

Looping, une des figures de
base la plus attirante du
voltige aérienne.

Abalil Ayoub



Introduction



Figure-1



Figure-2



Figure-3

1. **Figure-1** : Premier looping réalisé en 1913
2. **Figure-2** : Compétition de voltige aérienne
3. **Figure-3** : Boucle, figure de base de la voltige

Problématique

Comment le pilote peut manipuler son avion pour un looping esthétique satisfaisant le public et ainsi avoir une meilleure évaluation des juges ?



Sommaire

1. Position du problème: Bilan des forces, Hypothèses de base
2. Notion du facteur de charge
3. Modèle idéal de boucle : cercle parfait
4. Modèle réel : boucle à rayon variant
5. Boucle à facteur de charge constant : Est il possible?
6. Solution pour le problème de discontinuité du facteur de charge
7. Conclusion
8. Annexes



Position du problème

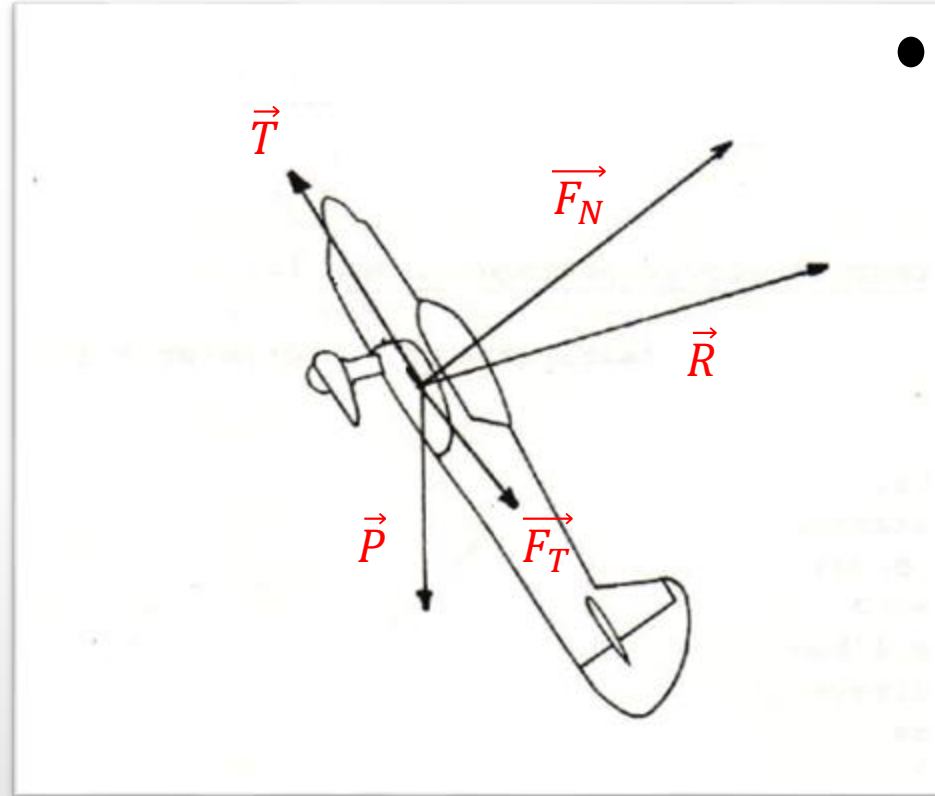
$\vec{T}$: force de traction

$\vec{P}$: Le poids

$\vec{F}_N$: La portance

$\vec{F}_T$: force de trainée

$\vec{R}$: Résultante aérodynamique



Pour un système conservatif plus simple à étudier, on suppose que la force de traction $\vec{T}$ fournie par les moteurs est exactement compensée par la forces de résistance $\vec{F}_T$.

Le problème est plan .

Facteur de charge

Le facteur de charge n est défini comme le rapport entre la portance et le poids:

$$n = \frac{F_N}{mg}$$

Nombre sans unité s'exprimant en g.

Facteur de charge	Effets physiologiques
5g	Diminution du champ visuel
6g	Difficulté à bouger ses membres
-2g	Respiration devient difficile
< -5g	Des hémorragies dans le cerveau

Modèle idéal: Cercle parfait

2^{ème} loi de Newton dans le Réf lié au sol projeté sur l'axe radial :

$$F_N - mg \cos(\theta) = ma_c = \frac{mv^2}{r}$$

$$n = \frac{F_N}{mg}$$

$$n = \frac{v^2}{rg} + \cos(\theta)$$

Conservation d' énergie mécanique :

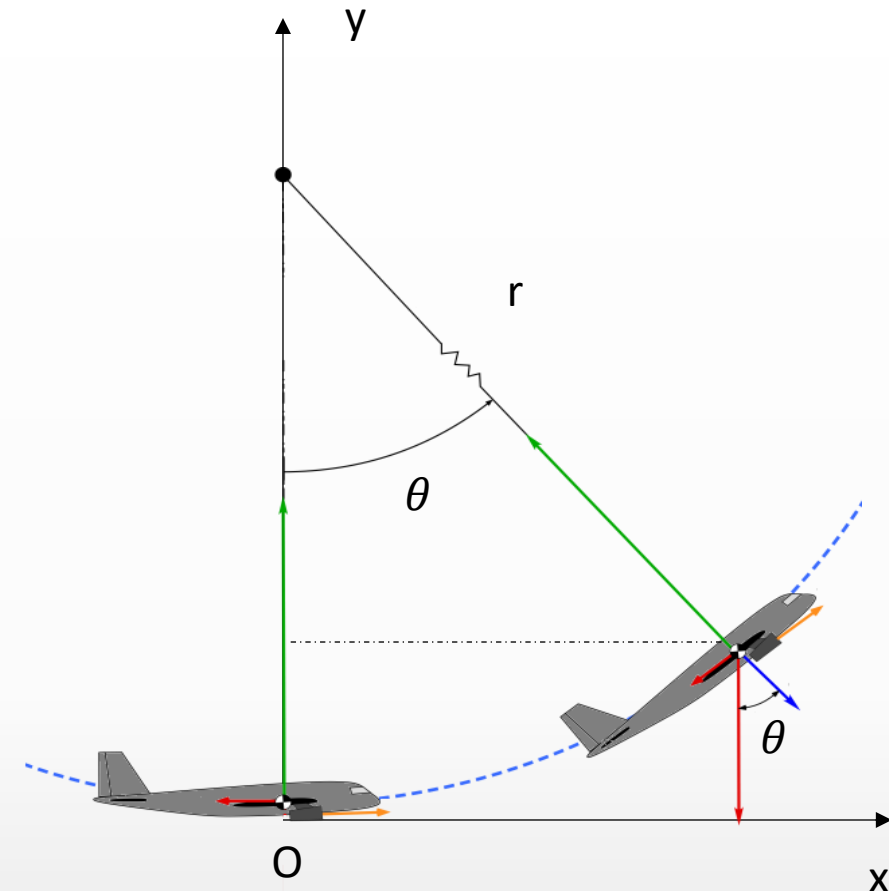
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgh \Rightarrow v^2 = v_0^2 - 2gh$$

Ainsi: $n = \frac{v_0^2}{rg} - \frac{2h}{r} + \cos(\theta)$ de plus $h = r(1 - \cos(\theta))$ et $s = r\theta$

Donc:

