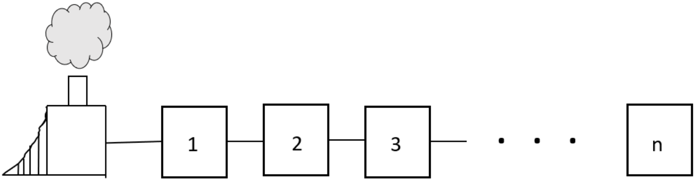
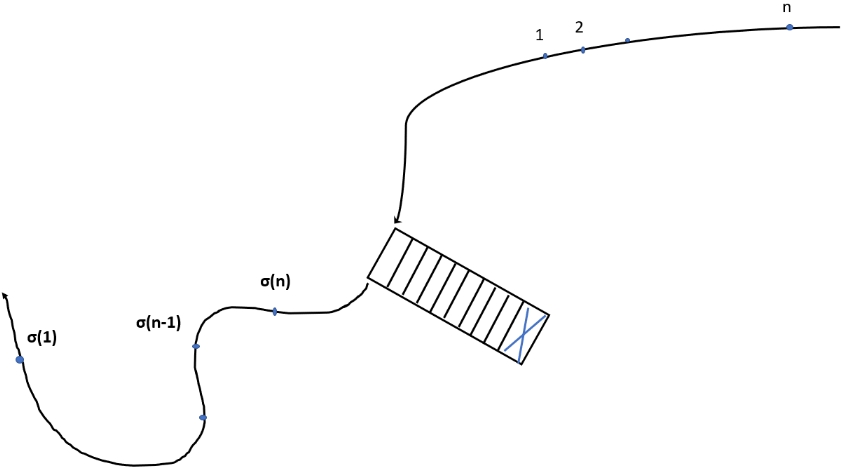
TIPE : Propriétés des permutations réalisables et triables par une pile.

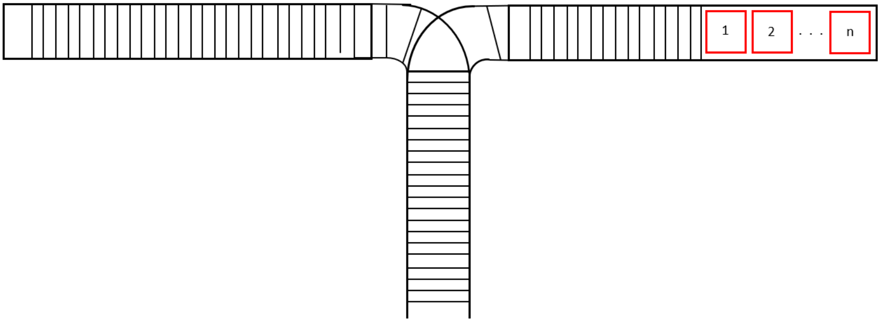
Gabriel CHAN

2018-2019

Comment peut-on réordonner ces wagons avec une structure de pile ?

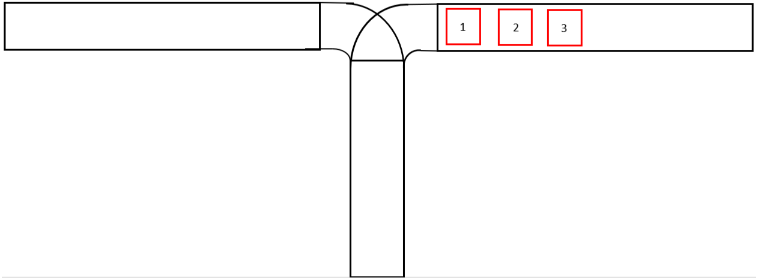


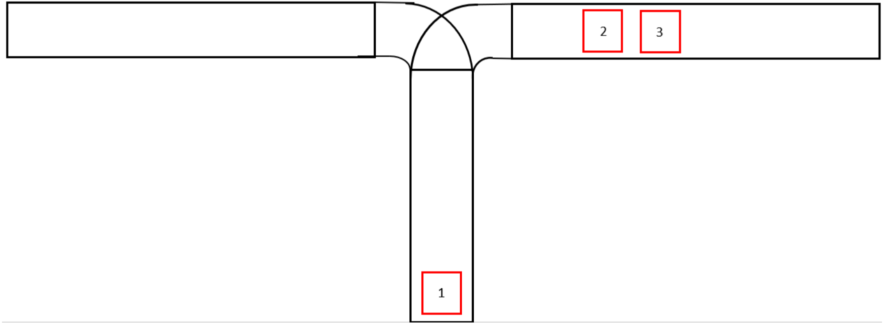

n
1
2
σ(n)
σ(n-1)
σ(1)

