

Topologie Algébrique et applications en Analyse complexe

JOLIVEL Antoine

2026

Contents

1	Introduction sur la topologie algébrique	1
2	Topologie algébrique	1
2.1	Contexte	1
2.2	Homotopie	2
2.3	Groupe Fondamental	3
2.3.1	La loi de groupe	3
2.3.2	Propriétés du groupe fondamental	4
2.3.3	Théorème de relèvement	4
2.3.4	Quelques groupes fondamentaux	4
3	Analyse Complexe	5
3.1	Les bases de l'analyse complexe	5
3.2	Homotopie et Analyse Complexe	5
3.2.1	Théorème d'invariance	5
3.2.2	Application à la détection pratique de zéros de polynômes	5
3.3	Les grands théorèmes de l'analyse complexe	5
4	Annexe	8
4.1	Invariance de l'intégrale sur un chemin, à homotopie près	8
5	Bibliographie	9

1 Introduction sur la topologie algébrique

La notion de topologie algébrique est attribuée au Français Henri Poincaré. Cette branche de la topologie cherche à associer des objets algébriques aux objets manipulés en topologie, afin de classer ceux-ci de manière plus simple et rigoureuse. Le cœur de mon étude en topologie algébrique est l'homotopie. Une homotopie traduit une déformation continue d'un chemin en un autre. L'homotopie amène ensuite la notion de groupe fondamental.

2 Topologie algébrique

2.1 Contexte

- X est une partie connexe par arcs d'un espace métrique $(\mathbb{R}^n, n \geq 1)$
- x_0 est un point de X
- γ désigne un chemin sur X , c'est-à-dire une application continue de $[0, 1]$ dans X
- Un cycle, un lacet ou une boucle basée en x_0 est un chemin γ tel que $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$

2.2 Homotopie

Définition. Soient deux chemins γ_0 et γ_1 tels que $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ et $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$.

On dit que γ_0 est homotope à γ_1 ssi il existe une application $H : [0, 1]^2 \longrightarrow X$ telle que

- $\forall s \in [0, 1], H(s, 0) = H(s, 1) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$
- $\forall t \in [0, 1], H(0, t) = \gamma_0(t)$
- $\forall t \in [0, 1], H(1, t) = \gamma_1(t)$

H formalise la transformation continue de γ_0 en γ_1 . La variable s est le pas de transformation et t est l'avancement sur le chemin intermédiaire. La fonction H est appelée homotopie et on dit alors que γ_0 est homotope à γ_1 .

Propriété. La relation " γ_0 est homotope à γ_1 " est une relation d'équivalence :

- Réflexivité : $(s, t) \mapsto \gamma(t)$ montre que γ est homotope à lui-même.
- Symétrie : Si H est une homotopie de γ_0 à γ_1 , alors $(s, t) \mapsto H(1 - s, t)$ est une homotopie de γ_1 à γ_0 .
- Transitivité : Si H_0 est une homotopie de γ_0 à γ_1 et H_1 une homotopie de γ_1 à γ_2 ,

$$H : (s, t) \mapsto \begin{cases} H_0(2s, t) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ H_1(2s - 1, t) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

est une homotopie de γ_0 à γ_2 .

On dira maintenant que γ_0 et γ_1 **sont** homotopes, et on notera cela $\gamma_0 \simeq \gamma_1$. De plus, on notera $[\gamma]$ la classe d'équivalence de γ pour cette relation.

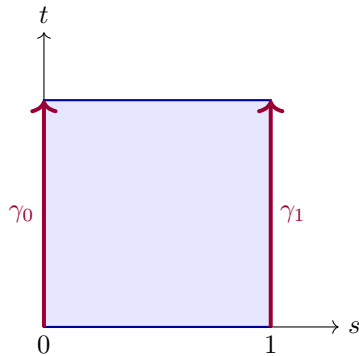


Figure 1: Représentation de l'homotopie par un carré

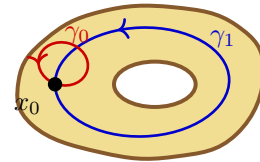


Figure 2: Un exemple de lacets non homotopes

2.3 Groupe Fondamental

2.3.1 La loi de groupe

On travaille désormais avec des lacets seulement, tous basés en x_0 .