$$n = \frac{v_0^2}{rg} + 3 \cos\left(\frac{s}{r}\right) - 2$$

Données: $g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$



Simulation

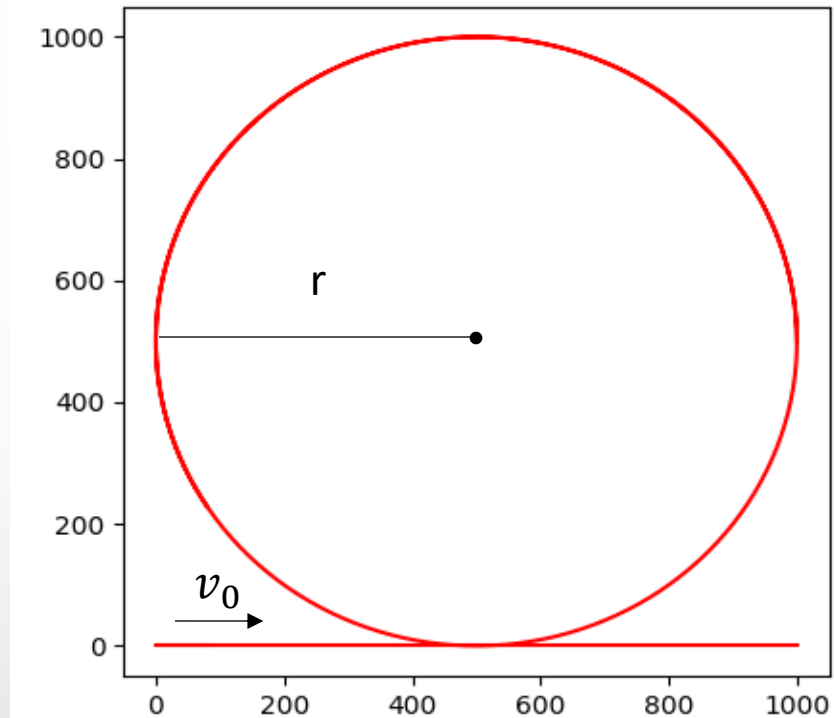


Figure: Boucle Parfait pour $r=500\text{m}$

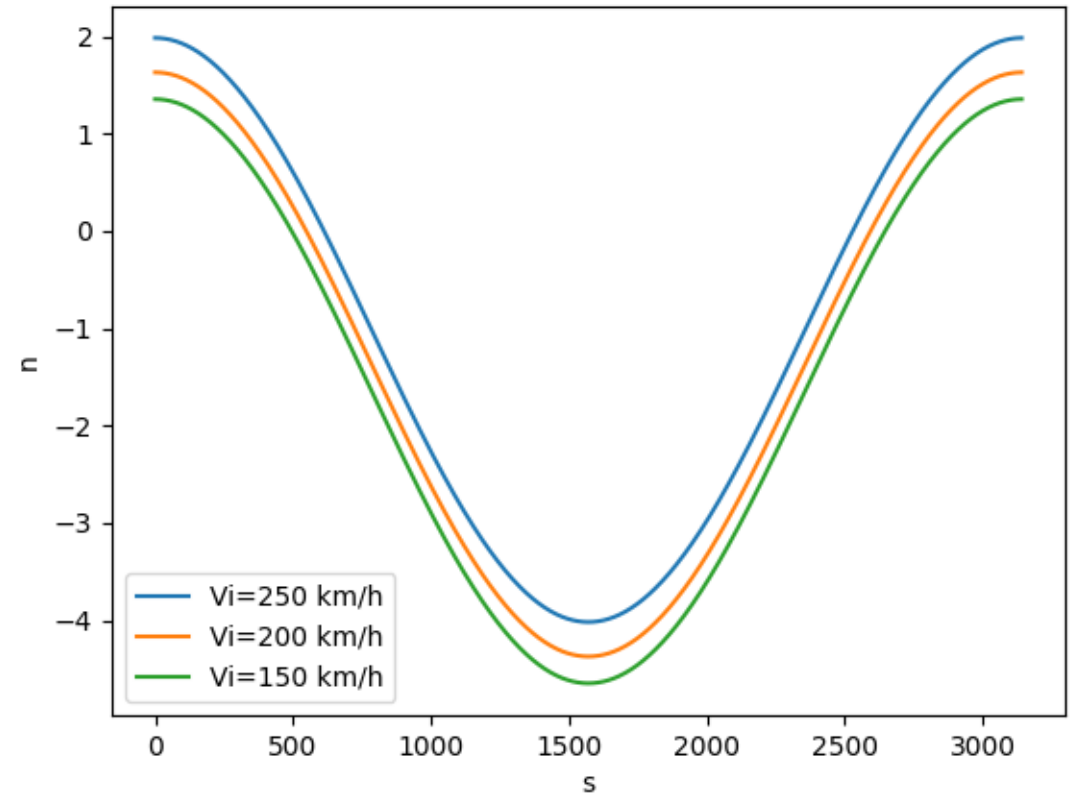


Figure: Variation du facteur de charge pour $r=500\text{m}$

Simulation

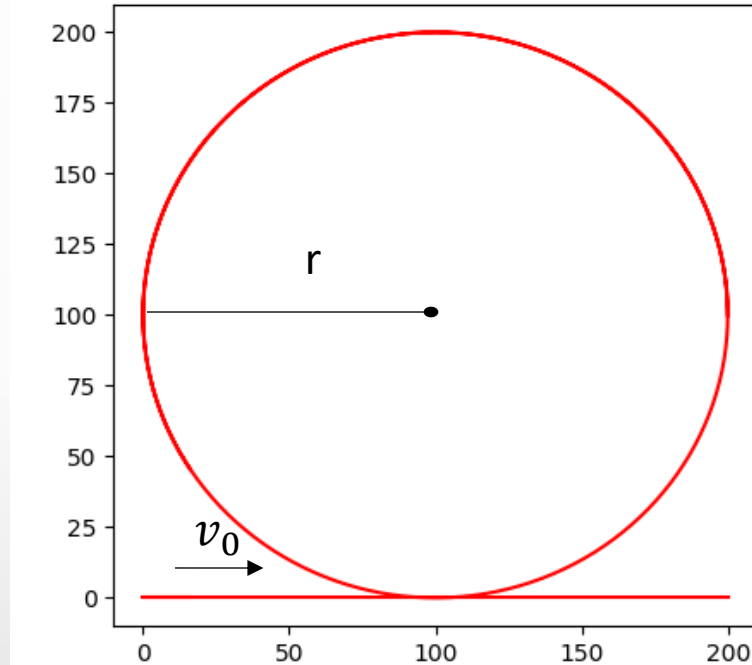


Figure: Boucle Parfait pour $r=100\text{m}$

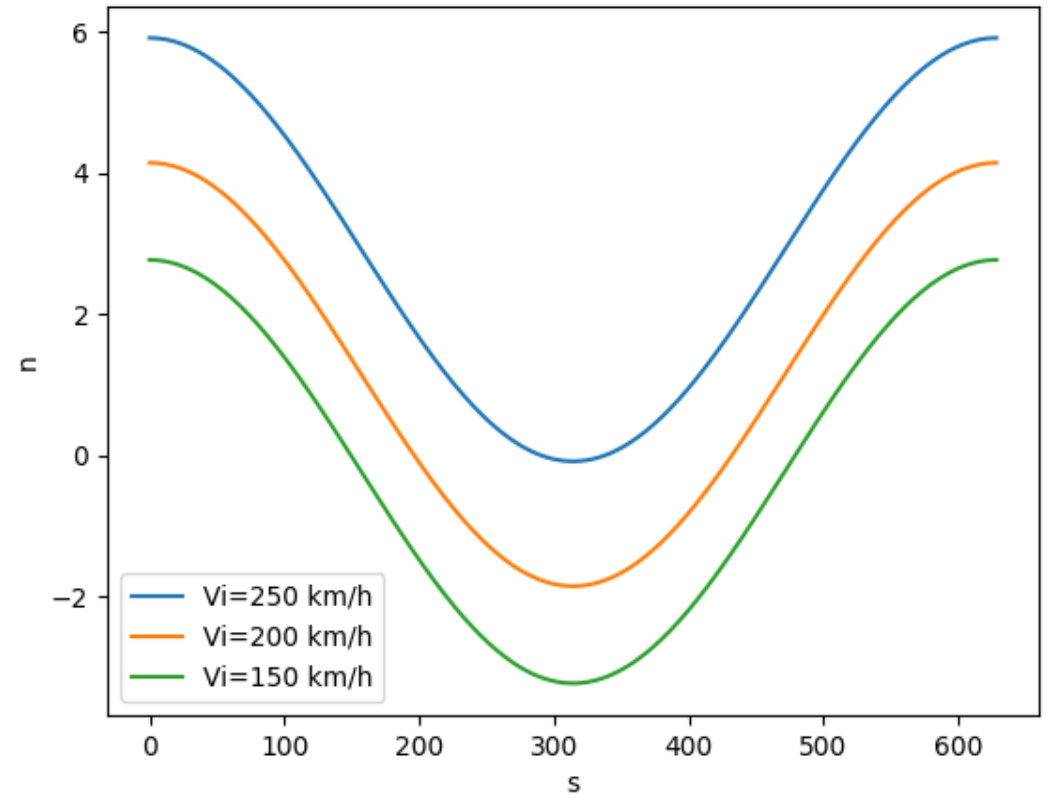


Figure: Variation du facteur de charge pour $r=100\text{m}$

Validation



Fédération Française Aéronautique COMPÉTITIONS REGIONALES 2024

PENALITE ACCELEROMETRE NIVEAUX PROMOTION ET NATIONAL 2

$5,05 \text{ g} < n \leq 5,25 \text{ g}$	$5,25 \text{ g} < n \leq 5,55 \text{ g}$	$5,55 \text{ g} < n \leq 5,75 \text{ g}$
$-3,55 \text{ g} > n \geq -3,75 \text{ g}$	$-3,75 \text{ g} > n \geq -4,05 \text{ g}$	$-4,05 \text{ g} > n \geq -4,25 \text{ g}$
$0,5 * K$	$1 * K$	$2 * K$

Où **K** représente le coefficient du programme volé.

6.2.3.1 Tout pilote dépassant les facteurs de charge suivants est éliminé de la compétition :
(+5,25g / -3,75g) pour les compétitions de niveau Découverte et Espoir,
(+5,75g / -4,25g) pour les compétitions de niveau Promotion et National 2,