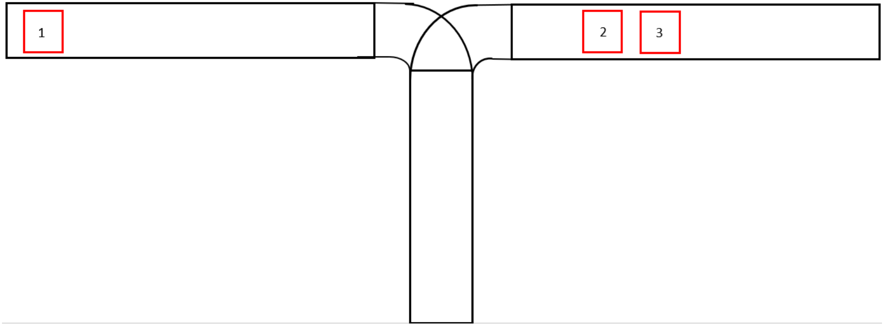

1
2
. . .
n

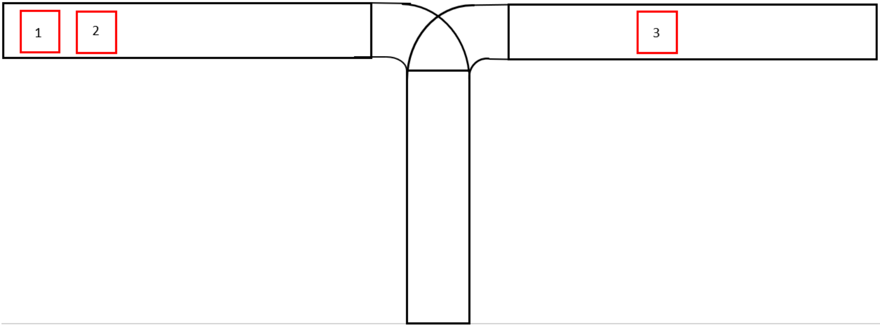
Exemple 1.1.2 1

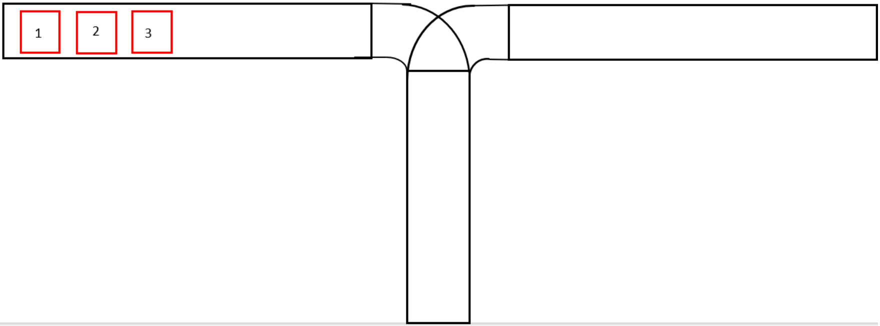
-123 est possible




2
3
1

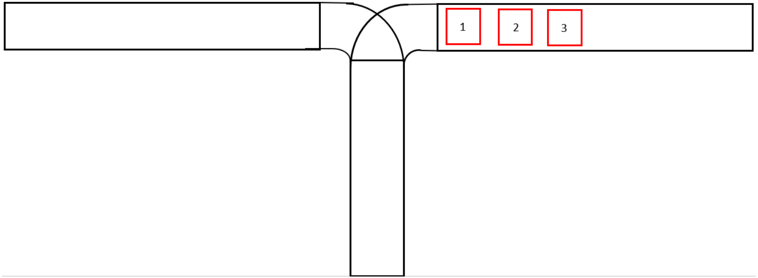

1
2
3

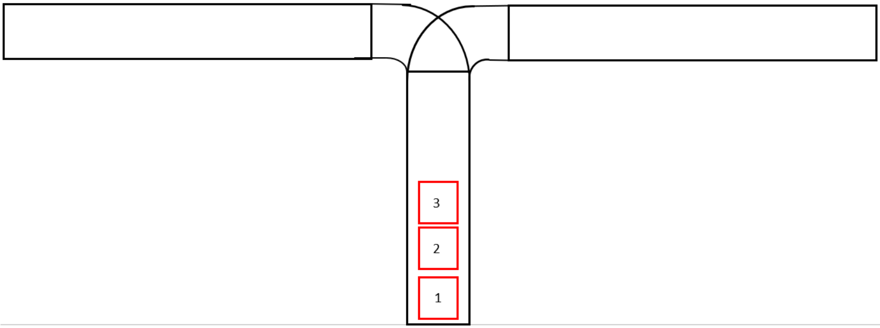

1
2
3

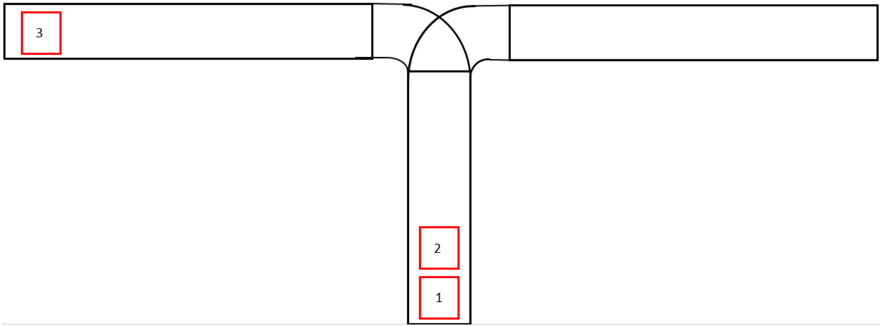

1
2
3

Exemple 1.1.2 2

-Maintenant on souhaite avoir d'abord le wagon 3 comme premier wagon en sortie de la pile :




3
2
1



-Problème : on ne peut pas avoir le wagon 1 immédiatement après le wagon 3.

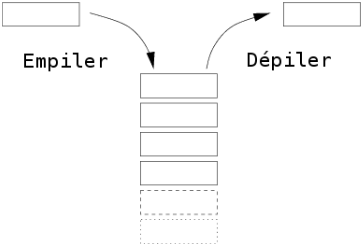
Notation 1.2 1

Si $\pi \in S_n$, on la notera :

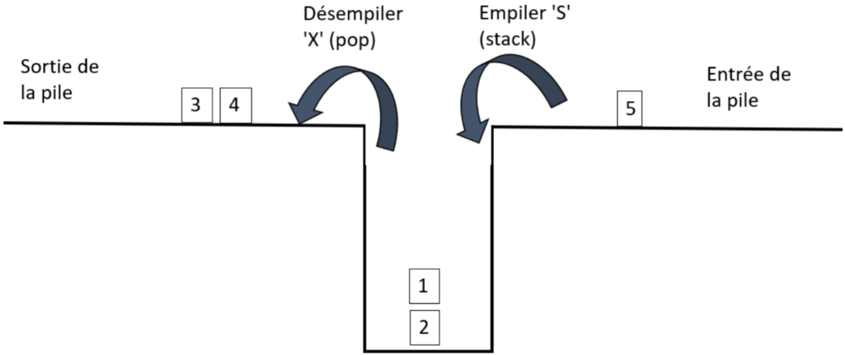
$$\pi = \pi(1)\pi(2)...\pi(n)$$

Définition 1.2 1

Une pile est une structure de données par laquelle on peut passer des éléments de l'entrée de la pile à sa sortie.



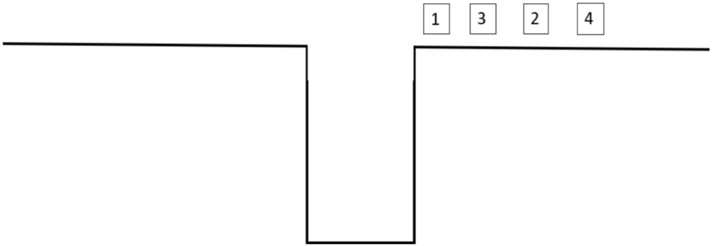
-Opérations 'S' : mettre l'élément suivant au sommet de la pile.
-Opération 'X' : transférer l'élément au sommet de la pile au bout de la sortie.

