26655 BAUDOIN Solal

Optimisation de la couverture vidéo-surveillance

L'élégante preuve du chapitre "How to guard a museum" du livre 'Proofs from THE BOOK' de Martin Aigner et Günter M. Ziegler m'a poussé à m'intéresser au problème de la galerie d'art.

Ce TIPE s'inscrit dans le cadre de l'optimisation du coût de la vidéo-surveillance des espaces publiques, en particulier ceux des villes. On cherche, pour une zone donnée, une configuration d' emplacement de caméras couvrant la zone avec un nombre de caméras minimal.

Positionnement thématique (ÉTAPE 1) :

- *INFORMATIQUE (Informatique Théorique)*
- *INFORMATIQUE (Informatique pratique)*

Mots-clés (ÉTAPE 2)

Mots-clés (en français)	**Mots-clés (en anglais)**
Problème de la galerie d'art	*Art gallery problem*
Géométrie algorithmique	*Computational geometry*
Polygones	*Polygons*
Décompositions	*Decompositions*
Programmation dynamique	*Dynamic programming*

Bibliographie commentée

Le livre 'Proofs from THE BOOK' (en français « Raisonnements divins ») **[1]** de Martin Aigner et Günter M. Ziegler a pour objectif de présenter des démonstrations mathématiques qui pourraient prétendre venir “du livre où Dieu garde les preuves parfaites des théorèmes de mathématiques”. Le chapitre “How to guard a museum” expose la preuve courte et élégante de Steve Fisk du théorème de la galerie d'art, initialement découvert par Chvatal **[2]**. Ce théorème stipule qu'il suffit de PartieEntière(n/3) gardes pour surveiller une galerie d'art possédant la forme d'un polygone à n côtés. La preuve de Fisk utilise une triangulation comme argument constructif d'une solution, c'est-à-dire une décomposition en triangles disjoints (dont les sommets sont des sommets du polygone) du polygone de la carte. Ces triangles sont trivialement sécurisables par un seul garde (pourvu qu'il puisse voir à 360°), Fisk montre que l'on peut toujours utiliser un garde pour 3 triangles d'où le résultat. Évidemment cette solution est souvent non optimale, car (par exemple) pour un polygone convexe à n côtés, un seul garde suffit. De plus le problème de la galerie d'art est NP-difficile **[3, Chapitre 9],** ainsi, utiliser un algorithme donnant des solutions optimales est vain à l'échelle d'une ville. On peut alors se pencher sur les algorithmes de décomposition de polygones en sous polygones (autres qu'une triangulation) et à l'optimalité de leurs solutions.

D’abord il faut s’intéresser plus en détail à la preuve de Fisk : pourquoi une telle triangulation existe ? D’après un théorème du à G.H. Meisters **[4]**, tous les polygones à plus de 3 côtés ont des oreilles : c’est-à-dire un triangle dont la suppression donne un polygone avec un coté en moins. Cette existence d’oreille donne donc un algorithme naïf ($O(n^3)$) de triangulation pour les polygones : il suffit de couper itérativement les oreilles d’un polygones, jusqu’à ce qu’il reste un seul triangle, les oreilles coupées constituent une triangulation possible du polygone. L’élément moteur de la preuve de Fisk - que les triangles soient sécurisables - peut être décliné : on peut en effet se limiter à une décomposition en polygones convexes (donc à nombre de côtés quelconque) qui sont sécurisables par un seul garde (par définition de la convexité). Ce qui offre potentiellement une décomposition avec moins de composantes. On peut aller jusqu’à s’ autoriser une décomposition en polygones étoilés : c’est à dire en polygones disposant d’une zone depuis laquelle tous les autres point de leur surface sont visibles (dans laquelle on place alors un garde).

J. Mark Keil s'intéresse à de telles décompositions, il propose deux algorithmes de décomposition : en polygones convexes et étoilés, tous deux de classe polynomiale qui offrent une décomposition minimisant le nombre de composantes **[5]**. Ces deux algorithmes adoptent une approche par programmation dynamique.

Pour étudier le problème dans le cas plus concret d’une ville on peut par exemple utiliser les plans de voirie des chaussées de Paris (en tant que zones à surveiller) **[6]** qui sont fournis par l’ organisme ParisData sous forme d’un ensemble de polygones définis par des listes de couples (latitude, longitude).

Problématique retenue

Il s'agit d’étudier les algorithmes de décomposition de polygones en sous-polygones dans la perspective de les implémenter pour les appliquer à un cas réel, la couverture vidéo-surveillance de Paris.

Objectifs du TIPE du candidat

Je me propose

1. De comprendre la preuve d’existence de triangulations de polygones **[4]**
2. D’implémenter un algorithme naïf utilisant cette preuve et celle de Steve Fisk **[2]**
3. De comprendre l’article de J. Mark Keil présentant les algorithmes de décomposition en polygones convexes et étoilés **[5]**
4. D'implementer et de tester ces algorithmes sur les plans de voirie des chaussées de Paris fournis par la mairie de paris. **[6]**

Références bibliographiques (ÉTAPE 1)

[1] MARTIN AIGNER, GÜNTER M. ZIEGLER : Proofs from THE BOOK *: "How to guard a museum", Springer Berlin, Heidelberg(2018),ISBN:978-3-662-57264-1*

[2] STEVE FISK : A short proof of Chvátal's watchman theorem *: Journal of Combinatorial Theory Series B, 18 (1975), 39-41*

[3] JOSEPH O'ROURKE : Art Gallery Theorems and Algorithms *: Chapitre 9, Oxford University Press, 1987, ISBN: 0-19-503965-3*

[4] GARY H MEISTERS : Polygons have ears *: The American Mathematical Monthly Vol. 82 No. 6, (1976), 648-651*

[5] J. MARK KEIL : Decomposing a polygon into simpler components *: SIAM Journal on Computing Volume 14, (1985),799–817*

[6] PARIS DATA : Plan de voirie - chaussées *: https://opendata.paris. fr/explore/dataset/plan-de-voirie-chaussees (visité le 10/11/2022)*

DOT

[1] *: [Octobre] choix du sujet, après avoir lu la preuve de Steve Fisk dans "Proofs from THE BOOK" et avoir trouvé le jeu de données*

[2] *: [Novembre] choix de l'approche heuristique après lecture du chapitre 9 du livre de Rourke qui explique la NP-complétude du problème.*

[3] *: [Novembre] découverte de l'article de J. Mark Keil qui donne les décompositions convexes minimales en sous polygones convexes et étoilés*

[4] *: [Décembre] écriture de code de base permettant de travailler avec des polygones: représentations de points, segments, polygones, affichage de polygones, points et segments pour déboguer, calcul d'intersections, comparaison d'angles etc.*

[5] *: [Janvier - Avril] lecture en profondeur de l'article et implémentation de la décomposition minimale convexe*

[6] *: [Février] choix de se concentrer principalement sur les deux algorithmes à implémenter*

[7] *: [Avril - mi-Mai] lecture en profondeur de l'article et implémentation de la décomposition minimale étoilée*