Figure: Pénalité pour un facteur de charge n d'une boucle parfait

Validation

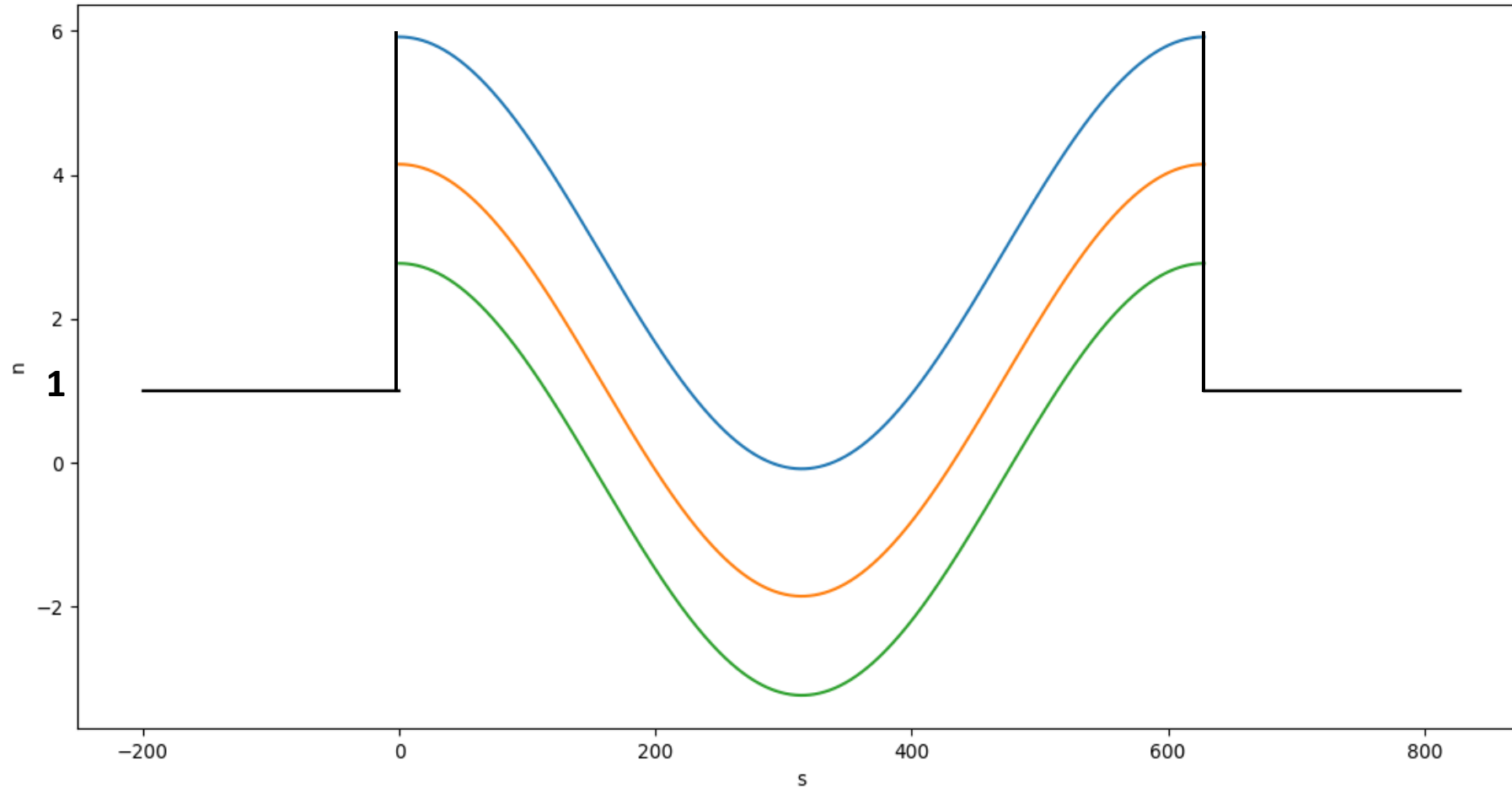


Figure: Problème de discontinuité du facteur de charge au début et à la fin de la boucle

Modèle réel : Boucle à rayon variant

- Une accélération centripète constante
- Un rayon de courbure variant
- Un facteur de charge manipulable

Modèle réel : Boucle à rayon variant

On a: $a_c = \frac{v^2}{r} = c g = cte \quad / c \in \mathbb{R}^+$

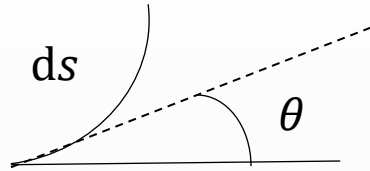
Et: $v^2 = v_0^2 - 2gy$

Donc: $r = \frac{1}{c} \left(\frac{v_0^2}{g} - 2y \right)$

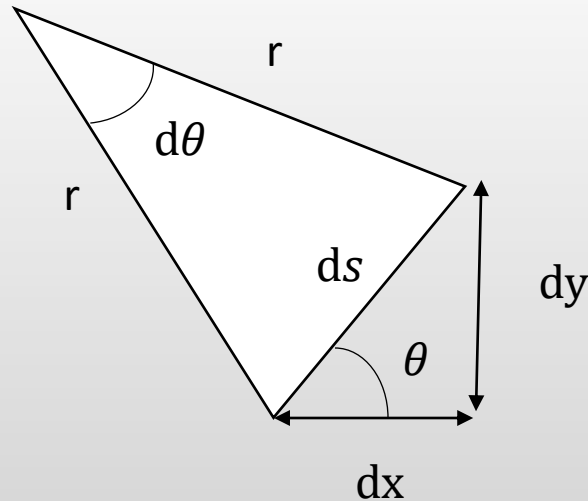
Pour pouvoir tracer la trajectoire nous établirons un système d'équation à l'aide d'un découpage:

Modèle réel : Boucle à rayon variant

Prenons un arc d'abscisse ds faisant un angle θ avec le sol :



ds assez petit ($\lim_{ds \rightarrow 0} ds$) qu' on puisse le considérer comme un segment délimité par un même rayon r et d' abscisse angulaire $d\theta$:



Modèle réel : Boucle à rayon variant

$$ds = r d\theta \Rightarrow \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{r} = \frac{c}{\frac{v_0^2}{g} - 2y}$$

Le système de trajectoire est à 3 équations et à 4 variables :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(\theta) = \frac{dx}{ds} \\ \sin(\theta) = \frac{dy}{ds} \\ \frac{d\theta}{ds} = \frac{c}{\frac{v_0^2}{g} - 2y} \end{array} \right.$$

Simulation : Méthode d'Euler

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{c}{\frac{v_0^2}{g} - 2y_n} (s_{n+1} - s_n)$$

$$x_{n+1} = x_n + \cos(\theta_n) (s_{n+1} - s_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + \sin(\theta_n) (s_{n+1} - s_n)$$

Simulation : Méthode d'Euler

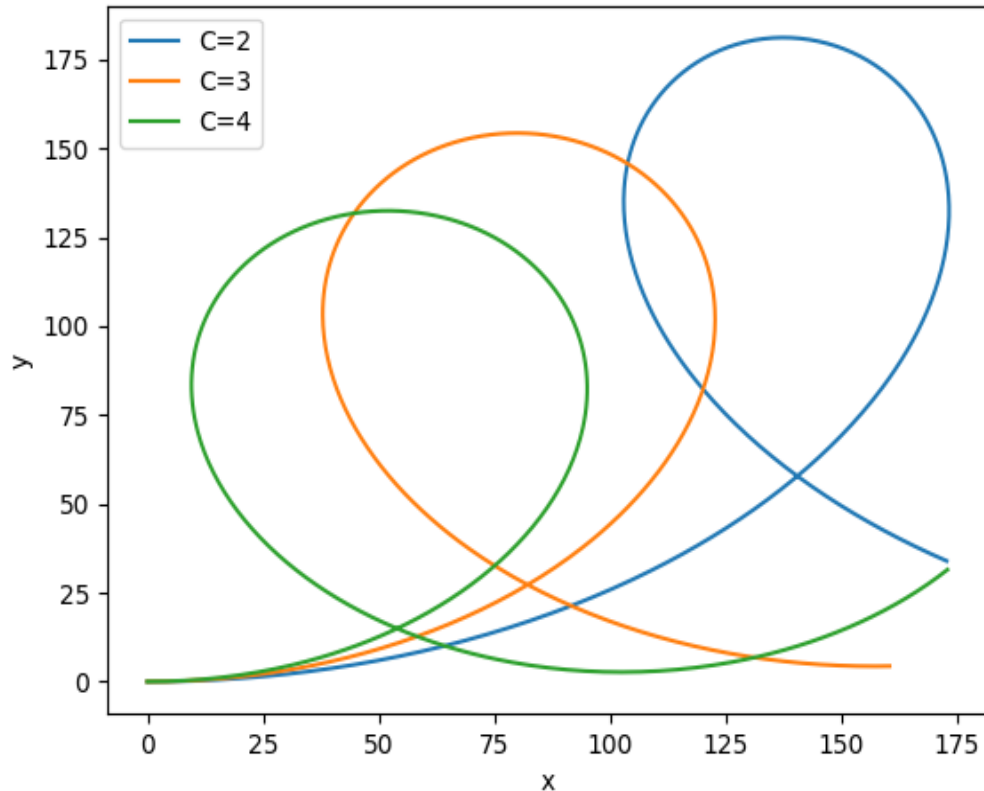


Figure: Différentes trajectoires pour différentes valeurs de l'accélération centripète

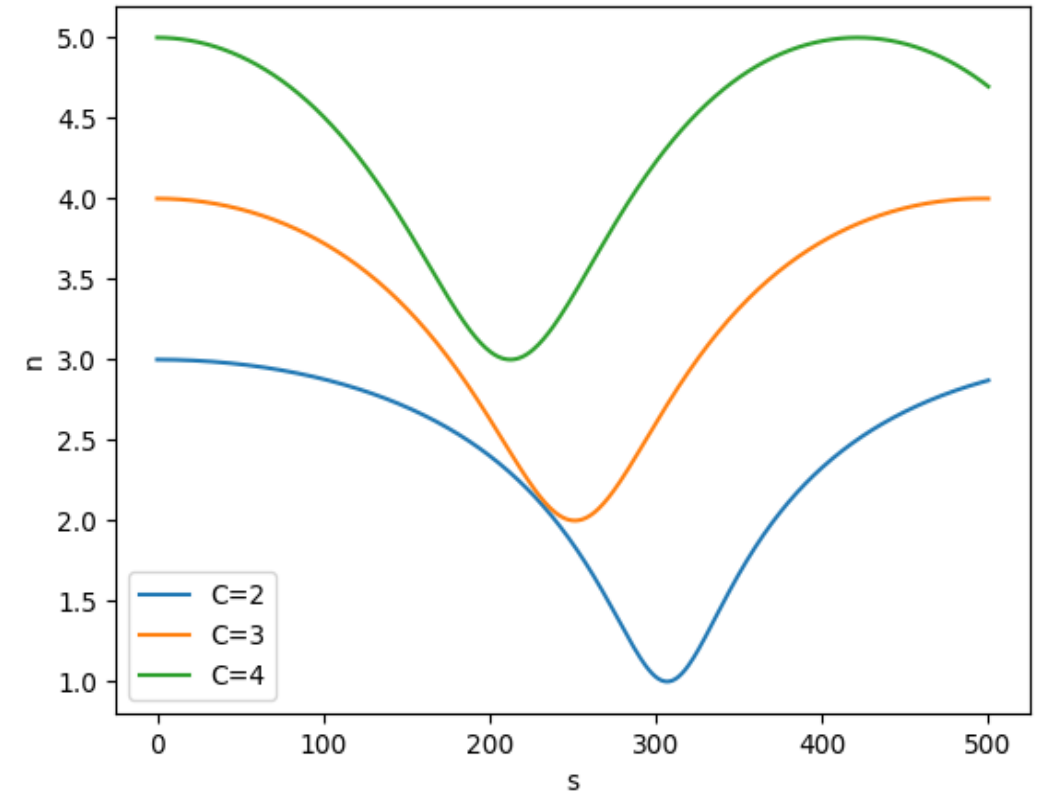


Figure: variation du facteur de charge pour différentes valeurs de l'accélération centripète

N' existe – t – il pas une
boucle esthétique à facteur
de charge constant?

