

La duplication de boules ? Le théorème d'Hausdorff-Banach-Tarski

Koulm VINCENT

Session 2025 : Transition, Transformation, Conversion

I. Introduction

1. Position du problème
2. Définitions et notations
3. Énoncé du théorème
4. L'axiome du choix

II. Le théorème d'Hausdorff

III. Le théorème de Banach-Tarski

IV. Une conséquence du théorème

V. Annexes

Le théorème

Résultat établi par Banach et Tarski en 1924.

Le théorème

Résultat établi par Banach et Tarski en 1924.

Il est possible de découper la boule unité de $\mathbb{R}^3$ et un nombre **fini** de morceaux et de les recoller pour former deux autres boules identiques.

Le théorème

Résultat établi par Banach et Tarski en 1924.

Il est possible de découper la boule unité de $\mathbb{R}^3$ et un nombre **fini** de morceaux et de les recoller pour former deux autres boules identiques.



Image : Benjamin D. Escham

Le théorème

Résultat établi par Banach et Tarski en 1924.

Il est possible de découper la boule unité de $\mathbb{R}^3$ et un nombre **fini** de morceaux et de les recoller pour former deux autres boules identiques.



Image : Benjamin D. Escham

Particularités de ce théorème :

Le théorème

Résultat établi par Banach et Tarski en 1924.

Il est possible de découper la boule unité de $\mathbb{R}^3$ et un nombre **fini** de morceaux et de les recoller pour former deux autres boules identiques.



Image : Benjamin D. Escham

Particularités de ce théorème :

- Caractère extrêmement contre-intuitif.

Le théorème

Résultat établi par Banach et Tarski en 1924.

Il est possible de découper la boule unité de $\mathbb{R}^3$ et un nombre **fini** de morceaux et de les recoller pour former deux autres boules identiques.



Image : Benjamin D. Escham

Particularités de ce théorème :

- Caractère extrêmement contre-intuitif.
- Les morceaux sont en nombres **fini**.

Le théorème

Résultat établi par Banach et Tarski en 1924.

Il est possible de découper la boule unité de $\mathbb{R}^3$ et un nombre **fini** de morceaux et de les recoller pour former deux autres boules identiques.



Image : Benjamin D. Escham

Particularités de ce théorème :

- Caractère extrêmement contre-intuitif.
- Les morceaux sont en nombres **fini**.
- La démonstration repose sur l'utilisation de **l'axiome du choix**.

Objectifs

Objectifs

- Démontrer le théorème.

Objectifs

- Démontrer le théorème.
- En étudier les conséquences notamment sur les mesures des parties bornées de $\mathbb{R}^3$.

I. Introduction

1. Position du problème
2. Définitions et notations
3. Énoncé du théorème
4. L'axiome du choix

II. Le théorème d'Hausdorff

III. Le théorème de Banach-Tarski

IV. Une conséquence du théorème

V. Annexes

- On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique e_1, e_2, e_3 .

- On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique e_1, e_2, e_3 .
- On notera id l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

- On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique e_1, e_2, e_3 .
- On notera id l'application identité de $\mathbb{R}^3$.
- Pour une application linéaire u on notera M_u sa matrice dans la base canonique.

- On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique e_1, e_2, e_3 .
- On notera id l'application identité de $\mathbb{R}^3$.
- Pour une application linéaire u on notera M_u sa matrice dans la base canonique.
- Pour A, B deux ensembles, si leur union est disjointe, on notera : $A \sqcup B$.

- On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique e_1, e_2, e_3 .
- On notera id l'application identité de $\mathbb{R}^3$.
- Pour une application linéaire u on notera M_u sa matrice dans la base canonique.
- Pour A, B deux ensembles, si leur union est disjointe, on notera : $A \sqcup B$.
- Un déplacement est une translation, une rotation ou une composition des deux.

Définition/Propriété : G -équidissécabilité

- Soit G un groupe quelconque de déplacement de $\mathbb{R}^3$.

Définition/Propriété : G -équidissécabilité

- Soit G un groupe quelconque de déplacement de $\mathbb{R}^3$.
- Soit A et B deux ensembles de $\mathbb{R}^3$.

Définition/Propriété : G -équidissécabilité

- Soit G un groupe quelconque de déplacement de $\mathbb{R}^3$.
- Soit A et B deux ensembles de $\mathbb{R}^3$.
- A est dit G -équidissécable à B s'il existe une partition de A , $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$ et une partition de B , $B = \bigsqcup_{i=1}^n B_i$ tel que $\forall i \in [1, n] \exists \varphi_i \in G \ B_i = \varphi_i(A_i)$

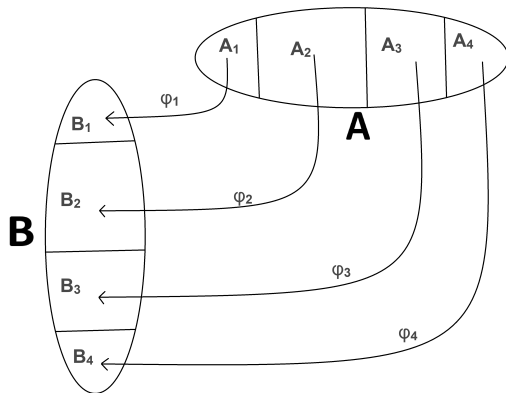
Définition/Propriété : G -équidissécabilité

- Soit G un groupe quelconque de déplacement de $\mathbb{R}^3$.
- Soit A et B deux ensembles de $\mathbb{R}^3$.
- A est dit G -équidissécable à B s'il existe une partition de A , $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$ et une partition de B , $B = \bigsqcup_{i=1}^n B_i$ tel que $\forall i \in [1, n] \exists \varphi_i \in G \ B_i = \varphi_i(A_i)$
- On notera $A \stackrel{G}{\equiv} B$.