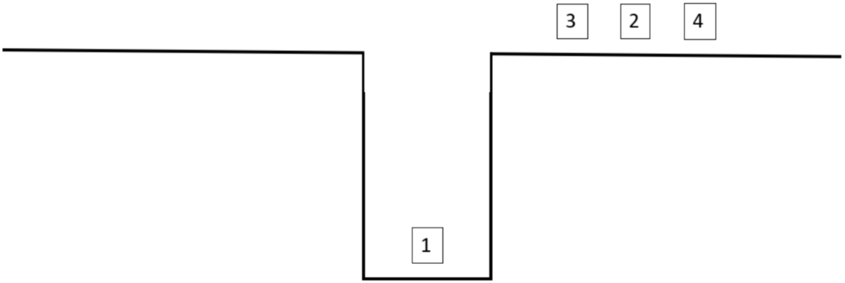


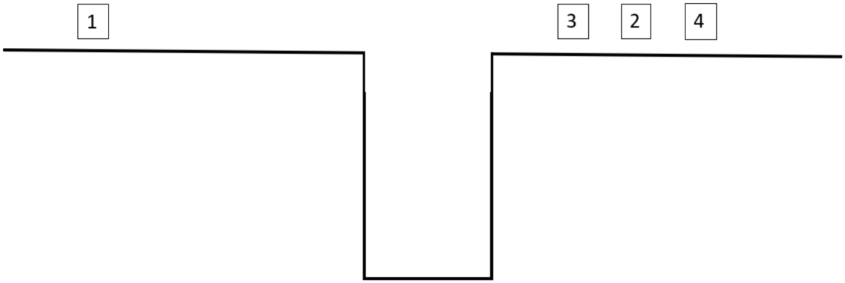
Définition 1.2 2

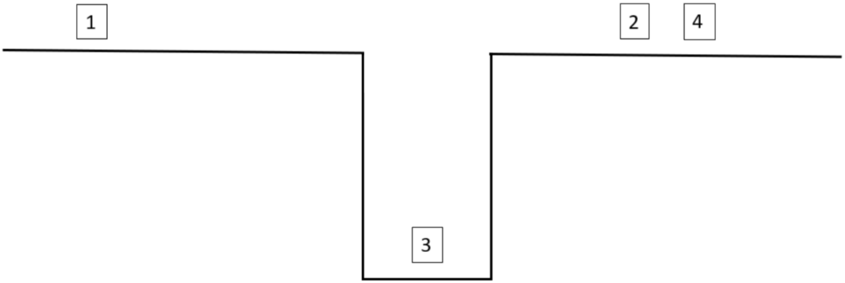
Soit $\pi \in S_n$, une séquence L d'opérations X et S est valide si tous les éléments de π sont transférés à la sortie et si 'X' n'est jamais spécifié quand la pile est vide.

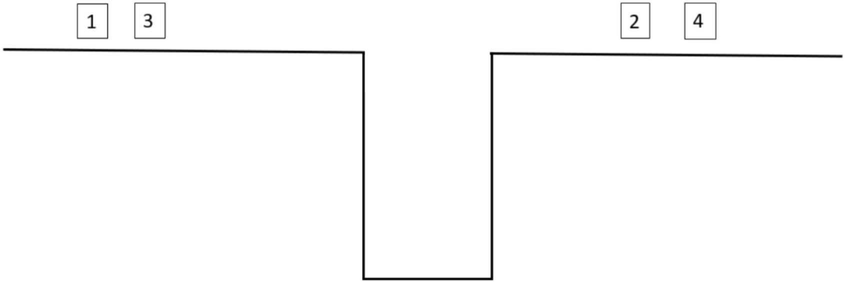
Exemple : $\pi = 1324$
L = (S,X,S,X,S,S,X,X)