Boucle à facteur de charge constant

On a :
$$n = \frac{v^2}{rg} + \cos(\theta) \Rightarrow r = \frac{v^2}{g(n - \cos(\theta))}$$

Et on a :
$$v^2 = v_0^2 - 2gy$$

Donc :
$$r = \frac{v_0^2 - 2gy}{g(n - \cos(\theta))}$$

Boucle à facteur de charge constant

Le nouveau système de trajectoire à 3 équations et à 4 variables :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(\theta) = \frac{dx}{ds} \\ \sin(\theta) = \frac{dy}{ds} \\ \frac{d\theta}{ds} = \frac{g(n - \cos(\theta))}{v_0^2 - 2gy} \end{array} \right.$$

Simulation : Méthode d'Euler

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_{n+1} = \theta_n + \frac{g(n - \cos(\theta_n))}{v_0^2 - 2gy_n} (s_{n+1} - s_n) \\ \\ x_{n+1} = x_n + \cos(\theta_n) (s_{n+1} - s_n) \\ \\ y_{n+1} = y_n + \sin(\theta_n) (s_{n+1} - s_n) \end{array} \right.$$

Simulation : Méthode d'Euler

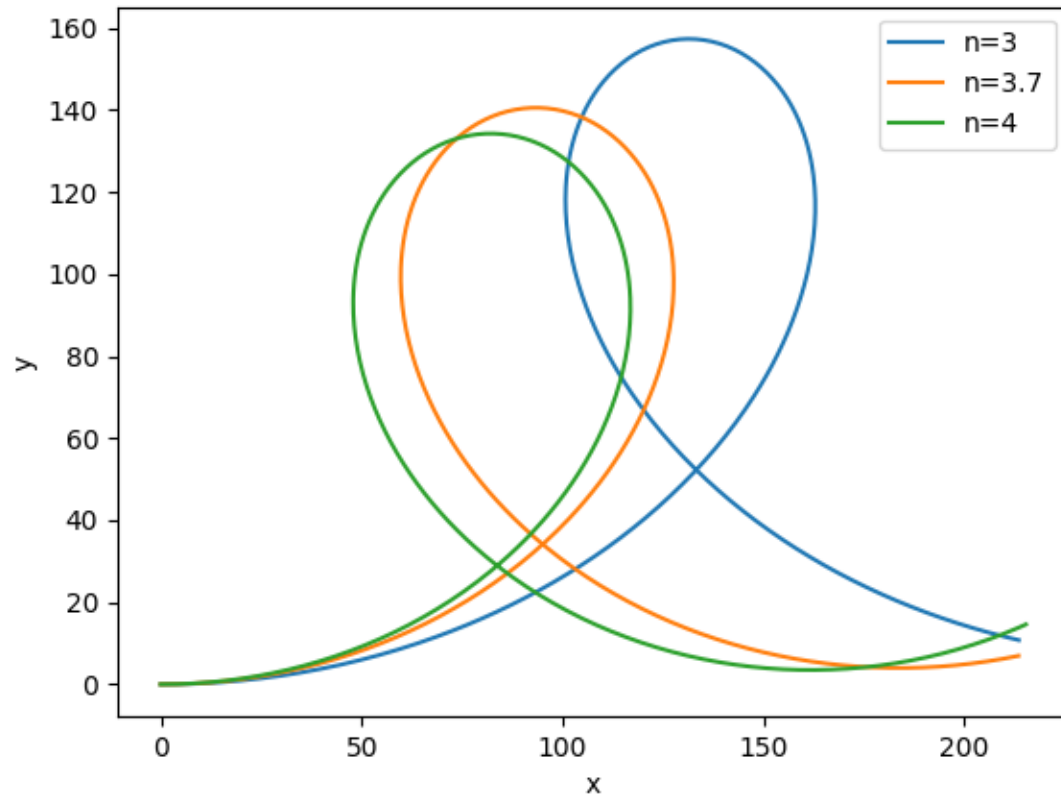