Définition/Propriété : G -équidissécabilité

- Soit G un groupe quelconque de déplacement de $\mathbb{R}^3$.
- Soit A et B deux ensembles de $\mathbb{R}^3$.
- A est dit G -équidissécable à B s'il existe une partition de A , $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$ et une partition de B , $B = \bigsqcup_{i=1}^n B_i$ tel que $\forall i \in [1, n] \exists \varphi_i \in G \ B_i = \varphi_i(A_i)$
- On notera $A \stackrel{G}{\equiv} B$.
- La relation d'équidissécabilité selon G est une **relation d'équivalence** (cf. annexe).

Un exemple



I. Introduction

1. Position du problème
2. Définitions et notations
3. Enoncé du théorème
4. L'axiome du choix

II. Le théorème d'Hausdorff

III. Le théorème de Banach-Tarski

IV. Une conséquence du théorème

V. Annexes

L'objectif est la démonstration des résultats suivants :

L'objectif est la démonstration des résultats suivants :

Théorème de Banach-Tarski(version faible)

- Soit Σ une boule fermée de $\mathbb{R}^3$ de rayon $r > 0$. Il existe G un groupe de rotations tel que :
- Σ est G -équidissécable à deux boules fermées, disjointes, de rayon r .

L'objectif est la démonstration des résultats suivants :

Théorème de Banach-Tarski (version faible)

- Soit Σ une boule fermée de $\mathbb{R}^3$ de rayon $r > 0$. Il existe G un groupe de rotations tel que :
- Σ est G -équidissécable à deux boules fermées, disjointes, de rayon r .

Théorème de Banach-Tarski (version forte)

- Soit A, B deux parties bornées de $\mathbb{R}^3$, d'intérieur non vide.
- Alors, il existe D un groupe de déplacements de $\mathbb{R}^3$ tel que $A \stackrel{D}{\equiv} B$.

I. Introduction

1. Position du problème
2. Définitions et notations
3. Énoncé du théorème
4. L'axiome du choix

II. Le théorème d'Hausdorff

III. Le théorème de Banach-Tarski

IV. Une conséquence du théorème

V. Annexes

- Premier énoncé : **1890** par **Giuseppe Peano**.

- Premier énoncé : **1890** par **Giuseppe Peano**.
- Se rajoute (si accepté) à la théorie axiomatique des ensembles de Zermelo-Fraenkel.

- Premier énoncé : **1890** par **Giussesse Peano**.
- Se rajoute (si accepté) à la théorie axiomatique des ensembles de Zermelo-Fraenkel.

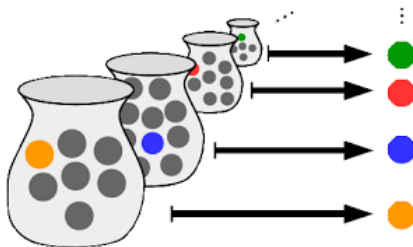


Image : fr.wikipedia.org/wiki/Axiome_du_choix

Enoncé

L'axiome s'énonce ainsi : pour $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$ un ensemble d'ensembles non vides, il existe Y un sous-ensemble de X qui contient un **unique** élément de chaque sous-ensemble X_i .

Enoncé

L'axiome s'énonce ainsi : pour $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$ un ensemble d'ensembles non vides, il existe Y un sous-ensemble de X qui contient un **unique** élément de chaque sous-ensemble X_i .

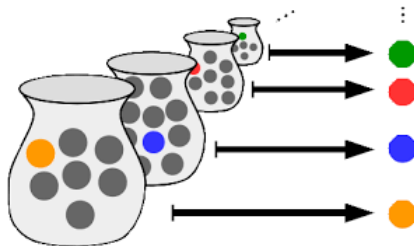


Image : fr.wikipedia.org/wiki/Axiome_du_choix

I. Introduction

II. Le théorème d'Hausdorff

1. Position du problème et objectifs de la section
2. Le groupe G
3. Partitionnement du groupe
4. Partitionnement de la sphère

III. Le théorème de Banach-Tarski

IV. Une conséquence du théorème

V. Annexes

Objectif : le théorème d'Hausdorff

Théorème d'Hausdorff

Soit S la sphère unité de $\mathbb{R}^3$, alors il existe G un groupe de rotation et une partition de S , $S = A \sqcup B \sqcup C \sqcup D$ tel que :

- D est dénombrable
- $A \stackrel{G}{\equiv} B \stackrel{G}{\equiv} C$
- $A \stackrel{G}{\equiv} B \sqcup C$

I. Introduction

II. Le théorème d'Hausdorff

1. Position du problème et objectifs de la section
2. Le groupe G
3. Partitionnement du groupe
4. Partitionnement de la sphère

III. Le théorème de Banach-Tarski

IV. Une conséquence du théorème

V. Annexes

La rotation φ

Rotation d'axe $e_1 + e_2$ et d'angle π

La rotation φ

Rotation d'axe $e_1 + e_2$ et d'angle π

La matrice de φ dans la base canonique :

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La rotation φ

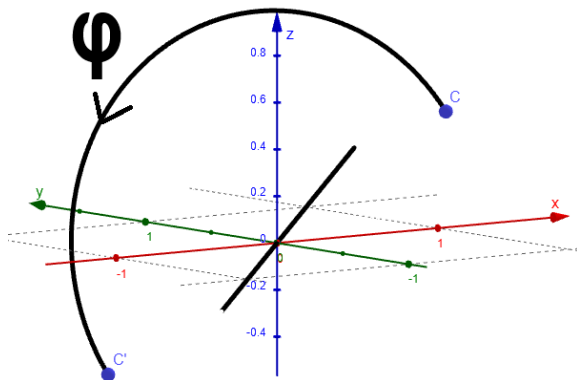


Figure – φ transforme C en C'

La rotation ψ

Rotation d'axe e_1 d'angle $-\frac{2\pi}{3}$

La rotation ψ

Rotation d'axe e_1 d'angle $-\frac{2\pi}{3}$

La matrice de ψ dans la base canonique :

$$M_\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La rotation ψ

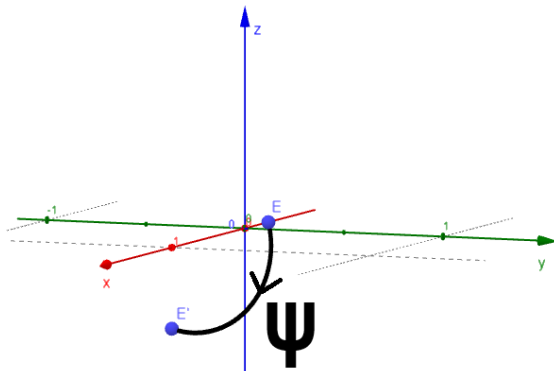


Figure – ψ transforme E en E'