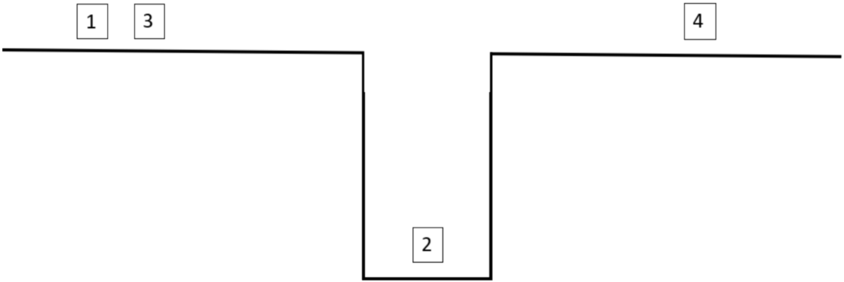


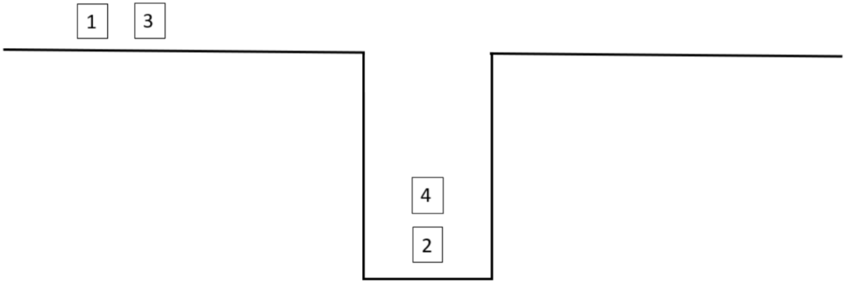

3
2
4
1

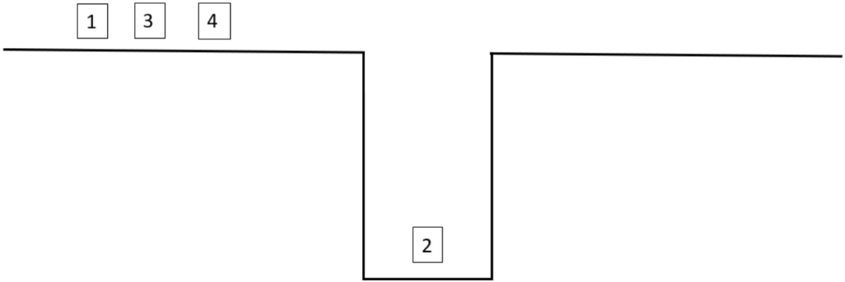

1
3
2
4

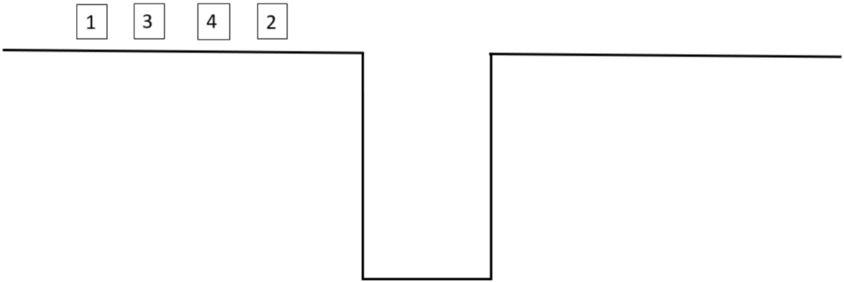

1
2
4
3


1
3
2
4


1
3
4
2


1
3
4
2


1
3
4
2



$$L(\pi) = 1342$$

Définition 1.3 1

Soit $\pi \in S_n$, π est stack-sortable s'il existe une suite d'opérations L telle que $L(\pi) = 12...n$.
On note l'ensemble de ces permutations SS_n.

Définition 1.3 2

Soit $\pi \in S_n$, π est stack-realisable s'il existe une suite d'opérations R telle que $L(12...n) = \pi$.
On note l'ensemble de ces permutations SR_n.

Proposition 1.3

$\pi \in SS_n \Leftrightarrow \pi^{-1} \in SR_n$

Définition 1.4 1

On munit l'entrée selon la lecture de gauche à droite, notée $\ll$.

On munit la sortie de la relation d'ordre selon la lecture de gauche à droite, notée $\lll$.

Exemple :

Si $L = (S, S, X, S, X, X, S, S, S, X, X, X)$ et $\pi = 123456$

Alors on vérifie $L(\pi) = 3421654$

On note :

$1 \ll 2 \ll 3 \ll 4 \ll 5 \ll 6$

$3 \lll 4 \lll 2 \lll 1 \lll 6 \lll 5 \lll 4$

Définition 1.4 2

Soit $\pi \in S_n$, associée aux 2 relations d'ordres $\ll$ et $\lll$, soit $F \subset [\![1, n]\!]$, $|F| = p$.
La restriction de $\ll$ et $\lll$ à F définit une permutation :

$$\sigma : [\![1, p]\!] \to [\![1, p]\!]$$

Dans ce cas, on dit que σ est contenue dans π et on écrira $\sigma \preceq \pi$

Théorème 2.1

Soit $\pi = p_1 p_2 ... p_n \in S_n$,
$\pi \in SR_n$ *si et seulement si* $\sigma = 312 \npreceq \pi$
C'est-à-dire :
$\nexists p_i, p_j, p_k$ *avec* $i < j < k$ *tels que* $p_k < p_i < p_j$

Lemme 2.1 1

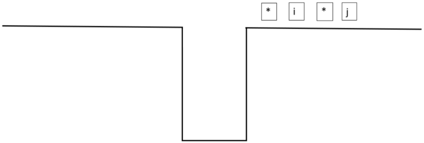
Si b, un objet, reste dans la pile c'est qu'il existe $a < b$ tel que $p_b < p_a$

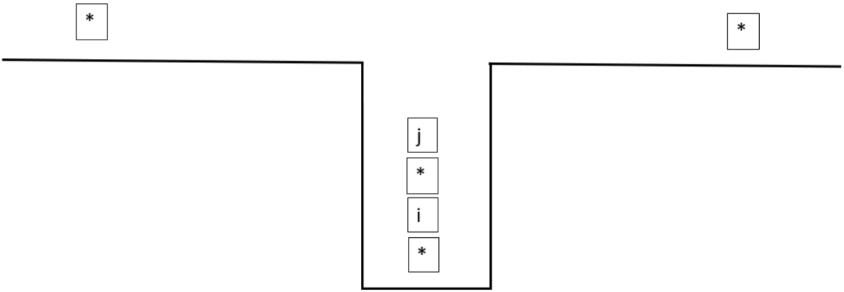
Démonstration 2.1 1

Si on prend $\pi = p_1 p_2 ... p_n \in Sn$ et que l'on veut voir si elle est réalisable, il n'y a qu'une seule manière de faire.

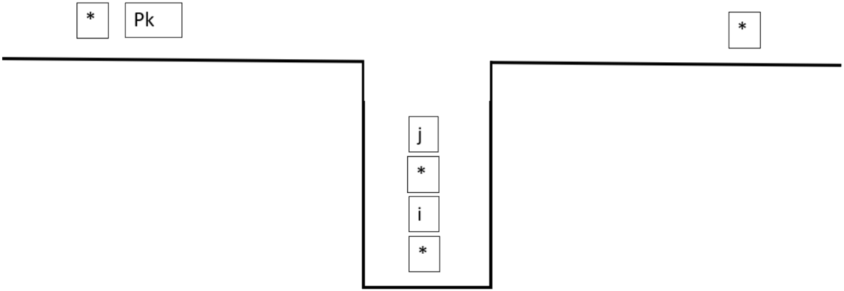
On pousse tous les élements de 12...n jusqu'à ce que p_1 soit au sommet de la pile et on place p_1 sur la sortie puis on recommence jusqu'à ce que p_2 soit sur le sommet de la pile.

Ainsi, s'il y a un problème, c'est si et et seulement si nous disposons de $1 < i < j < n$ et que nous souhaitons placer i dans la sortie mais que l'on ne peut pas car il existe $j > i$ tel que j est au dessus de i sur la pile.




*
*
j
*
i
*

Et si ce j est placé là c'est qu'il existe $k > j$ tel que $p_k < p_j$:



Par conséquent on ne peut pas avoir $p_k < p_i < p_j$ avec $i < j < k$.