Figure: Différentes trajectoires pour différentes valeurs du facteur de charge

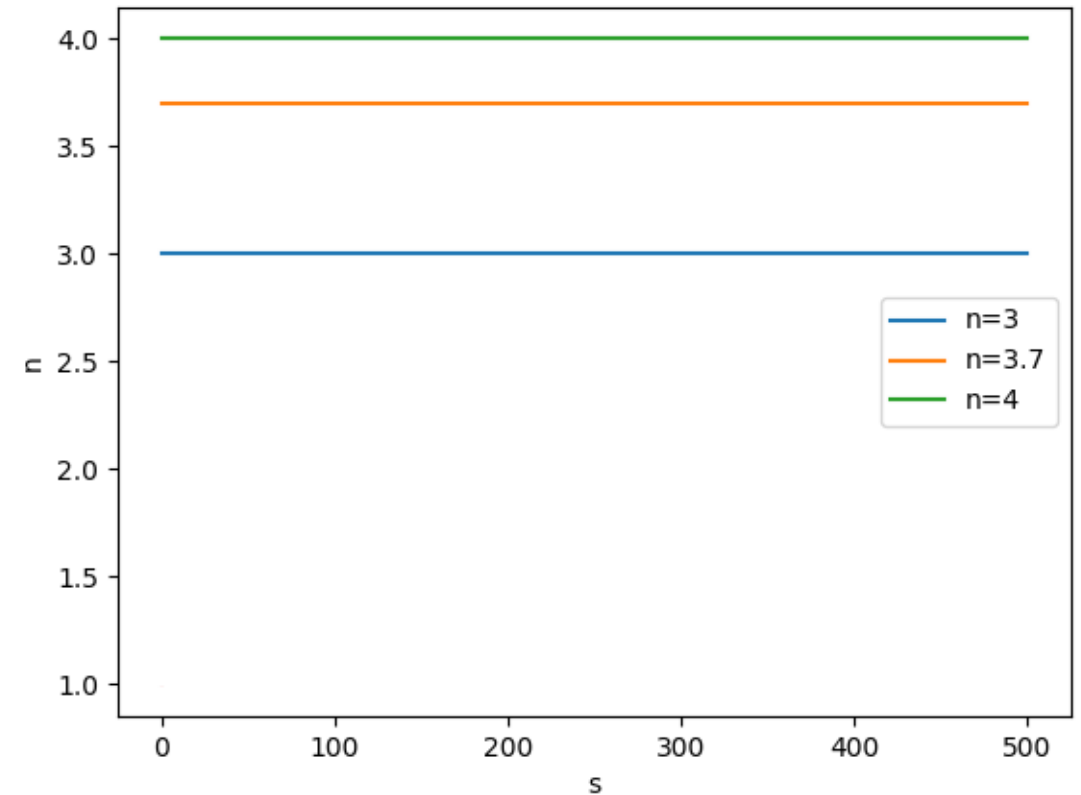


Figure: variation du facteur de charge

Comparaison

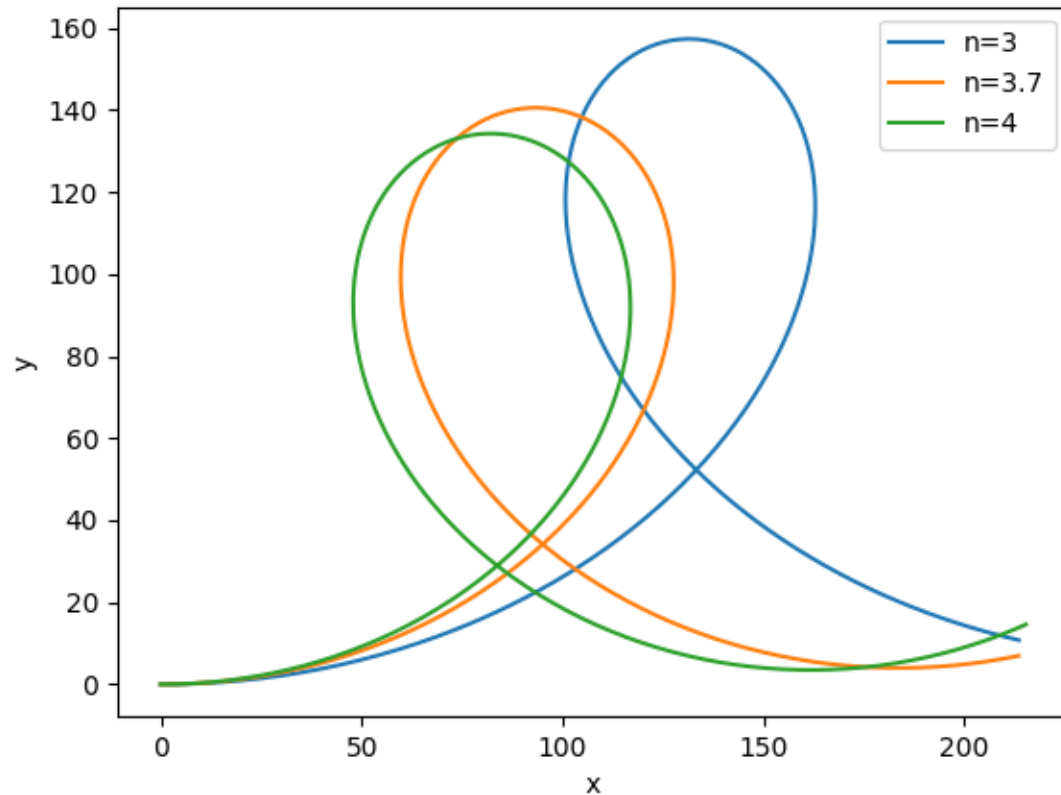


Figure: Boucle à facteur de charge constant

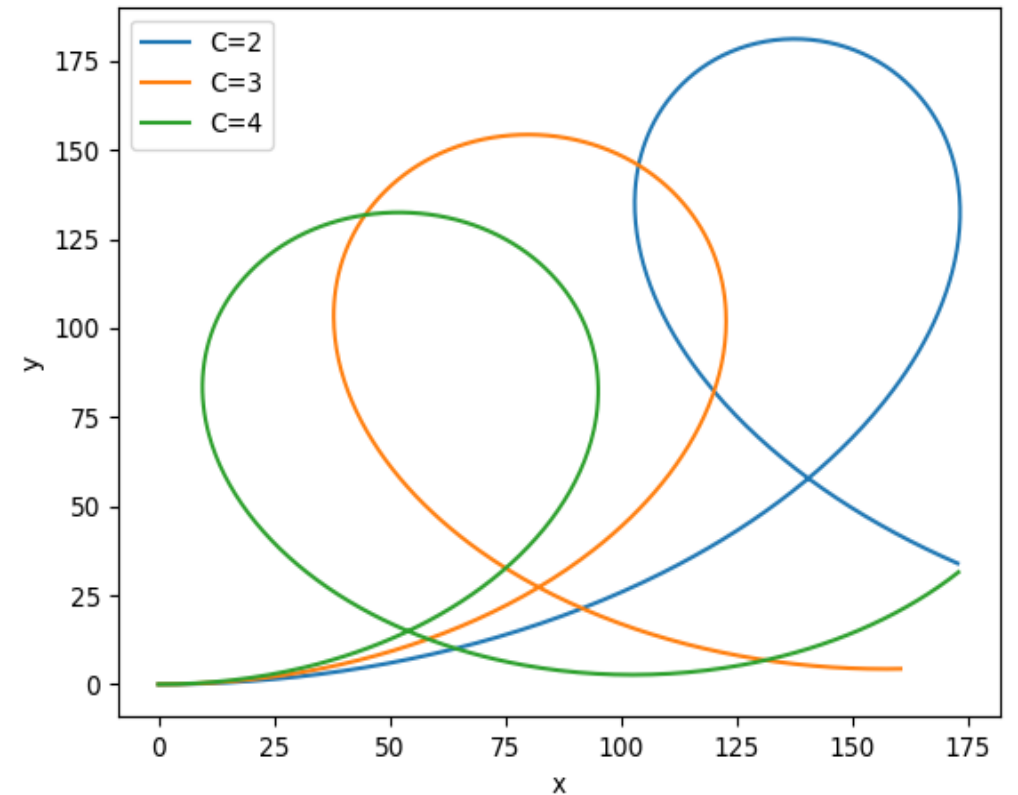


Figure: Boucle à accélération centripète constant

Comment peut on éviter le problème de discontinuité du facteur de charge au début et à la fin de la boucle?

Solution

⇒ Utilisation de la spirale d'Euler nommée aussi Clothoïde



Figure: TGV à 300 km/h

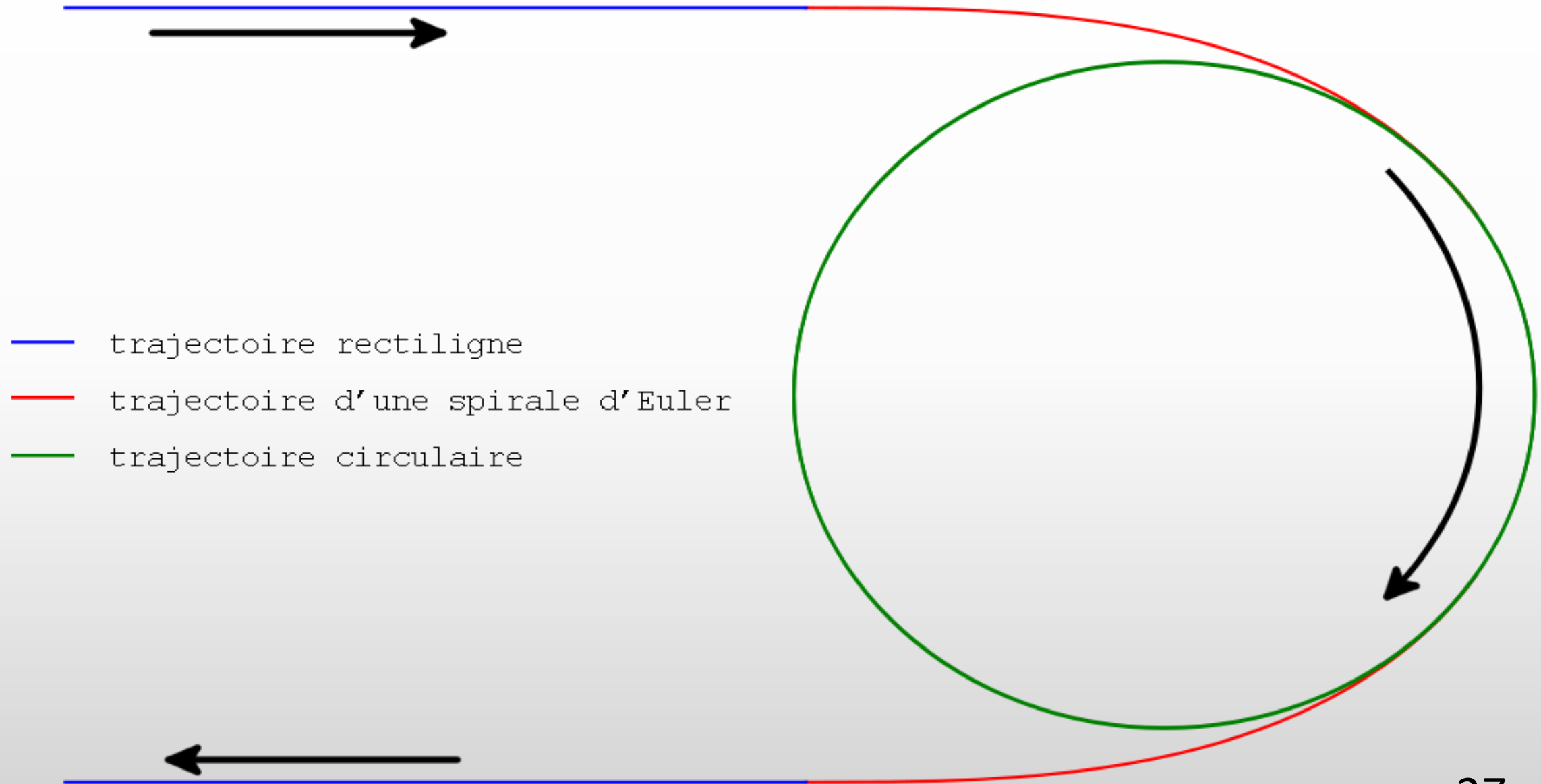


Figure: Virage d' autoroute



Figure: Montagnes russes

Solution



Solution

La courbure de la courbe $\kappa = \frac{1}{r}$ varie linéairement avec la longueur de l'arc s : $\kappa = \frac{1}{r} = \alpha s$

Équation paramétrique et caractéristiques :