La construction de G

On définit G comme étant le sous groupe de O^+ engendré par les rotations φ et ψ :

$$G \stackrel{\text{def}}{=} \langle \varphi, \psi \rangle$$

Une propriété

■ On a $\varphi^{-1} = \varphi$ donc $\varphi^2 = id$ et $\psi^2 = \psi^{-1}$ donc $\psi^3 = id$

Une propriété

- On a $\varphi^{-1} = \varphi$ donc $\varphi^2 = id$ et $\psi^2 = \psi^{-1}$ donc $\psi^3 = id$
- Exemple : $\varphi^2\psi^5\varphi^{-1}\psi^{-1} = \psi^2\varphi\psi^2$
- chaque élément de G différent de l'identité possède donc une écriture réduite de la forme suivante :

$$\forall u \in G \exists k_1, k_2 \in \{0, 1\} \exists p \in \mathbb{N}^* \exists (n_1, \dots, n_p) \in \{1, 2\}^p$$

$$u = \varphi^{k_1}\psi^{n_1}\varphi\psi^{n_2}\dots\varphi\psi^{n_p}\varphi^{k_2}$$

Une propriété

- On a $\varphi^{-1} = \varphi$ donc $\varphi^2 = id$ et $\psi^2 = \psi^{-1}$ donc $\psi^3 = id$
- Exemple : $\varphi^2\psi^5\varphi^{-1}\psi^{-1} = \psi^2\varphi\psi^2$
- chaque élément de G différent de l'identité possède donc une écriture réduite de la forme suivante :

$$\forall u \in G \exists k_1, k_2 \in \{0, 1\} \exists p \in \mathbb{N}^* \exists (n_1, \dots, n_p) \in \{1, 2\}^p$$

$$u = \varphi^{k_1}\psi^{n_1}\varphi\psi^{n_2}\dots\varphi\psi^{n_p}\varphi^{k_2}$$

- A-t-on l'unicité de la forme réduite ?

Une propriété

Propriété

La forme réduite d'un élément de G différent de l'identité est **unique**.

Une propriété

Démonstration

■ On rappelle : $M_\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $M_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Une propriété

Démonstration

- On rappelle : $M_\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $M_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- On peut montrer par récurrence sur p (longueur de l'élément) que pour $v \in G$ avec $v \neq id$:

$$M_v = \frac{1}{2^p} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3\sqrt{3} \\ b_1 & a_4 & b_2\sqrt{3} \\ b_3\sqrt{3} & a_5\sqrt{3} & b_4 \end{pmatrix}$$

avec $a_i \in 2\mathbb{Z}$ et $b_i \in \mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}$, non tous nuls

Une propriété

Démonstration

- On rappelle : $M_\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $M_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- On peut montrer par récurrence sur p (longueur de l'élément) que pour $v \in G$ avec $v \neq id$:

$$M_v = \frac{1}{2^p} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3\sqrt{3} \\ b_1 & a_4 & b_2\sqrt{3} \\ b_3\sqrt{3} & a_5\sqrt{3} & b_4 \end{pmatrix}$$

avec $a_i \in 2\mathbb{Z}$ et $b_i \in \mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}$, non tous nuls

- Soit $u \in G$ de forme réduite $u = \varphi^{k_1} \psi^{n_1} \varphi \psi^{n_2} \dots \varphi \psi^{n_p} \varphi^{k_2}$

Une propriété

Démonstration

- On rappelle : $M_\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $M_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- On peut montrer par récurrence sur p (longueur de l'élément) que pour $v \in G$ avec $v \neq id$:

$$M_v = \frac{1}{2^p} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3\sqrt{3} \\ b_1 & a_4 & b_2\sqrt{3} \\ b_3\sqrt{3} & a_5\sqrt{3} & b_4 \end{pmatrix}$$

avec $a_i \in 2\mathbb{Z}$ et $b_i \in \mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}$, non tous nuls

- Soit $u \in G$ de forme réduite $u = \varphi^{k_1} \psi^{n_1} \varphi \psi^{n_2} \dots \varphi \psi^{n_p} \varphi^{k_2}$

Une propriété

- On suppose que u possède une autre écriture réduite :

$$u = \varphi^{k'_1} \psi^{n'_1} \varphi \psi^{n'_2} \dots \varphi \psi^{n'_{p'}} \varphi^{k'_2}$$

Une propriété

- On suppose que u possède une autre écriture réduite :

$$u = \varphi^{k'_1} \psi^{n'_1} \varphi \psi^{n'_2} \dots \varphi \psi^{n'_{p'}} \varphi^{k'_2}$$

- Or $uu^{-1} = id$, il vient :

$$\varphi^{k_1} \psi^{n_1} \varphi \psi^{n_2} \dots \varphi \psi^{n_p} \varphi^{k_2} \circ \varphi^{-k'_2} \psi^{-n'_{p'}} \varphi \dots \psi^{-n'_2} \varphi \psi^{-n'_1} \varphi^{-k'_1} = id$$

Une propriété

- On suppose que u possède une autre écriture réduite :

$$u = \varphi^{k'_1} \psi^{n'_1} \varphi \psi^{n'_2} \dots \varphi \psi^{n'_{p'}} \varphi^{k'_2}$$

- Or $uu^{-1} = id$, il vient :

$$\varphi^{k_1} \psi^{n_1} \varphi \psi^{n_2} \dots \varphi \psi^{n_p} \varphi^{k_2} \circ \varphi^{-k'_2} \psi^{-n'_{p'}} \varphi \dots \psi^{-n'_2} \varphi \psi^{-n'_1} \varphi^{-k'_1} = id$$