On note $\pi_1(X, x_0)$ l'ensemble des classes d'équivalences des lacets basés en x_0 pour la relation d'homotopie.

On l'appelle le groupe fondamental de X relativement à x_0 .

On le munit de la loi de composition interne $\cdot$ (concaténation) définie par :

$$(\gamma_0 \cdot \gamma_1)(t) = \begin{cases} \gamma_0(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_1(2t - 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$\gamma_0 \cdot \gamma_1$ est le lacet qui parcourt d'abord γ_0 puis γ_1 .

Propriété. La concaténation est compatible avec la relation d'homotopie :

$$\gamma_0 \simeq \gamma'_0 \text{ et } \gamma_1 \simeq \gamma'_1 \implies \gamma_0 \cdot \gamma_1 \simeq \gamma'_0 \cdot \gamma'_1$$

Preuve. Soient H_0 homotopie de γ_0 à γ'_0 et H_1 homotopie de γ_1 à γ'_1 .

$$H : (s, t) \mapsto \begin{cases} H_0(s, 2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ H_1(s, 2t - 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

est une homotopie de $\gamma_0 \cdot \gamma_1$ à $\gamma'_0 \cdot \gamma'_1$. On notera ensuite $[\gamma_0] \cdot [\gamma_1] = [\gamma_0 \cdot \gamma_1]$.

Propriété. $(\pi_1(X, x_0), \cdot)$ est un groupe.

- **Élément neutre :** $[\mathcal{C}_{x_0}]$ où $\mathcal{C}_{x_0} : t \mapsto x_0$.
- **Symétrique :** la classe de $\bar{\gamma} : t \mapsto \gamma(1 - t)$ est le symétrique de $[\gamma]$.
- **Associativité :** $(\gamma_0 \cdot \gamma_1) \cdot \gamma_2 \simeq \gamma_0 \cdot (\gamma_1 \cdot \gamma_2)$, donc $([\gamma_0] \cdot [\gamma_1]) \cdot [\gamma_2] = [\gamma_0] \cdot ([\gamma_1] \cdot [\gamma_2])$.

Preuve.

$$H : (s, t) \mapsto \begin{cases} \gamma\left(\frac{2t}{1+s}\right) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}(s+1)] \\ x_0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est une homotopie de $\gamma \cdot \mathcal{C}_{x_0}$ à γ .

$$H' : (s, t) \mapsto \begin{cases} x_0 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}(1-s)] \\ \gamma\left(\frac{2t - (1-s)}{1+s}\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

est une homotopie de $\mathcal{C}_{x_0} \cdot \gamma$ à γ .

Ainsi $[\gamma] \cdot [\mathcal{C}_{x_0}] = [\gamma] = [\mathcal{C}_{x_0}] \cdot [\gamma]$, $[\mathcal{C}_{x_0}]$ est bien l'élément neutre.

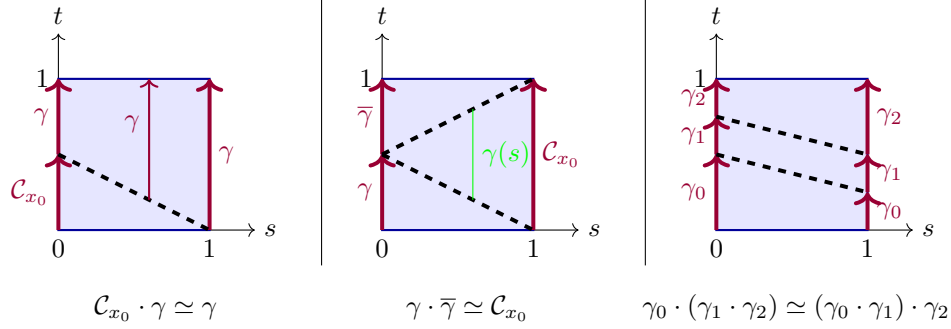
$$H(s, t) \mapsto \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1-s}{2}] \\ \gamma(1-s) = \bar{\gamma}(s) & \text{si } t \in [\frac{1-s}{2}, \frac{1+s}{2}] \\ \bar{\gamma}(2t-1) = \gamma(2-2t) & \text{sinon} \end{cases}$$

est une homotopie de $\mathcal{C}_{x_0}$ à $\gamma \cdot \bar{\gamma}$.