Corollaire 2.1

Soit $\pi = p_1 p_2 ... p_n \in Sn$,
$\pi \in SSn$ *si et seulement* $\sigma^{-1} = 231 \not\preceq \pi$

On en déduit l'algorithme suivant :

```
def StackRealisable(Sigma):
    for a in range(len(Sigma)-2):
        for b in range(a+1, len(Sigma)-1):
            for c in range(b+1, len(Sigma)):
                if Sigma[c]<Sigma[a] and Sigma[a]< Sigma[b]:
                    return False
    return (True)
def StackSortable(Sigma):
    for a in range(len(Sigma)-2):
        for b in range(a+1, len(Sigma)-1):
            for c in range(b+1, len(Sigma)):
                if Sigma[b]<Sigma[c] and Sigma[c]< Sigma[a]:
                    return False
    return (True)
```

en $\bigcirc(n^3)$

Remarque 2.1

On construit directement la permutation à l'aide d'une pile, cette fois-ci en $\bigcirc(n)$.

```
class pile(list):

    def __repr__(self):
        if len(self)==0:
            return "pile vide"
        contenu = "\n".join(str(e) for e in reversed(self))
        return "sommet de la pile\n" + contenu + "\nfond de la pile"

    def push(self,elem):   #Opération S
        self.append(elem)


def StackRealisable2(Sigma):
    Id = [e for e in range(len(Sigma), 0,-1)]       #On part de l'identité

    Stack = pile()                                  #On construit la pile
    Stack.push(0)
    L = []                                          #On construit la sortie

    for i in range(len(Sigma)):
        while Stack.top() != Sigma[i] and Id !=[]: #On pousse tous les éléments jusqu'à la bonne valeur ou que
l'entrée est vide
            elem = Id.pop()
            Stack.push(elem)

        L.append(Stack.pop())


    if L != Sigma:                              #On vérifie que l'on a la bonne permutation
        return False

    return True
```

Propriété 2.2 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|SSn| = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Lemme 2.2 1

Soit

$$f(n) = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Alors f(n) est solution de :

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} f(k-1)f(n-k) \quad (1)$$

$$f(0) = 1 \quad (2)$$

Démonstration 2.2 1

Soit

$$g : x \longrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} f(k)x^k$$

où f vérifie (1) et (2), et que le rayon de g est strictement positif. Notons son rayon R. Par un produit de Cauchy : $\forall x \in]-R; R[$,

$$\begin{aligned} g(x)^2 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} f(k)f(n-k)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} f(n+1)x^n \\ &= \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} f(n+1)x^{n+1} \\ &= \frac{g(x) - g(0)}{x} \end{aligned}$$

Démonstration 2.2 1

On résout l'équation polynomiale en f(x),

$$\forall x \in]-R; R[\,, f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \quad ou \quad f(x) = \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$$

Par C^0 de f, on retient la première alternative, un calcul rapide montre que :

$$x \longrightarrow \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \quad est \quad DSE \quad et \quad que :$$

$$\forall x \in]-R; R[\,, \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} x^n$$

Démonstration 2.2 2

Soit $f(n) = |SSn|$,
Soit $\pi = p_1 p_2 ... p_n \in Sn$, *si n est à la k-ième position, écrivons :*
$\pi = \pi_g n \pi_d$
Alors d'après le théorème de caractérisation de SSn. Tout élément de π_g *doit être inférieur à ceux de* π_d. *Ainsi :*

π_g *et* π_d *sont des permutations stack-sortables telles que :*

$$\pi_g : [\![1\ ,\ k-1]\!] \to [\![1\ ,\ k-1]\!]$$
$$\pi_d : [\![k\ ,\ n-1]\!] \to [\![k+1\ ,\ n]\!]$$

D'où, en sommant toutes les possibilités d'emplacement de n, on obtient :

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} f(k-1) f(n-k) \quad (1)$$

$$f(0) = 1 \quad (2)$$

Propriété 2.2 2

$$\frac{SSn}{Sn} \sim (\frac{4e}{n})^n \frac{1}{n^2\pi\sqrt{2}}$$

Remarque 2.2

Il y a donc très peu de permutation stack-sortable ou stack-realisable. Qu'en est-il maintenant de SSn $\bigcap$ SRn ?

Définition 2.3.1

Soit $n \in \mathbb{N}$, on note In l'ensemble des involutions de Sn, c'est-à-dire les éléments d'ordre 2 pour la composition.*

Remarque 2.3.1

La première remarque évidente est que :
$SSn \bigcap In \subset SSn \bigcap SRn$
$SRn \bigcap In \subset SSn \bigcap SRn$

Démonstration 2.3.1

D'après la propriété 1.3, $\pi \in SSn \Leftrightarrow \pi^{-1} \in SRn$
On a en fait mieux : il y a égalité dans les cas. Ce qui va montrer qu'il y a relativement très peu de permutations à la fois réalisables et que l'on peut trier.

Définition 2.3.2 1

Soit $\sigma \in Sn$*, on écrit* $\sigma = a_1 a_2 ... a_n$ *tel que* $\forall\ i \in [\![1\ ,\ n]\!]$, $\sigma(i) = a_i$
On appelle séparation propre de σ *une suite de sous-permutations* $(\sigma_1, ..., \sigma_k) \in Sn^k$ *tel que* $\sigma = \sigma_1 \circ ... \circ \sigma_k$ *où* $\circ$ *désigne la concaténation.*

Définition 2.3.2 2

Une sous-permutation de σ *est dîte décroissante si les nombres apparaissant dans sa décomposition sont dans l'ordre décroissant.*

Définition 2.3.2 3

Une séparation propre est ascendante si toutes les sous-permutations sont décroissantes et si $i < j$ *alors toutes les nombres de* σ_j *sont plus grands que ceux apparaissant dans* σ_i*.*

Proposition 2.3.2 1

Une permutation qui a une séparation ascendante est une involution.

Démonstration 2.3.2 1

Il suffit de montrer que :
$\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, *la permutation* $\rho = n\ n-1 \ldots 1$ *est une involution.*

En effet, si σ *est à séparation ascendante alors* $\sigma = \sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_k$,
où σ_i *est de longueur* l_i *et est de la forme :*

$$\sigma_i = j\ j-1 \ldots j-l_i+1 \quad Donc \quad l_i\ l_i-1 \ldots 1 \prec \sigma$$

Ce qui est clair.