- Si toutes les puissances ne sont pas les mêmes : $uu^{-1} = w$ avec w un élément s'écrivant sous forme réduite

Une propriété

- On suppose que u possède une autre écriture réduite :

$$u = \varphi^{k'_1} \psi^{n'_1} \varphi \psi^{n'_2} \dots \varphi \psi^{n'_{p'}} \varphi^{k'_2}$$

- Or $uu^{-1} = id$, il vient :

$$\varphi^{k_1} \psi^{n_1} \varphi \psi^{n_2} \dots \varphi \psi^{n_p} \varphi^{k_2} \circ \varphi^{-k'_2} \psi^{-n'_{p'}} \varphi \dots \psi^{-n'_2} \varphi \psi^{-n'_1} \varphi^{-k'_1} = id$$

- Si toutes les puissances ne sont pas les mêmes : $uu^{-1} = w$ avec w un élément s'écrivant sous forme réduite
- Donc $id = w$

Une propriété

- On suppose que u possède une autre écriture réduite :

$$u = \varphi^{k'_1} \psi^{n'_1} \varphi \psi^{n'_2} \dots \varphi \psi^{n'_{p'}} \varphi^{k'_2}$$

- Or $uu^{-1} = id$, il vient :

$$\varphi^{k_1} \psi^{n_1} \varphi \psi^{n_2} \dots \varphi \psi^{n_p} \varphi^{k_2} \circ \varphi^{-k'_2} \psi^{-n'_{p'}} \varphi \dots \psi^{-n'_2} \varphi \psi^{-n'_1} \varphi^{-k'_1} = id$$

- Si toutes les puissances ne sont pas les mêmes : $uu^{-1} = w$ avec w un élément s'écrivant sous forme réduite
- Donc $id = w$

- Avec ce qui précède $M_w = I_3 = \frac{1}{2^p} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \sqrt{3} \\ b_1 & a_4 & b_2 \sqrt{3} \\ b_3 \sqrt{3} & a_5 \sqrt{3} & b_4 \end{pmatrix}$ ce qui est absurde.

Une propriété

- On suppose que u possède une autre écriture réduite :

$$u = \varphi^{k'_1} \psi^{n'_1} \varphi \psi^{n'_2} \dots \varphi \psi^{n'_{p'}} \varphi^{k'_2}$$

- Or $uu^{-1} = id$, il vient :

$$\varphi^{k_1} \psi^{n_1} \varphi \psi^{n_2} \dots \varphi \psi^{n_p} \varphi^{k_2} \circ \varphi^{-k'_2} \psi^{-n'_{p'}} \varphi \dots \psi^{-n'_2} \varphi \psi^{-n'_1} \varphi^{-k'_1} = id$$

- Si toutes les puissances ne sont pas les mêmes : $uu^{-1} = w$ avec w un élément s'écrivant sous forme réduite
- Donc $id = w$

- Avec ce qui précède $M_w = I_3 = \frac{1}{2^p} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \sqrt{3} \\ b_1 & a_4 & b_2 \sqrt{3} \\ b_3 \sqrt{3} & a_5 \sqrt{3} & b_4 \end{pmatrix}$ ce qui est absurde.

- La forme réduite d'un élément de G est donc unique. ■

Corollaire

Corollaire

Le groupe G est dénombrable

Corollaire

Corollaire

Le groupe G est dénombrable

Démonstration

Corollaire

Corollaire

Le groupe G est dénombrable

Démonstration

On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} \Delta : G &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (u = \varphi^{k_1} \psi^{n_1} \varphi \psi^{n_2} \dots \varphi \psi^{n_p} \varphi^{k_2}) &\longmapsto 2^{k_1} 3^{k_2} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_p^{n_p} \end{aligned}$$

Corollaire

Corollaire

Le groupe G est dénombrable

Démonstration

On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} \Delta : G &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (u = \varphi^{k_1} \psi^{n_1} \varphi \psi^{n_2} \dots \varphi \psi^{n_p} \varphi^{k_2}) &\longmapsto 2^{k_1} 3^{k_2} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_p^{n_p} \end{aligned}$$

Avec $\mathbb{P} = \{2, 3, p_1, p_2, \dots\}$ l'ensemble des nombres premiers.

- Δ est bien définie.

Corollaire

Corollaire

Le groupe G est dénombrable

Démonstration

On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned}\Delta : G &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (u = \varphi^{k_1} \psi^{n_1} \varphi \psi^{n_2} \dots \varphi \psi^{n_p} \varphi^{k_2}) &\longmapsto 2^{k_1} 3^{k_2} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_p^{n_p}\end{aligned}$$

Avec $\mathbb{P} = \{2, 3, p_1, p_2, \dots\}$ l'ensemble des nombres premiers.

- Δ est bien définie.
- Δ est injective.

Corollaire

Corollaire

Le groupe G est dénombrable

Démonstration

On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned}\Delta : G &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (u = \varphi^{k_1} \psi^{n_1} \varphi \psi^{n_2} \dots \varphi \psi^{n_p} \varphi^{k_2}) &\longmapsto 2^{k_1} 3^{k_2} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_p^{n_p}\end{aligned}$$

Avec $\mathbb{P} = \{2, 3, p_1, p_2, \dots\}$ l'ensemble des nombres premiers.

- Δ est bien définie.
- Δ est injective.

G est donc dénombrable. ■

I. Introduction

II. Le théorème d'Hausdorff

1. Position du problème et objectifs de la section
2. Le groupe G
3. Partitionnement du groupe
4. Partitionnement de la sphère

III. Le théorème de Banach-Tarski

IV. Une conséquence du théorème

V. Annexes

Idée générale

- Il est maintenant possible de distinguer les éléments de G .