En inversant les rôles de γ et $\bar{\gamma}$, on obtient $\bar{\gamma} \cdot \gamma \simeq \mathcal{C}_{x_0}$, d'où $[\gamma] \cdot [\bar{\gamma}] = [\mathcal{C}_{x_0}] = [\bar{\gamma}] \cdot [\gamma]$: tout élément est symétrisable.

$$H : (s, t) \mapsto \begin{cases} \gamma_0\left(\frac{4t}{2-s}\right) & \text{si } t \in \left[0, \frac{2-s}{4}\right] \\ \gamma_1(4t - (2-s)) & \text{si } t \in \left[\frac{2-s}{4}, \frac{3-s}{4}\right] \\ \gamma_2\left(\frac{4t - (3-s)}{1+s}\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

est une homotopie de $(\gamma_0 \cdot \gamma_1) \cdot \gamma_2$ à $\gamma_0 \cdot (\gamma_1 \cdot \gamma_2)$, d'où l'associativité.



2.3.2 Propriétés du groupe fondamental

Propriété. Le groupe fondamental de X est indépendant du point base. C'est-à-dire que pour $y_0 \in X$, $\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(X, y_0)$.

On pourra alors noter $\pi_1(X)$ le groupe fondamental de X , sans privilégier de point base. On aura systématiquement besoin, en pratique, d'un point base ; cette notation est là pour alléger la précédente.

Propriété. Le groupe fondamental est un invariant topologique : si X est homéomorphe à Y , alors $\pi_1(X)$ est isomorphe à $\pi_1(Y)$.

2.3.3 Théorème de relèvement

Soit γ un lacet sur $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ basé en 1. Le théorème de relèvement donne l'existence et l'unicité de $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\tilde{\gamma}(0) = 0$ et $\forall t \in [0, 1], \gamma(t) = e^{i\tilde{\gamma}(t)}$. Ce théorème permet de calculer le groupe fondamental du cercle, mais aussi de formaliser la notion de "tours" effectués par un lacet.

Propriété. Le nombre de tours effectués par un lacet γ sur $\mathbb{U}$ est donné par $\frac{1}{2\pi}\tilde{\gamma}(1)$, et $\gamma_0 \simeq \gamma_1 \iff \tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_1(1)$.

2.3.4 Quelques groupes fondamentaux

- Si X est convexe, $\pi_1(X) \simeq \{0\}$.
- Si X est étoilée par rapport à un de ses points, $\pi_1(X) \simeq \{0\}$.
- Les espaces ayant un groupe fondamental trivial sont dits contractiles.
- $\pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$, où $\mathbb{S}^1 = \mathbb{U}$ est un cercle.
- $\pi_1(\mathbb{T}) \simeq \mathbb{Z}^2$, $\mathbb{T}$ étant un tore.

3 Analyse Complexe

3.1 Les bases de l'analyse complexe

- On travaille avec Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.
- f désigne une fonction de Ω dans $\mathbb{C}$.
- f est holomorphe si $f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z_0) - f(z)}{z_0 - z}$ est bien définie pour tout z_0 et f' est continue.
- On dit que f est analytique si f est développable en série entière au voisinage de tout $z_0 \in \Omega$.
- L'intégrale sur γ , un chemin $\mathcal{C}^1$ sur Ω , de f holomorphe est définie par : $\int_{\gamma} f = \int_0^1 (f \circ \gamma) \times \gamma'.$

3.2 Homotopie et Analyse Complexe

3.2.1 Théorème d'invariance

Nous allons maintenant mettre en évidence la puissance des outils vus en topologie algébrique, en les appliquant à l'analyse complexe.

Théorème. L'intégrale sur un chemin est invariante à homotopie près. C'est-à-dire que pour deux chemins γ_0 et γ_1 sur Ω ,

$$\gamma_0 \simeq \gamma_1 \implies \int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f.$$

Une preuve dans un cas particulier est donnée en annexe.