$$x = a \int_0^t \cos(u^2) du$$

$$y = a \int_0^t \sin(u^2) du$$

$$s = at$$

$$r = \frac{a}{2t} = \frac{a^2}{2s}$$

$$s^2 = a^2 \theta$$

Solution

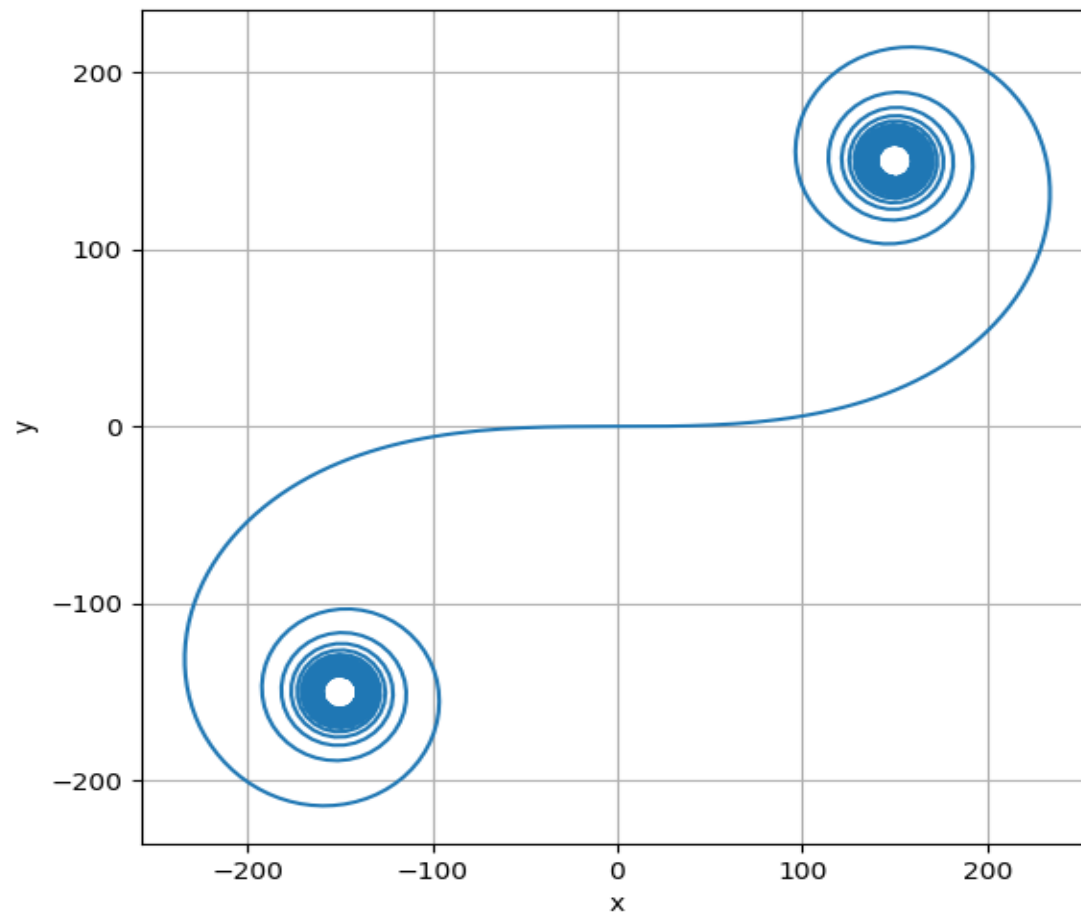


Figure: Spirale d'Euler

Solution

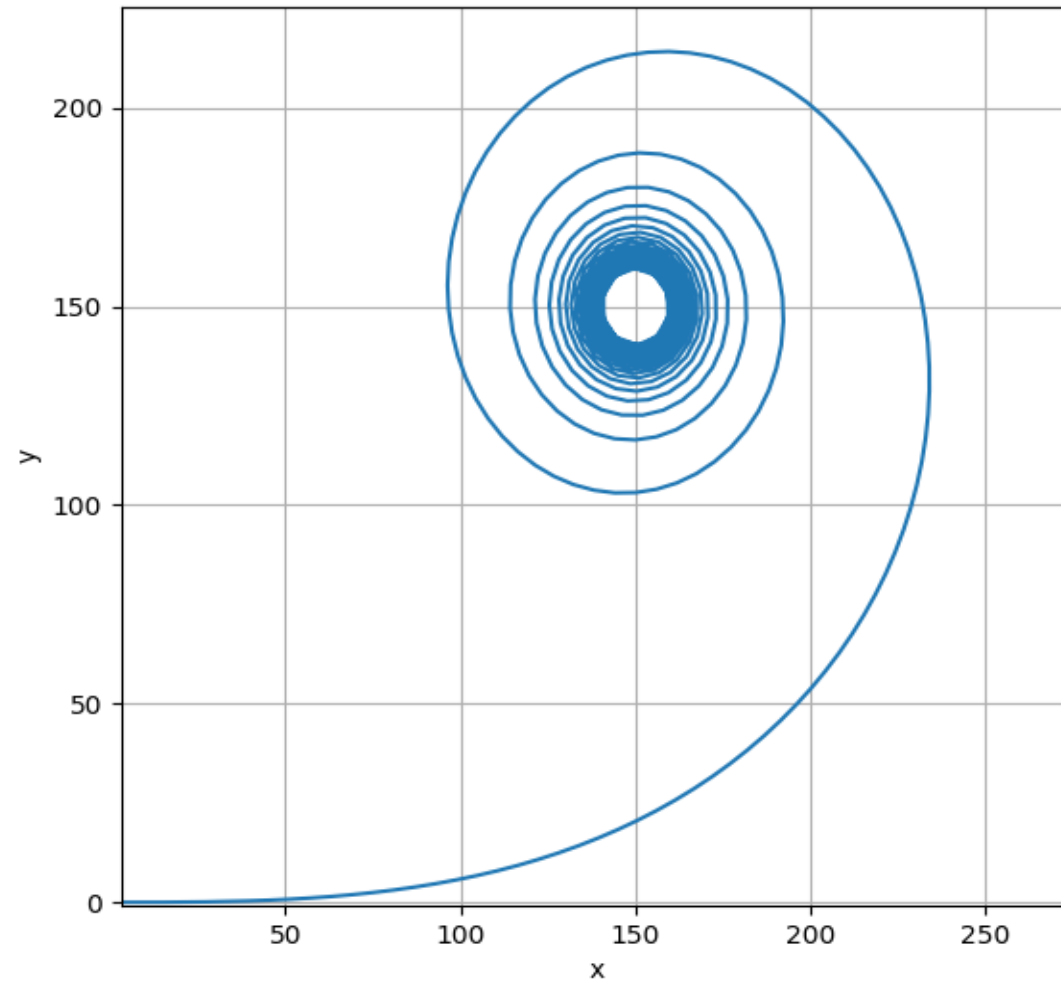


Figure: La restriction supérieure de la spirale d'Euler

Solution

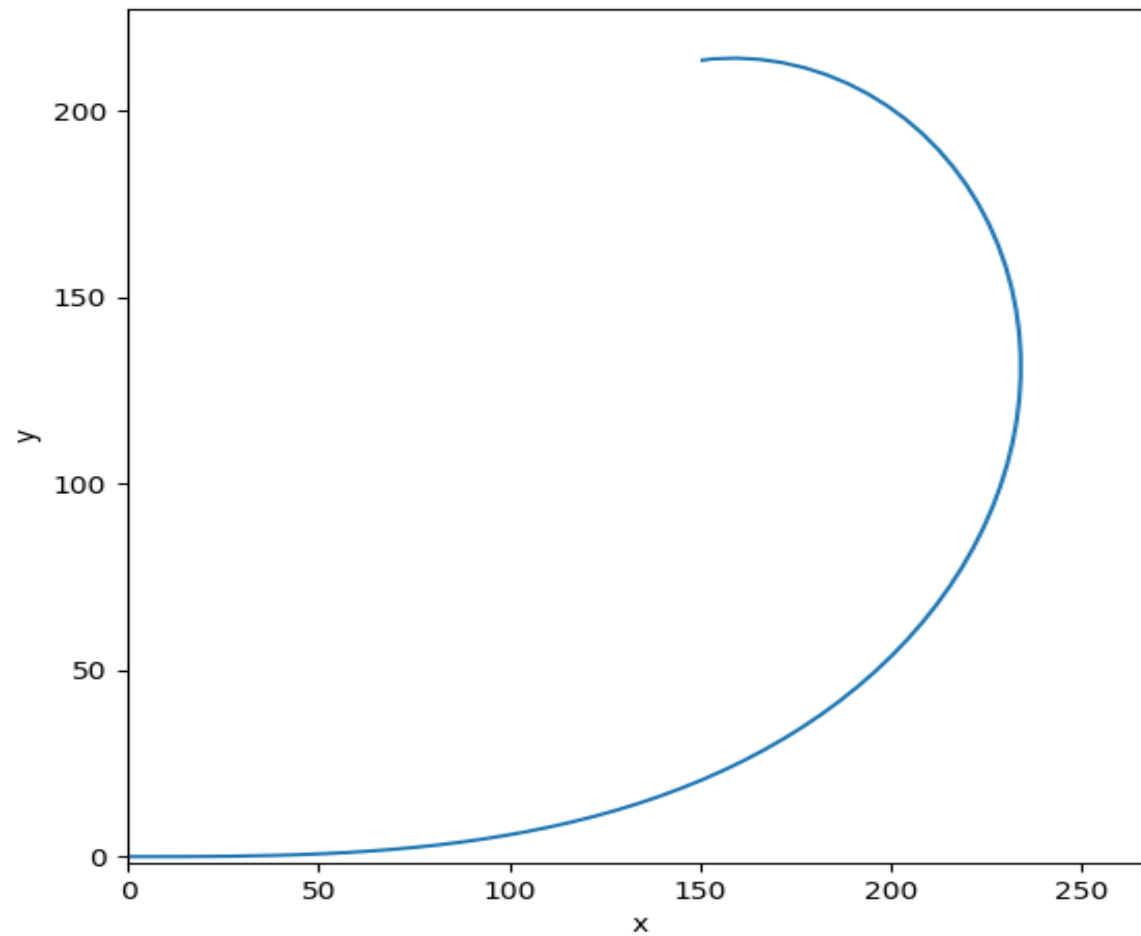


Figure: La demi-boucle de Clothoïde

Solution

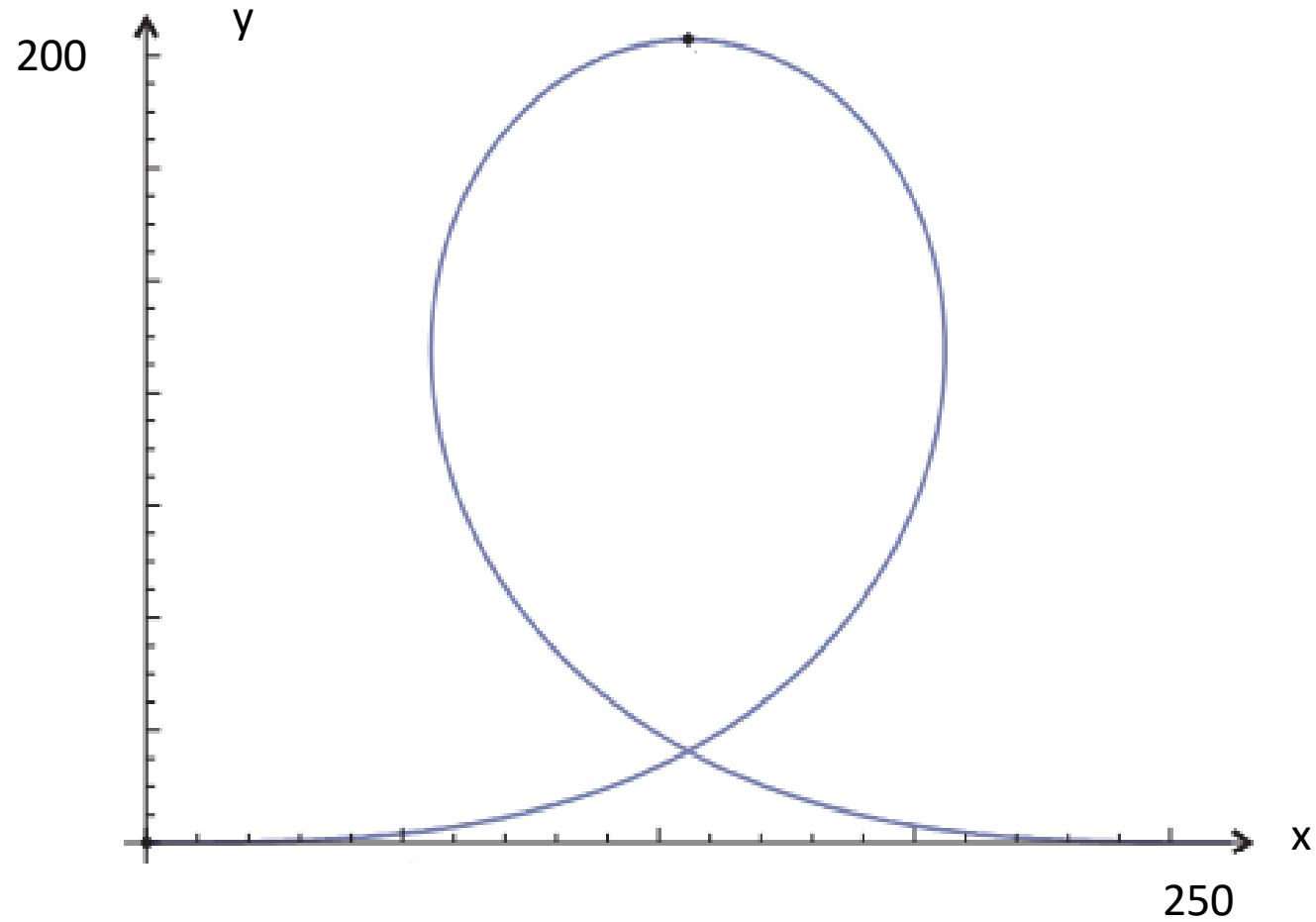


Figure: La boucle complet de Clothoïde par symétrie

Solution

Expression de n :