Idée générale

- Il est maintenant possible de distinguer les éléments de G .
- **Idée** : écrire $G = A' \sqcup B' \sqcup C'$ de manière à ce que :

Idée générale

- Il est maintenant possible de distinguer les éléments de G .
- **Idée :** écrire $G = A' \sqcup B' \sqcup C'$ de manière à ce que :
 - $\varphi(A') \subset (A' \sqcup B')$, donc $\varphi(A' \sqcup B') \subset \varphi(A')$ (car $\varphi = \varphi^{-1}$)

Idée générale

- Il est maintenant possible de distinguer les éléments de G .
- **Idée :** écrire $G = A' \sqcup B' \sqcup C'$ de manière à ce que :
 - $\varphi(A') \subset (A' \sqcup B')$, donc $\varphi(A' \sqcup B') \subset \varphi(A')$ (car $\varphi = \varphi^{-1}$)
 - $\psi(A') \subset B'$, $\psi(B') \subset C'$, $\psi(C') \subset A'$

Idée générale

- Il est maintenant possible de distinguer les éléments de G .
- **Idée :** écrire $G = A' \sqcup B' \sqcup C'$ de manière à ce que :
 - $\varphi(A') \subset (A' \sqcup B')$, donc $\varphi(A' \sqcup B') \subset \varphi(A')$ (car $\varphi = \varphi^{-1}$)
 - $\psi(A') \subset B'$, $\psi(B') \subset C'$, $\psi(C') \subset A'$
- On procède par récurrence sur la longueur des éléments.

Construction des ensembles

Initialisation

Construction des ensembles

Initialisation

- On choisit $id \in A'$

Construction des ensembles

Initialisation

- On choisit $id \in A'$

Hérédité

Construction des ensembles

Initialisation

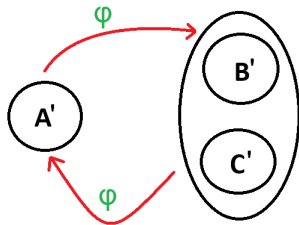
- On choisit $id \in A'$

Hérédité

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et v un élément de longueur p . On suppose les éléments de longueur $p - 1$ placés.

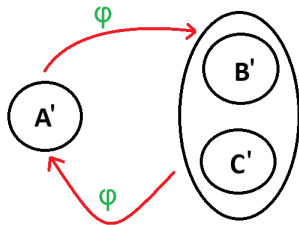
- v s'écrit sous forme réduite, on en note δ le premier élément (φ, ψ ou ψ^2)
- On a donc $v = \delta u$ avec u de longueur $p - 1$.

Construction des ensembles



Si $v = \varphi u$

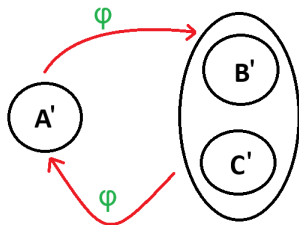
Construction des ensembles



Si $v = \varphi u$

■ Si $u \in A'$, alors $v \in B'$

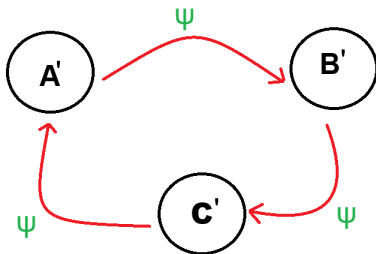
Construction des ensembles



Si $v = \varphi u$

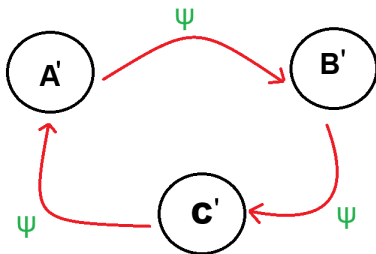
- Si $u \in A'$, alors $v \in B'$
- Si $u \in B'$ ou $u \in C'$
alors $v \in A'$

Construction des ensembles



Si $v = \psi u$

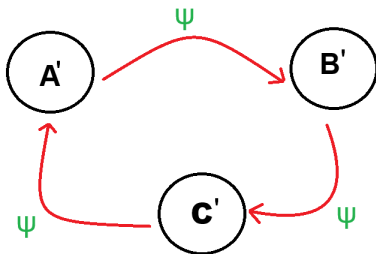
Construction des ensembles



Si $v = \psi u$

■ Si $u \in A'$, $v \in B'...$

Construction des ensembles

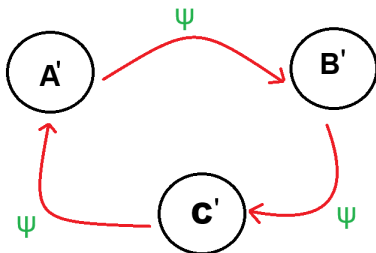


Si $v = \psi u$

■ Si $u \in A'$, $v \in B' \dots$

Si $v = \psi^2 u$

Construction des ensembles



Si $v = \psi u$

- Si $u \in A'$, $v \in B'...$

Si $v = \psi^2 u$

- Si $u \in A'$, $v \in C'...$

On construit ainsi A' , B' et C' .

$$G = A' \sqcup B' \sqcup C'$$

I. Introduction

II. Le théorème d'Hausdorff

1. Position du problème et objectifs de la section
2. Le groupe G
3. Partitionnement du groupe
4. Partitionnement de la sphère

III. Le théorème de Banach-Tarski

IV. Une conséquence du théorème

V. Annexes

l'ensemble D

- Soit S la sphère unité de $\mathbb{R}^3$

l'ensemble D

- Soit S la sphère unité de $\mathbb{R}^3$
- On considère D l'ensemble des points de percées des axes des rotations des éléments G (sans l'identité).

l'ensemble D

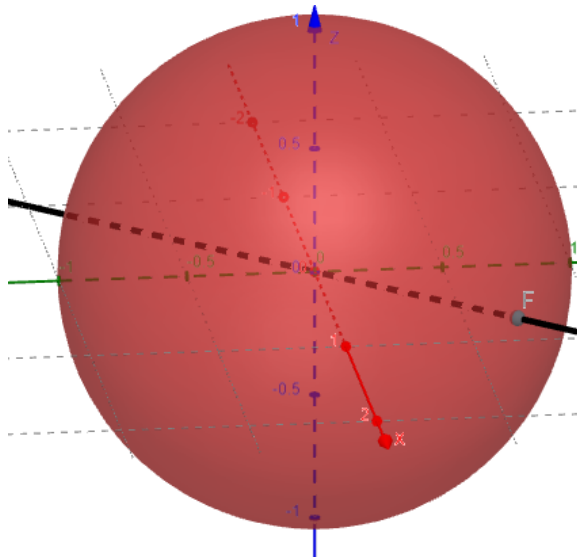
- Soit S la sphère unité de $\mathbb{R}^3$
- On considère D l'ensemble des points de percées des axes des rotations des éléments G (sans l'identité).
- D est l'ensemble des points fixes des rotations de G .