Proposition 2.3.2 2

$\forall \sigma \in SSn \bigcap SRn$, σ *a une séparation ascendante.*

Démonstration 2.3.2 2

En effet, par définition σ ne contient pas les motifs 231 et 312. Ecrivons :
$\sigma = \sigma_1 \circ ... \circ \sigma_k$ *où les σ_i sont décroissantes.*

Soit $i \in [\![1\ ,\ k-1]\!]$, supposons par l'absurde qu'il existe $p_a \in \sigma_i$ et $p_b \in \sigma_{i+1}$ tels que $p_a > p_b$, on suppose, sans pertes de généralités que $a < b$,
Alors par définition on a les possibilités :

$$\text{-}\exists c \in \sigma_i\ p_a > p_b > p_c\ ,\quad \left.\begin{array}{l} p_a > p_b > p_c \\ a < c < b \end{array}\right\} \Rightarrow (231) \prec \sigma$$

$$\text{-}\exists c \in \sigma_{i+1}\ p_c > p_a > p_b\ ,\quad \left.\begin{array}{l} p_c > p_a > p_b \\ a < c < b \end{array}\right\} \Rightarrow (312) \prec \sigma$$

Ce qui est impossible dans les 2 cas, d'où le résultat.

Corollaire 2.3.2

$$SSn \bigcap SRn = SRn \bigcap In = SSn \bigcap In$$

Proposition 2.3.3

$$|SSn \bigcap SRn| = 2^{n-1}$$

Démonstration 2.3.3

$\forall\sigma \in SSn\bigcap SRn$, $\sigma = \sigma_1 \circ ... \circ \sigma_k$, décomposition adaptée à la proposition précédente, ie ascendante.

Alors σ est uniquement détérminée par les tailles de $\sigma_1, ..., \sigma_k$ que l'on note $l_1, ..., l_k$, avec $\sum_{i=1}^{k} l_i = n$. Considérons alors l'application :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} SSn\bigcap SRn & \rightarrow & S \\ \sigma = \sigma_1 \circ ... \circ \sigma_k & \rightarrow & (l_1, ..., l_k) \end{array} \right.$$

où S
désigne l'ensemble des k-uplets de $\mathbb{N}^*$ tel que $\sum_{i=1}^{k} l_i = n$, pour $k \in [\![1\ ,\ n]\!]$.

Démonstration 2.3.3

Si l'on note $S = \bigsqcup_{k=1}^{n} S_k$

$$\begin{cases} S_k & \rightarrow & [\![1\ ,\ n-1]\!]^{k-1} \\ (l_1, ..., l_k) & \rightarrow & (l_1, l_1 + l_2 ..., l_1 + ... l_{k-1}) \end{cases}$$

est clairement une bijection.
Ainsi :

$$\begin{aligned} |SSn \bigcap SRn| &= \sum_{k=1}^{n} |S_k| \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \\ &= 2^{n-1} \end{aligned}$$

Définition 3.1

Soit $\pi = p_1 p_2 ... p_n \in Sn$, *un élément* p_i *est un maximum de gauche à droite si il n'existe pas d'élements* a_j, $i \ll j$ *tel que* $a_i \ggg a_j$.
La sous-suite des maximum de gauche à droite de π *est appelée sous-suite distinguée de* π.

Exemple 3.1 1

Soit $\pi = 132546$,*La sous-suite distinguée de* π *est la sous-suite 1356.*

Théorème 3.1

Si l'on munit Sn de la probabilité uniforme, l'espérance de la taille de la sous-suite distinguée d'une permutation aléatoire de SRn est de :

$$3 - \frac{6}{n+2}$$

Idée de la preuve 3.1

Si $\pi = p_1 p_2 ... p_n \in SRn$ *et* $\sigma = p_{i_1} p_{i_2} ... p_{ik}$ *sa sous-suite distinguée,*
Plan de la preuve : -On montre que les k+1 permutations formées à partir de σ *en ajoutant n+1 immédiatement à gauche d'un* p_{ij} *est dans* SS_{n+1} *(ou en ajoutant n+1 tout à la fin) .*
-Réciproquement on montre que insérer $n+1$ *à un autre endroit crée une permutation* π' *telle que* $\pi' \notin SR_{n+1}$*.*
- On établit une bijection entre ces permutations et SS_{n+1}*.*
On a alors : $|SR_{n+1}| = C_{n+1} = \sum_{\pi \in SS_n} (a_\pi + 1)$ *où* a_π *désigne la taille de* σ*.*
Donc : $\frac{\sum_{\pi \in SS_n} (a_\pi)}{C_n} = 3 - \frac{6}{n+2}$

Exemple 3.1 2

Si $\pi = 1324$, *alors* $\sigma = 134$
Donc si l'on note σ_k *les permutations formées :*

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 5134\\ \sigma_2 &= 1534\\ \sigma_3 &= 1354\\ \sigma_4 &= 1345\end{aligned}$$

Démonstration 3.1 1

Montrons que :
$\forall i \in [\![1\ ,\ k+1]\!], \sigma_i \in SR_{n+1}$ *Par l'absurde s'il existe* $2 \leqslant i \leqslant k$,
$\sigma_i \not\in SR_{n+1}$ *(les cas i=1 et k sont évidents).*
Alors il existe p_i *et* p_j *tels que :*
$\begin{cases} i < j \\ p_j < p_i \end{cases}$ *Considérons alors* p_{i_l} *l'élement de* σ *immédiatement à droite de n+1. Alors* p_i, p_{i_l}, p_j *est une séquence interdite :*
$\begin{cases} i < j < i_l \\ p_j < p_i < p_{i_l} \end{cases} \Rightarrow \pi \not\in SS_n$

Démonstration 3.1

Réciproquement montrons que mettre n+1 à un autre endroit crée π*' telle que* $\pi' \not\in SR_{n+1}$.
Soit p_{i_l} *l'élement de* σ *immédiatement à gauche de n+1.*
Alors on peut écrire $\pi' = * \, p_{i_l} \, * \, n{+}1 \; p_k \; *$.
Alors l'élément immédiatement à droite de n+1 n'est pas plus grand que p_{i_l} *par hypothèse (*σ *sous-suite disinguée).*
D'où π*' contient* $(p_{i_l}, n+1, p_k)$ *avec* $p_k < p_{i_l} < n+1$*, ce qui n'est pas.*

Soit $\pi' \in SR_{n+1}$.
Alors la permutation obtenue par restriction en enlevant n+1 est clairement dans SR_n.
Donc la construction précédente fonctionne. D'où la bijection.

Théorème(admis) 3.1 2

Pour une permutation tirée aléatoirement dans S_n, l'espérance de la taille de la sous-suite distinguée est H_n, la série harmonique.