$$n = \frac{v^2}{rg} + \cos(\theta)$$

$$n = \frac{v_0^2 - 2gy}{rg} + \cos(\theta)$$

$$n = \frac{2s}{a^2} \frac{(v_0^2 - 2gy)}{g} + \cos\left(\frac{s^2}{a^2}\right)$$

Avec $y = a S\left(t = \frac{s}{a}\right)$ où $S(t) = \int_0^t \sin(u^2) du$, Donc :

$$n = \frac{2s}{a^2} \left(\frac{v_0^2}{g} - 2a S\left(\frac{s}{a}\right) \right) + \cos\left(\frac{s^2}{a^2}\right)$$

Solution

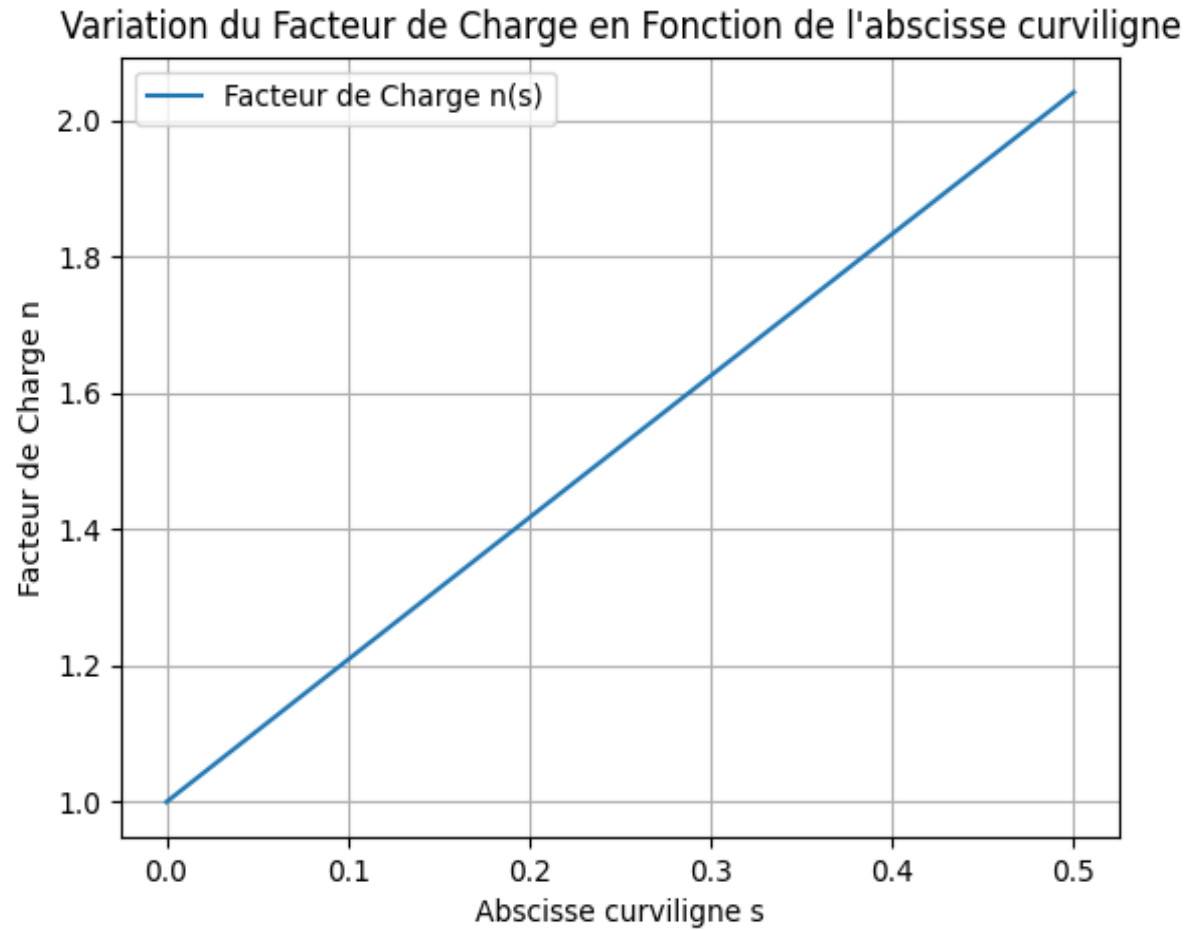


Figure: Variation du facteur de charge au début de la boucle

Solution

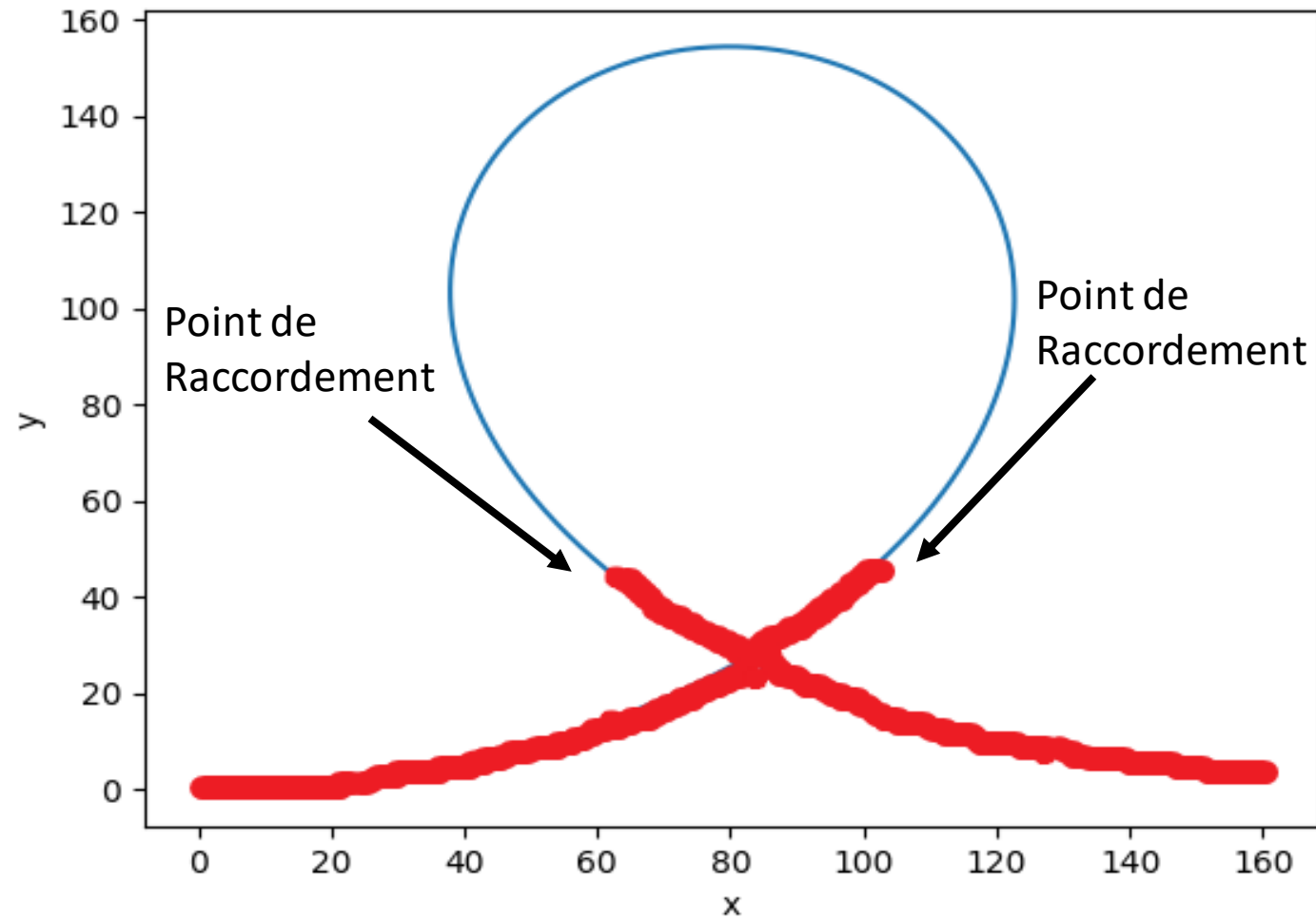


Figure: Raccordement de la boucle de Clothoïde avec boucle à accélération centripète constante 35