l'ensemble D

- Soit S la sphère unité de $\mathbb{R}^3$
- On considère D l'ensemble des points de percées des axes des rotations des éléments G (sans l'identité).
- D est l'ensemble des points fixes des rotations de G .
- **D est dénombrable car G l'est.**

- └ Le théorème d'Hausdorff
- └ Partitionnement de la sphère

Un exemple avec φ



- Pour $x \in S' = S \setminus D$ on note $I(x) = \{g(x)/g \in G\}$ l'orbite de x .

- Pour $x \in S' = S \setminus D$ on note $I(x) = \{g(x)/g \in G\}$ l'orbite de x .
- Les orbites forment une partition de S' car $(g, x) \rightarrow g(x)$ est une action de groupe.

- Pour $x \in S' = S \setminus D$ on note $I(x) = \{g(x)/g \in G\}$ l'orbite de x .
- Les orbites forment une partition de S' car $(g, x) \rightarrow g(x)$ est une action de groupe.
- Donc $S' = \bigsqcup_{x \in S'} I(x)$

- Pour $x \in S' = S \setminus D$ on note $I(x) = \{g(x)/g \in G\}$ l'orbite de x .
- Les orbites forment une partition de S' car $(g, x) \rightarrow g(x)$ est une action de groupe.
- Donc $S' = \bigsqcup_{x \in S'} I(x)$

Le nombre d'orbites est **non dénombrable** (cf. annexe).

L'axiome du choix

L'axiome du choix

On applique l'axiome à l'ensemble des orbites.

L'axiome du choix

On applique l'axiome à l'ensemble des orbites.

- Il existe une partie $X \in S'$ qui contient un **unique** élément de **chaque** orbite.

L'axiome du choix

On applique l'axiome à l'ensemble des orbites.

- Il existe une partie $X \in S'$ qui contient un **unique** élément de **chaque** orbite.
- Donc $S' = G(X) = \bigsqcup_{g \in G} g(X)$

L'axiome du choix

On applique l'axiome à l'ensemble des orbites.

- Il existe une partie $X \in S'$ qui contient un **unique** élément de **chaque** orbite.
- Donc $S' = G(X) = \bigsqcup_{g \in G} g(X)$
- Donc $S' = (\bigsqcup_{g \in A'} g(X)) \sqcup (\bigsqcup_{g \in B'} g(X)) \sqcup (\bigsqcup_{g \in C'} g(X))$

L'axiome du choix

On applique l'axiome à l'ensemble des orbites.

- Il existe une partie $X \in S'$ qui contient un **unique** élément de **chaque** orbite.
- Donc $S' = G(X) = \bigsqcup_{g \in G} g(X)$
- Donc $S' = (\bigsqcup_{g \in A'} g(X)) \sqcup (\bigsqcup_{g \in B'} g(X)) \sqcup (\bigsqcup_{g \in C'} g(X))$
- $S' = A \sqcup B \sqcup C$

Le théorème d'Hausdorff

$$\blacksquare S = S' \sqcup D = A \sqcup B \sqcup C \sqcup D$$

Le théorème d'Hausdorff

- $S = S' \sqcup D = A \sqcup B \sqcup C \sqcup D$
- On vérifie facilement que : $A \overset{G}{\equiv} B \sqcup C$ et que $A \overset{G}{\equiv} B \overset{G}{\equiv} C$ (découle des propriétés sur A' , B' et C')

Le théorème d'Hausdorff

- $S = S' \sqcup D = A \sqcup B \sqcup C \sqcup D$
- On vérifie facilement que : $A \overset{G}{\equiv} B \sqcup C$ et que $A \overset{G}{\equiv} B \overset{G}{\equiv} C$ (découle des propriétés sur A' , B' et C')

D'où le résultat :

Le théorème d'Hausdorff

- $S = S' \sqcup D = A \sqcup B \sqcup C \sqcup D$
- On vérifie facilement que : $A \stackrel{G}{\equiv} B \sqcup C$ et que $A \stackrel{G}{\equiv} B \stackrel{G}{\equiv} C$ (découle des propriétés sur A' , B' et C')

D'où le résultat :

Théorème d'Hausdorff

Soit S la sphère unité de $\mathbb{R}^3$, alors il existe G un groupe de rotation et une partition de S , $S = A \sqcup B \sqcup C \sqcup D$ tel que :

- D est dénombrable
- $A \stackrel{G}{\equiv} B \stackrel{G}{\equiv} C$
- $A \stackrel{G}{\equiv} B \sqcup C$

I. Introduction

II. Le théorème d'Hausdorff

III. Le théorème de Banach-Tarski

1. Un premier lemme
2. Un second lemme
3. Le théorème de Banach-Tarski
4. La version forte

IV. Une conséquence du théorème

V. Annexes

On note maintenant G le groupe de toutes les rotations.

On note maintenant G le groupe de toutes les rotations.

Lemme

- Soit S la sphère unité, $T \subset S$ un ensemble dénombrable.

On note maintenant G le groupe de toutes les rotations.

Lemme

- Soit S la sphère unité, $T \subset S$ un ensemble dénombrable.
- **Alors :** $S \stackrel{G}{\equiv} S \setminus T$

On note maintenant G le groupe de toutes les rotations.

Lemme

- Soit S la sphère unité, $T \subset S$ un ensemble dénombrable.
- **Alors :** $S \stackrel{G}{\equiv} S \setminus T$

On note maintenant G le groupe de toutes les rotations.