3.2.2 Application à la détection pratique de zéros de polynômes

Voici maintenant ce autour de quoi va tourner mon travail en analyse complexe. Du théorème précédent, on déduit un algorithme qui permet de rechercher des zéros de polynômes et de les approcher.

Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$:

- Majorer en module tous les zéros, ce qui est possible car $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |P(z)| = +\infty$; soit M un majorant.
- Paver le carré de centre 0 et de côté $2M$ en 100 carrés de même taille.
- En intégrant $\frac{1}{P}$ sur chacun des carrés (en pratique on intégrera sur les cercles circonscrits aux carrés), déduire ceux contenant des zéros, $\int_{\gamma} \frac{1}{P} \neq 0 \implies$ Il y a un zéro de P enlacé par γ .
- Répéter le processus sur ces mêmes carrés, et continuer jusqu'à avoir une approximation convenable des zéros de P .

3.3 Les grands théorèmes de l'analyse complexe

Théorème fondamental. Il est beaucoup plus aisé de montrer qu'une fonction est holomorphe que de démontrer qu'elle est analytique. À priori, l'analyticité est une propriété beaucoup plus forte que l'holomorphie. Cependant, pour des fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, on a équivalence entre ces deux propriétés. C'est cette propriété étonnante que je vais maintenant démontrer.

Preuve. Soit $z_0 \in \Omega$. Je vais démontrer que f est développable en série entière sur $\mathcal{B}(z_0, R)$, où $R = d(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega) > 0$ (avec $R = +\infty$ si $\Omega = \mathbb{C}$).

Soit $z \in \Omega$, soit $r_0 \in]0, R - |z_0 - z|$, de sorte que $\mathcal{B}(z, r_0) \subset \mathcal{B}(z_0, R)$, et posons $\gamma_{z,r} : t \mapsto z + re^{i2\pi t}$. Soit $r \in]0, R - |z_0 - z|$,

$$I(r) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{z,r}} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{f(z + re^{i2\pi t})}{re^{i2\pi t}} 2i\pi \cdot re^{i2\pi t} dt = \int_0^1 f(z + re^{i2\pi t}) dt.$$

La continuité de f en z donne $I(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} f(z)$, et comme les $\gamma_{z,r}$, $r \in]0, R - |z_0 - z|$, sont homotopes par une homotopie de classe $\mathcal{C}^2$, I est constante égale à $f(z)$.

Ainsi,

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{z,r_0}} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Montrons maintenant que pour tout $r \in]0, R[$, $\gamma_{z_0,r}$ est homotope à γ_{z,r_0} par une homotopie $\mathcal{C}^2$. Les deux chemins sont de classe $\mathcal{C}^2$, et

$$\Gamma : (s, t) \mapsto s \gamma_{z_0,r}(t) + (1-s) \gamma_{z,r_0}(t)$$

est une homotopie convenable de classe $\mathcal{C}^2$.

Par conséquent,

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{z_0,r}} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{f(z_0 + re^{i2\pi t})}{re^{i2\pi t} + z_0 - z} 2i\pi \cdot re^{i2\pi t} dt = \int_0^1 \frac{f(z_0 + re^{i2\pi t})}{1 - \frac{z-z_0}{re^{i2\pi t}}} dt.$$

En utilisant le développement en série entière de $z \mapsto \frac{1}{1-z}$, et par changement de variable $t \mapsto 2\pi t$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-int}}{r^n} (z - z_0)^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi r^n} \left(\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) e^{-int} dt \right) (z - z_0)^n.$$

On intervertit série et intégrale car la convergence de la série est normale sur $\overline{\mathcal{B}}(z_0, r)$.

f est développable en série entière ; les coefficients sont ceux donnés par les formules de Cauchy :

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

De plus, cette preuve montre que le rayon de convergence est égal à $d(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega)$ (l'analyticité seule ne donnait pas cette information).

On a démontré au passage la formule de Cauchy intégrale :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{z_0,r}} \frac{f(w)}{w-z} dw,$$

qui amène naturellement la notion d'indice de lacet.