Solution

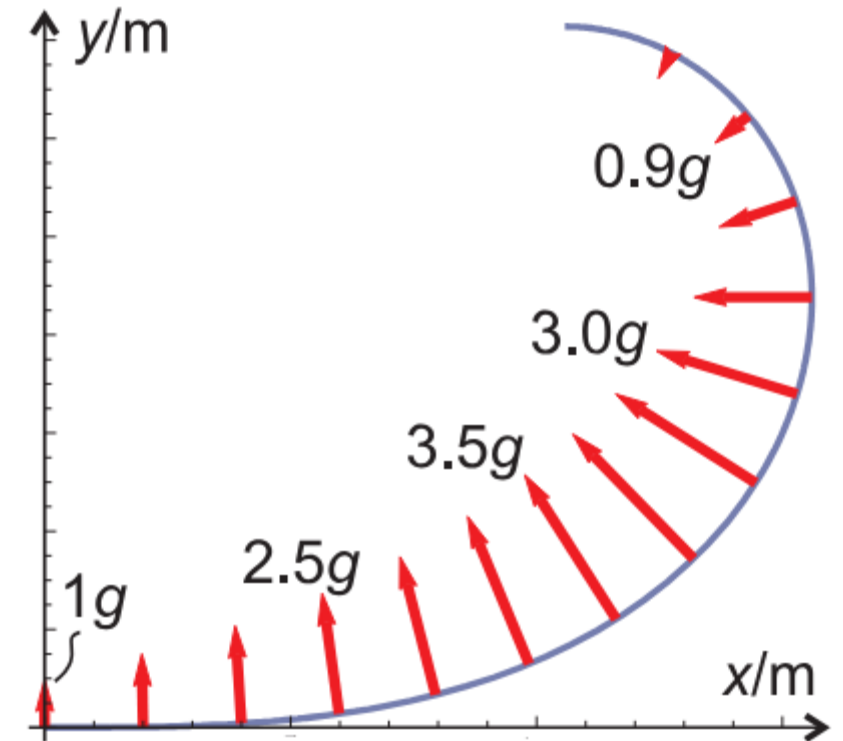
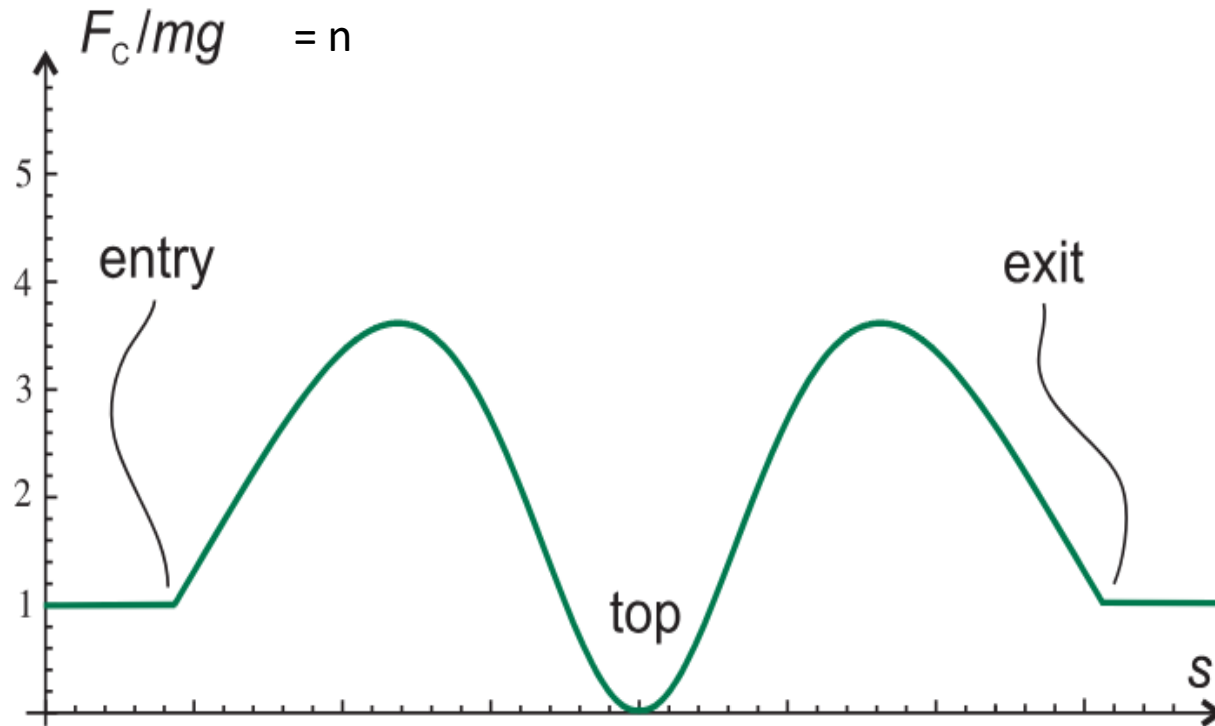


Figure: Variation continue du facteur de charge le long de la nouvelle boucle

Conclusion

- On ne peut pas avoir une boucle parfaitement circulaire
- Une boucle à accélération centripète s'approche du modèle idéal
- Une étude plus complexe si on prend en compte les résistances d'air
- Le pilote peut aussi profiter des illusions d'optique

Merci pour votre attention

Annexes : Boucle parfait

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 #facteur de charge pour la boucle parfait
4 N=1000
5 r=500
6 def facteur_charge(v):
7     v=v/3.6
8     g=9.81
9     smin=0
10    smax=2*np.pi*r
11    s=np.linspace(smin,smax,N)
12    n=np.zeros(N)
13    for i in range(N):
14        n[i]=(v**2)/(r*g)+3*np.cos(s[i]/r)-2
15    plt.xlabel("s")
16    plt.ylabel("n")
17    plt.plot(s,n)
18    facteur_charge(250)
19    facteur_charge(200)
20    facteur_charge(150)
21    plt.legend(['Vi=250 km/h', 'Vi=200 km/h', 'Vi=150 km/h'])
22    plt.show()
23    #La trajectoire de la boucle parfait
24    t=np.linspace(0,10,N)
25    x=r+r*np.cos(t)
26    y=r+r*np.sin(t)
27    z=np.zeros(1000)
28    plt.plot(x,y,'r')
29    plt.plot(x,z,'r')
30    plt.show()
```

Annexes: Boucle à $a_c = \text{cte}$

```
3  pas=1
4  v=64
5  def acc(c):
6      g=9.81
7      N=500
8      t=[0 for i in range(N)]
9      x=[0 for i in range(N)]
10     y=[0 for i in range(N)]
11     for i in range(N-1):
12         t[i+1]=t[i]+c*pas/((v**2)/g-2*y[i])
13         x[i+1]=x[i]+np.cos(t[i])*pas
14         y[i+1]=y[i]+np.sin(t[i])*pas
15     plt.xlabel("x")
16     plt.ylabel("y")
17     plt.plot(x,y)
18 acc(2)
19 acc(3)
20 acc(4)
21 plt.legend(['C=2', 'C=3', 'C=4'])
22 plt.show()
```

Annexes : Boucle à $a_c = cte$

```
24 def facteur_charge(c):
25     g=9.81
26     N=500
27     t=[0 for i in range(N)]
28     y=[0 for i in range(N)]
29     smin=0
30     smax=500
31     s=np.linspace(smin,smax,N)
32     n=np.zeros(N)
33     for i in range(N-1):
34         t[i+1]=t[i]+c*pas/((v**2)/g-2*y[i])
35         y[i+1]=y[i]+np.sin(t[i])*pas
36     for i in range(N):
37         n[i]=c+np.cos(t[i])
38     plt.xlabel("s")
39     plt.ylabel("n")
40     plt.plot(s,n)
41     facteur_charge(2)
42     facteur_charge(3)
43     facteur_charge(4)
44     plt.legend(['C=2', 'C=3', 'C=4'])
45     plt.show()
```

Annexes : Boucle à $n=cte$

```
1  import numpy as np
2  import matplotlib.pyplot as plt
3  pas=1
4  v=64
5  g=9.81
6  N=500
7  def fact(n):
8      t=[0 for i in range(N)]
9      x=[0 for i in range(N)]
10     y=[0 for i in range(N)]
11     for i in range(N-1):
12         t[i+1]=t[i]+g*(n-np.cos(t[i]))/(v**2-2*g*y[i])
13         x[i+1]=x[i]+np.cos(t[i])*pas
14         y[i+1]=y[i]+np.sin(t[i])*pas
15     plt.xlabel("x")
16     plt.ylabel("y")
17     plt.plot(x,y)
18     fact(3)
19     fact(3.7)
20     fact(4)
21     plt.legend(['n=3', 'n=3.7', 'n=4'])
22     plt.show()
```

Annexes : Boucle à $n=cte$

```
23  #facteur de charge
24  def facteur_charge(n):
25      N=500
26      smin=0
27      smax=500
28      s=np.linspace(smin,smax,N)
29      m=np.zeros(N)
30      for i in range(N):
31          m[i]=n
32      plt.xlabel("s")
33      plt.ylabel("n")
34      plt.plot(s,m)
35  facteur_charge(3)
36  facteur_charge(3.7)
37  facteur_charge(4)
38  facteur_charge(1)
39  plt.legend(['n=3', 'n=3.7', 'n=4'])
40  plt.show()
```

Annexes : Clothoïd

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from scipy.special import fresnel
4 #clothoïde
5 pas=10
6 v=64
7 g=9.81
8 N=100
9 s=np.linspace(0,100,N)
10 t = np.linspace(-10, 10, 1000)
11 y, x = 300*fresnel(t)[0], 300*fresnel(t)[1]
12 plt.plot(x,y)
13 plt.xlabel('x')
14 plt.ylabel('y')
15 plt.show()
16
17 #facteur de charge
18 a = 20
19 def S(x):
20     return fresnel(x)[1]
21 s_max = 0.5
22 N = 100
23 s = np.linspace(0, s_max, N)
24 n = ( 2 * s / a**2) * (v**2 / g - 2 * a * S(s / a)) + np.cos( (s**2) / (a**2))
25
26 plt.plot(s, n, label='Facteur de Charge n(s)')
27 plt.xlabel('Abscisse curviligne s')
28 plt.ylabel('Facteur de Charge n')
29 plt.title('Variation du Facteur de Charge en Fonction de l\'abscisse curviligne')
30 plt.legend()
31 plt.grid(True)
32 plt.show()
```