb{C}$, holomorphe et bornée est constante

Application, le théorème de D'Alembert - Gauss

$P \in \mathbb{C}[X]$, Supposons que P ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$ et $n = \deg(P) \geq 1$

$$|P(z)| \xrightarrow{|z| \rightarrow +\infty} +\infty$$

$|P|$ admet un minimum non nul donc $\frac{1}{P}$ est borné, puis P est constant