Soit $a \in \mathbb{C}$. L'indice d'un lacet γ sur $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ par rapport à a est le nombre de tours qu'effectue le lacet autour de a . On formalise cette notion avec le théorème de relèvement : $\text{Ind}_a(\gamma) = \frac{1}{2i\pi} (\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0))$.

Propriété. Soient $a \in \mathbb{C}$ et γ un lacet sur $\mathbb{C} \setminus \{a\}$.

$$\text{Ind}_a(\gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}.$$

Preuve. On ramène γ à un lacet sur le cercle de rayon 1 et de centre a : par le théorème d'invariance, $\gamma \simeq (t \mapsto \frac{\gamma(t)-a}{|\gamma(t)-a|} + a)$ (cette relation est admise, sa démonstration étant technique). Ce lacet est la projection de γ sur le cercle ; son relèvement coïncide avec celui de γ . Par le théorème d'invariance,

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = \int_0^1 \frac{\tilde{\gamma}'(t) e^{i\tilde{\gamma}(t)}}{e^{\tilde{\gamma}(t)}} dt = \int_0^1 \tilde{\gamma}'(t) dt = \tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0).$$

D'où $\text{Ind}_a(\gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}.$

Théorème des résidus.

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Ind}_{a_k}(\gamma) \cdot \text{Res}(f, a_k),$$

où les a_k sont les pôles de f , et $\text{Res}(f, a)$ est le résidu du pôle a pour f , défini comme le coefficient en $\frac{1}{z-a}$ du développement en série de Laurent $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(z-a)^k$ (dont on admet l'existence et l'unicité).

Preuve dans un cas particulier. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$; démontrons le théorème pour $f = \frac{P'}{P}$.

P étant scindé, on écrit $P = \prod_{k=1}^r (X - a_k)^{m_k}$, ce qui donne $f(z) = \sum_{k=1}^r \frac{m_k}{z - a_k}$. On voit ici que $\text{Res}(f, a_k) = m_k$, et

$$\int_{\gamma} \frac{P'(z)}{P(z)} dz = \sum_{k=1}^r m_k \int_{\gamma} \frac{dz}{z - a_k} = 2i\pi \sum_{k=1}^r \text{Ind}_{a_k}(\gamma) \cdot \text{Res}(f, a_k).$$

Retour sur la détection de zéros de polynômes. Fort de ce théorème, j'ai affiné mon algorithme. Il permet désormais non seulement de détecter la présence de zéros dans un cercle, mais de donner exactement le nombre de zéros comptés avec multiplicité, donné par

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{P'(z)}{P(z)} dz,$$

en prenant des lacets γ d'indice 1.

En avançant dans l'itération de l'algorithme, les cercles sur lesquels on intègre sont de plus en plus petits. Or, les zéros d'une fonction analytique — et donc en particulier d'un polynôme — sont isolés. À partir d'un certain rang, chaque cercle restant contiendra au plus un zéro ; ceux donnant une intégrale non nulle fournissent alors une valeur approchée et la multiplicité du zéro.

Exemples : comparaison des deux versions de l'algorithme.

- **Premier exemple :** $P = X^2$, on intègre sur $\gamma : t \mapsto e^{i2\pi t}$.

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2} = \int_0^1 \frac{2i\pi e^{i2\pi t}}{e^{2 \cdot i2\pi t}} dt = 2i\pi \int_0^1 e^{-i2\pi t} dt = 0.$$

La première version ne détecte pas 0 comme zéro de X^2 .

$$\int_{\gamma} \frac{P'(z)}{P(z)} dz = \int_{\gamma} \frac{2z dz}{z^2} = 2 \int_0^1 \frac{2i\pi e^{i2\pi t} \cdot e^{i2\pi t}}{e^{i2\pi t} \cdot e^{i2\pi t}} dt = 2 \times 2i\pi.$$

La deuxième version détecte deux zéros comptés avec multiplicités, ce qui correspond à 0 de multiplicité 2.

- **Deuxième exemple :** $P = X^2 - 1$, on intègre sur $\gamma : t \mapsto 2e^{i2\pi t}$.