Définition 3.2.1 1

Soit $\pi = p_1 p_2 ... p_n \in S_n$, une sous-suite de longueur k de π est dite décroissante si : $\exists (i_1, ... i_k) \in [\![1 \ , \ n]\!]^k, \begin{cases} i_1 < ... < i_k \\ p_{i_k} < ... < p_{i_1} \end{cases}$

Une sous-suite décroissante est maximale si on ne peut pas ajouter d'élément de π sans perdre la propriété de décroissance. On définit de même pour une sous-suite croissante.

Notation 3.2.1 1

On note $LDS(\pi)$ l'ensemble des sous-suites décroissantes maximales de taille maximale de π. De même pour $LAS(\pi)$.

Notation 3.2.1 2

Si $j \in [\![1\ ,\ n]\!]$,
on note $R_{n,\pi}(j)$ *l'ensemble des entiers qui apparaissent à droite de* j *dans l'écriture de* π *dans le sens de lecture. On définit de même* $L_{n,\pi}(j)$

Définition 3.2.1 2

La table d'inversion de π est le n-uplet $(b_1, \ldots b_n)$ défini par :
$\forall i \in [\![1\ ,\ n]\!]\ ,\ b_i = |\{a \in R_{n,\pi}(i), a < i\}|$

Exemple 3.2.1 1

$\pi = 364521$

-321 est une sous-suite maximale décroissante.

-6421 $\in LDS(\pi)$.

-345 $\in LAS(\pi)$.

-$R_{n,\pi}(4) = \{5, 2, 1\}$, $L_{n,\pi}(6) = \{3\}$

Théorème 3.2.1 1

La longueur d'une permutation de LDSπ *si* $\pi \in SS_n$ *est égale à la profondeur nécessaire dans la pile.*

Théorème(admis) 3.2.1 2

L'espérance de la taille d'une LDS dans une permutation tirée au hasard dans SS_n *est assymptotiquement :*

$$\sqrt{\pi n} - 1.5 + \frac{11}{24}\sqrt{\frac{\pi}{n}} + \bigcirc\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

Définition 3.2.1 3

Une partition ordonnée de n en m parties est un m-uplet c tel que :
$c = (c_1, \ldots, c_m)$, $c_i \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{i=1}^{m} c_i = n$

Définition 3.2.1 4

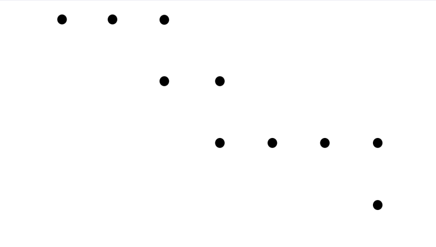
Une composition c de n peut être représentée comme un graphe en zig-zag. Ce graphe contient m lignes avec c_i points sur la i-ème ligne. Pour $i > 1$, le premier point de la i-ème ligne est écrit sous le dernier point de la (i-1)-ème ligne.

Notation 3.2.1 3

On note : $\overline{c} = (\overline{c_1}, \overline{c_2}..., \overline{c_{n+1-m}})$ *où* $\overline{c_i}$ *désigne le nombre de points sur la i-ème colonne.*

Exemple 3.2.1 2

On prend la partition ordonnée de 10 : $c = (3,2,4,1)$



Alors $\overline{c} = (1,1,2,2,1,1,2)$

Définition 3.2.1 5

Soit $\pi \in SS_n$. Soit $\tilde{L}$ la séquence de S et de X opérations qui trie π dans une pile.
Scannant $\tilde{L}$ de gauche à droite, on appelle suite de "S" consécutifs un S-groupe et une suite de "X" consécutifs un X-groupe.
On appelle :
-S-specification $S = (s_1, ...s_l)$, où s_i est la taille du i-ème S-groupe.
-X-specification $X = (x_1, ...x_l)$, où x_i est la taille du i-ème X-groupe.

Remarque 3.2.1

Le nombre de X-groupe et de S-groupe est le même.
Ces groupes sont alternés dans $\tilde{L}$
Ces résultats résultent de la nature même d'une pile.

Exemple 3.2.1 3

$\pi = 63214587$

On vérifie que $L = (S,S,S,S,X,X,X,S,X,S,X,X,S,S,X,X)$.

D'où $X = (3,1,2,2)$ *et* $S = (4,1,1,2)$

On veut associer à une permutation de SS_n un arbre.

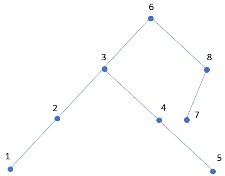
Construction(admise) 3.2.2

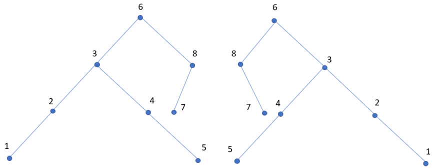
On note $R_T(j)$ (et $L_T(j)$) le sous arbre de racine j à gauche (respectivement à droite).

Soit $\pi = p_1 ... p_n$ et T un arbre vide
On prend p_1 comme racine de l'arbre, puis :
$\forall k > 1$, si p_k est inséré dans un sous-arbre de racine p_i on l'insère dans $L_T(p_i)$ si $p_k \lll p_i$ sinon dans $R_T(p_i)$ jusqu'à ce que l'on atteigne un sous arbre vide et on définit une nouvelle racine appelée p_k.

Exemple 3.2.2

$$\pi = 63214587$$





$\pi = 63214587$
$L_\pi =$
$(S, S, S, S, X, X, X, S, X, S, X, X, S, S, X, X)$
$X_\pi = (3, 1, 2, 2)$ $S_\pi = (4, 1, 1, 2)$

$\pi_{RF} = 31265478$
$L_{\pi_{RF}} =$
$(S, S, X, S, X, X, S, S, S, X, X, X, S, X, S, X)$
$X_{\pi_{RF}} = (1,2,3,1,1)$ $S_{\pi_{RF}} = (2,1,3,1,1)$

$$X_\pi^R = (2,2,1,3)$$
$$\vdots$$
$$\overline{X_\pi^R} = (1, 2, 3, 1, 1) = X_{\pi_{RF}}$$

Lemme 3.2.2 1

Soit $\pi \in SS_n$*, si on note :*
-$X = (x_1, ..., x_k)$ *X-specification de L*
-$X_{RF} = (x'_1, ..., x'_k)$ *X-specification de* L_{RF}
-$X^R = (x_k, ..., x_1)$
Alors X_{RF} *et* X^R *sont conjuguées, ie :*
$\overline{X^R} = X_{RF}$

Lemme 3.2.2 2

Une LAS de $\pi \in SS_n$ est égale au nombre de composants d'une S-specification (X-specification) de L.