Lemme

- Soit S la sphère unité, $T \subset S$ un ensemble dénombrable.
- **Alors :** $S \stackrel{G}{\equiv} S \setminus T$

Démonstration en annexe

I. Introduction

II. Le théorème d'Hausdorff

III. Le théorème de Banach-Tarski

1. Un premier lemme
2. Un second lemme
3. Le théorème de Banach-Tarski
4. La version forte

IV. Une conséquence du théorème

V. Annexes

Lemme de Banach-Tarski

Soit S une sphère de rayon $r > 0$, alors $S \overset{G}{\equiv} S_1 \sqcup S_2$ avec S_1 et S_2 deux sphères de rayon r .

Lemme de Banach-Tarski

Soit S une sphère de rayon $r > 0$, alors $S \stackrel{G}{\equiv} S_1 \sqcup S_2$ avec S_1 et S_2 deux sphères de rayon r .

Démonstration

Lemme de Banach-Tarski

Soit S une sphère de rayon $r > 0$, alors $S \stackrel{G}{\equiv} S_1 \sqcup S_2$ avec S_1 et S_2 deux sphères de rayon r .

Démonstration

- D'après Hausdorff, $S = A \sqcup B \sqcup C \sqcup D$

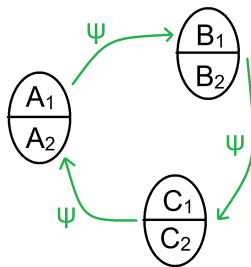
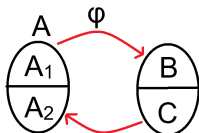
Lemme de Banach-Tarski

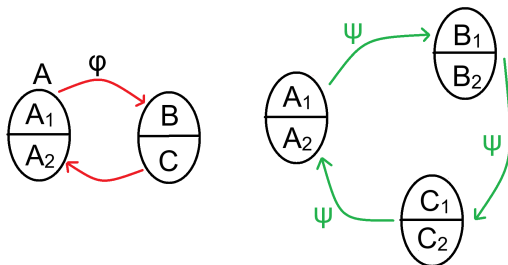
Soit S une sphère de rayon $r > 0$, alors $S \overset{G}{\equiv} S_1 \sqcup S_2$ avec S_1 et S_2 deux sphères de rayon r .

Démonstration

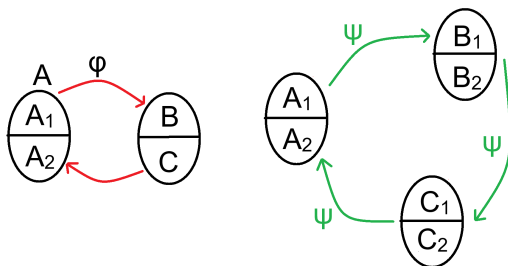
- D'après Hausdorff, $S = A \sqcup B \sqcup C \sqcup D$

On va partitionner A , B et C

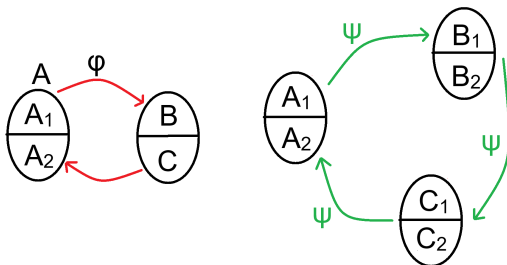




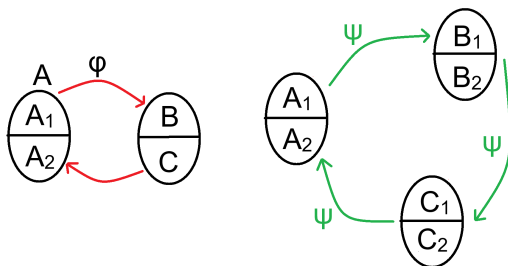
■ $S = A_1 \sqcup B_1 \sqcup C_1 \sqcup A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_2 \sqcup D$



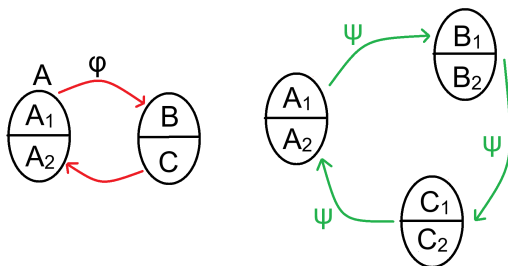
- $S = A_1 \sqcup B_1 \sqcup C_1 \sqcup A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_2 \sqcup D$
- On pose $S_1 = A_1 \sqcup B_1 \sqcup C_1$ et $S_2 = A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_2 \sqcup D$



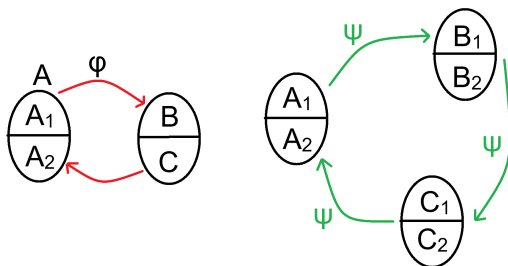
- $S = A_1 \sqcup B_1 \sqcup C_1 \sqcup A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_2 \sqcup D$
- On pose $S_1 = A_1 \sqcup B_1 \sqcup C_1$ et $S_2 = A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_2 \sqcup D$
- $A_1 \stackrel{G}{\equiv} B \stackrel{G}{\equiv} A$ donc : $A_1 \stackrel{G}{\equiv} A$



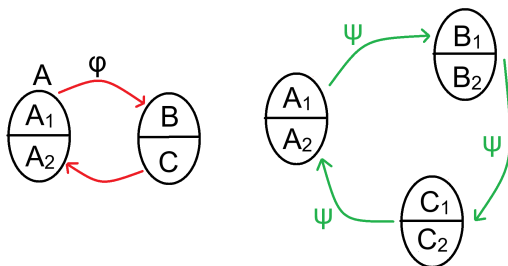
- $S = A_1 \sqcup B_1 \sqcup C_1 \sqcup A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_2 \sqcup D$
- On pose $S_1 = A_1 \sqcup B_1 \sqcup C_1$ et $S_2 = A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_2 \sqcup D$
- $A_1 \stackrel{G}{\equiv} B \stackrel{G}{\equiv} A$ donc : $A_1 \stackrel{G}{\equiv} A$
- De même : $A_2 \stackrel{G}{\equiv} A$, $B_1 \stackrel{G}{\equiv} B$, $B_2 \stackrel{G}{\equiv} B$, $C_1 \stackrel{G}{\equiv} C$ et $C_2 \stackrel{G}{\equiv} C$