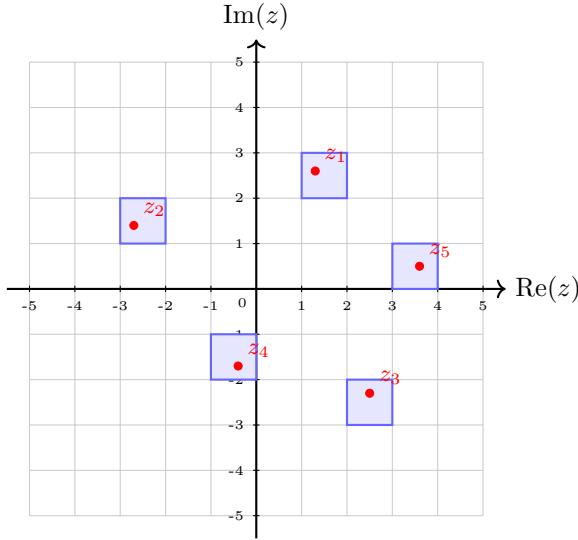
Première méthode :

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{P(z)} = \int_{\gamma} \frac{1/2}{z-1} - \frac{1/2}{z+1} dz.$$

Le théorème des résidus donne $\int_{\gamma} \frac{dz}{P(z)} = 0$; les deux zéros sont comptés mais se compensent.

Deuxième méthode :

$$\int_{\gamma} \frac{P'(z)}{P(z)} dz = \int_{\gamma} \frac{dz}{z-1} + \int_{\gamma} \frac{dz}{z+1} = 2 \times 2i\pi.$$



4 Annexe

4.1 Invariance de l'intégrale sur un chemin, à homotopie près

On suppose disposer d'une homotopie H de γ_0 à γ_1 , de classe $\mathcal{C}^2$ (les chemins γ_0 et γ_1 doivent donc être de classe $\mathcal{C}^2$).

On pose $I : s \mapsto \int_{H(s, \cdot)} f$. On va montrer que I est constante en prouvant que sa dérivée est nulle.

$$\forall s \in [0, 1], \quad I(s) = \int_0^1 f(H(s, t)) \times \frac{\partial H}{\partial t}(s, t) dt.$$

L'intégrande est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le compact $[0, 1]^2$, donc on peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégrale :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} I(s) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} \left((f \circ H)(s, t) \times \frac{\partial H}{\partial t}(s, t) \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{\partial H}{\partial t}(s, t) \cdot \frac{\partial H}{\partial s}(s, t) \cdot f'(H(s, t)) + f(H(s, t)) \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial s \partial t}(s, t) dt. \end{aligned}$$

Le théorème de Schwarz appliqué à H donne $\frac{\partial^2 H}{\partial s \partial t} = \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial s}$, donc :

$$\frac{d}{ds} I(s) = \int_0^1 \frac{\partial H}{\partial t}(s, t) \cdot \frac{\partial H}{\partial s}(s, t) \cdot f'(H(s, t)) + \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial s}(s, t) \cdot f(H(s, t)) dt.$$

On reconnaît dans l'intégrande la dérivée par rapport à t de $\frac{\partial H}{\partial s}(s, t) \cdot (f \circ H)(s, t)$, d'où :

$$\frac{d}{ds}I(s) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial H}{\partial s}(s, t) \cdot (f \circ H)(s, t) \right) dt = \frac{\partial H}{\partial s}(s, 1) \cdot f(H(s, 1)) - \frac{\partial H}{\partial s}(s, 0) \cdot f(H(s, 0)) = 0.$$

Cette dernière égalité vient du fait que $H(s, 0) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ et $H(s, 1) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ pour tout s , ce qui entraîne $\frac{\partial H}{\partial s}(s, 0) = 0 = \frac{\partial H}{\partial s}(s, 1)$.

I est constante, donc $I(0) = I(1)$, c'est-à-dire $\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$.

5 Bibliographie

[1] MATHS ETOILE. " Topologie Algébrique " ; " Analyse Complexe ".
YouTube. <https://www.youtube.com/@MathsEtoile>.

[2] Dominique Hulin. " Fonctions Holomorphes "
<https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~dominique.hulin/poly-holo.pdf>