Démonstration 3.2.2 2

Si L est une séquence pour trier π et sa S-specification : $(s_1, ..., s_l)$, alors π doit avoir exactement l sous-suites décroissantes de taille s_i.
Soit A une LAS de π de taille k.
Alors $k \leqslant l$ car 2 éléments de A ne peuvent être dans un même s_i.
Réciproquement soit $D = (d_1, ...d_l)$ où d_i est le dernier élément de la i-ème sous suite décroissante. On remarque que d_i est aussi le premier élément mit par l'action du ième X-groupe. Donc D convient.

Théorème 3.2.2

L'espérance de la longueur d'une LAS d'une permutation de SS_n est de $\frac{1}{2}(n+1)$.

Démonstration 3.2.2

Si k désigne ce nombre par le lemme 1 et 2, on a :

$$k = n{+}1\ {-}k$$

En effet :

$$RF : SSn \to SSn$$

qui a une permutation π associe π_{RF} est une bijection.

Définition 4.1 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $h \in [\![1 \ , \ n]\!]$, *on pose* H_n^h *le nombre d'arbres de taille* n *et de hauteur* h. *Si* h_n *désigne la hauteur moyenne d'un arbre de taille* n. *Alors :*

$$h_n = S_n / C_n$$

où

$$S_n = \sum_{h=1}^{+\infty} h H_n^h \quad et \quad C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Définition 4.1 2

On pose $H_n^{<h}$ le nombre d'arbre avec n sommets et de taille inférieur strictement à h. De même avec inférieur ou égal.
Ainsi :

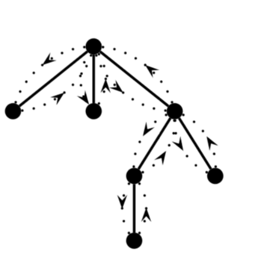
$$S_n = \sum_{h=1}^{+\infty} hH_n^h = \sum_{h\geq 1} h(H_n^{\geq h} - H_n^{\geq h+1}) = \sum_{h\geq 1} hH_n^{\geq h}$$

Proposition 4.2 1

$$H_n^{\geq h} = \sum_{k \geq 1} \left(\binom{2n}{n+1-kh} - 2\binom{2n}{n-kh} + \binom{2n}{n-1-kh} \right)$$

Proposition 4.2 2

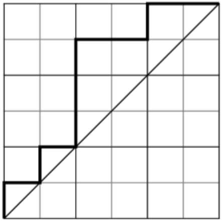
Il y a une bijection entre les arbres de catalans à n+1 sommets (n arrêtes) avec les chemins de Dick passant au dessus de la diagonale de taille 2n.

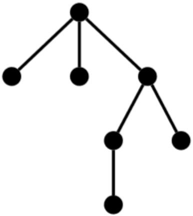


$$\downarrow \Longleftrightarrow \uparrow$$

$$\uparrow \Longleftrightarrow \rightarrow$$

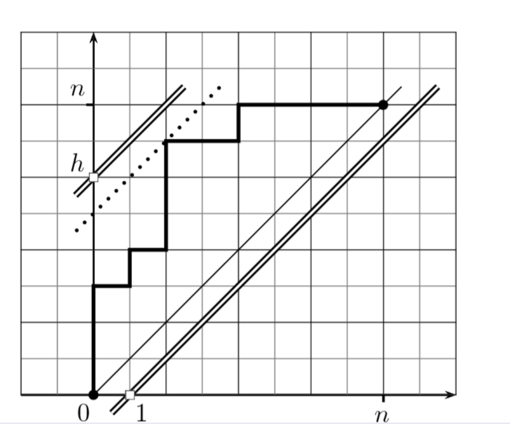
$$\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow \Longleftrightarrow \uparrow\rightarrow\uparrow\rightarrow\uparrow\uparrow\uparrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\rightarrow\rightarrow$$





Proposition 4.2 3

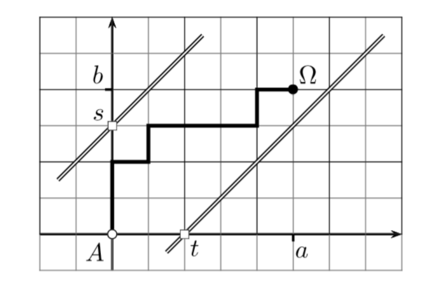
Le nombre d'arbres de taille n de hauteur strictement plus petite que h est égal à celui des chemins de Dick ne traversant pas la droite $y = x + h - 1$ *et* $y = x + 1$.



Proposition 4.2 4

Si on note $L(a;b;s;t)$ l'ensemble des chemins de Dick ne traversant pas les droites $y = x + s$ et $y = x - t$ alors :

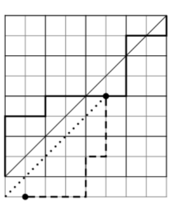
$$|L(a;b;s;t)| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\binom{a+b}{b+k(s+t)} - \binom{a+b}{b+k(s+t)+t} \right)$$



Lemme 4.2

Si R(a ;b ;t) dénote l'ensemble des chemins de (0,0) à (a,b) réfléchis par $y = x + t$ *alors :*

$$|R(a;b;t)| = \binom{a+b}{a-t}$$



Démonstration 4.2

Proposition 4.2 5

$$S_n = \sum_{k' \geq 1} (\binom{2n}{n+1-k'} - 2\binom{2n}{n-k'} + \binom{2n}{n-1-k'})d(k')$$

où $d(k')$ dénote le nombre de diviseur de k'.

Définition 4.3 1

Soit $a \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$f_a(n) = \sum_{k \geq 1} \left(\frac{\binom{2n}{n+1-kh}}{\binom{2n}{n}} \right) d(k)$$

Définition 4.3 2

Soit $b \in \mathbb{N}^*$, *on note :*

$$g_b(n) = \sum_{k \geq 1} k^b e^{-\frac{k^2}{n}} d(k)$$