- $S = A_1 \sqcup B_1 \sqcup C_1 \sqcup A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_2 \sqcup D$
- On pose $S_1 = A_1 \sqcup B_1 \sqcup C_1$ et $S_2 = A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_2 \sqcup D$
- $A_1 \stackrel{G}{\equiv} B \stackrel{G}{\equiv} A$ donc : $A_1 \stackrel{G}{\equiv} A$
- De même : $A_2 \stackrel{G}{\equiv} A$, $B_1 \stackrel{G}{\equiv} B$, $B_2 \stackrel{G}{\equiv} B$, $C_1 \stackrel{G}{\equiv} C$ et $C_2 \stackrel{G}{\equiv} C$
- Donc $S_1 \stackrel{G}{\equiv} S \setminus D$ et $S_2 \stackrel{G}{\equiv} S$



- $S = A_1 \sqcup B_1 \sqcup C_1 \sqcup A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_2 \sqcup D$
- On pose $S_1 = A_1 \sqcup B_1 \sqcup C_1$ et $S_2 = A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_2 \sqcup D$
- $A_1 \stackrel{G}{\equiv} B \stackrel{G}{\equiv} A$ donc : $A_1 \stackrel{G}{\equiv} A$
- De même : $A_2 \stackrel{G}{\equiv} A$, $B_1 \stackrel{G}{\equiv} B$, $B_2 \stackrel{G}{\equiv} B$, $C_1 \stackrel{G}{\equiv} C$ et $C_2 \stackrel{G}{\equiv} C$
- Donc $S_1 \stackrel{G}{\equiv} S \setminus D$ et $S_2 \stackrel{G}{\equiv} S$
- Avec le premier lemme : $S_1 \stackrel{G}{\equiv} S$ car D est dénombrable.



- $S = A_1 \sqcup B_1 \sqcup C_1 \sqcup A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_2 \sqcup D$
- On pose $S_1 = A_1 \sqcup B_1 \sqcup C_1$ et $S_2 = A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_2 \sqcup D$
- $A_1 \stackrel{G}{\equiv} B \stackrel{G}{\equiv} A$ donc : $A_1 \stackrel{G}{\equiv} A$
- De même : $A_2 \stackrel{G}{\equiv} A$, $B_1 \stackrel{G}{\equiv} B$, $B_2 \stackrel{G}{\equiv} B$, $C_1 \stackrel{G}{\equiv} C$ et $C_2 \stackrel{G}{\equiv} C$
- Donc $S_1 \stackrel{G}{\equiv} S \setminus D$ et $S_2 \stackrel{G}{\equiv} S$
- Avec le premier lemme : $S_1 \stackrel{G}{\equiv} S$ car D est dénombrable.
- Donc $S = S_1 \sqcup S_2$ avec $S_1 \stackrel{G}{\equiv} S$ et $S_2 \stackrel{G}{\equiv} S$. ■

I. Introduction

II. Le théorème d'Hausdorff

III. Le théorème de Banach-Tarski

1. Un premier lemme
2. Un second lemme
3. Le théorème de Banach-Tarski
4. La version forte

IV. Une conséquence du théorème

V. Annexes

Banach-Tarski : version faible

Théorème faible de Banach-Tarski

- Soit Σ une boule fermée de $\mathbb{R}^3$ de rayon $r > 0$.
- Alors Σ est G -équidissécable à deux boules fermées, disjointes, de rayon r .

Démonstration en annexe

I. Introduction

II. Le théorème d'Hausdorff

III. Le théorème de Banach-Tarski

1. Un premier lemme
2. Un second lemme
3. Le théorème de Banach-Tarski
4. La version forte

IV. Une conséquence du théorème

V. Annexes

On peut déduire de ce qui précède la version forte :

On peut déduire de ce qui précède la version forte :

Théorème de Banach-Tarski (version forte)

- Soit A, B deux parties bornées de $\mathbb{R}^3$, d'intérieur non vide.
- Alors, il existe D un groupe de déplacements de $\mathbb{R}^3$ tel que $A \stackrel{D}{\equiv} B$

I. Introduction

II. Le théorème d'Hausdorff

III. Le théorème de Banach-Tarski

IV. Une conséquence du théorème

1. Mesure universelle sur $\mathbb{R}^3$
2. Conclusion

V. Annexes

Définition d'une mesure de Banach

Définition

On dit que μ est une mesure de Banach sur E si :

- $\mu : E \rightarrow \mathbb{R}_+$
- μ non identiquement nulle
- $\mu(\bigsqcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$, Pour $\{A_1, \dots, A_n\} \subset E^n$
- μ est invariante par un déplacement de $\mathbb{R}^3$.

Définition d'une mesure de Banach

Définition

On dit que μ est une mesure de Banach sur E si :

- $\mu : E \rightarrow \mathbb{R}_+$
- μ non identiquement nulle
- $\mu(\bigsqcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$, Pour $\{A_1, \dots, A_n\} \subset E^n$
- μ est invariante par un déplacement de $\mathbb{R}^3$.

Corollaire de Banach-Tarski

Il n'existe pas de mesure de Banach sur l'ensemble des parties bornées de $\mathbb{R}^3$ (contrairement à $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$).

Définition d'une mesure de Banach

Définition

On dit que μ est une mesure de Banach sur E si :

- $\mu : E \rightarrow \mathbb{R}_+$
- μ non identiquement nulle
- $\mu(\bigsqcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$, Pour $\{A_1, \dots, A_n\} \subset E^n$
- μ est invariante par un déplacement de $\mathbb{R}^3$.

Corollaire de Banach-Tarski

Il n'existe pas de mesure de Banach sur l'ensemble des parties bornées de $\mathbb{R}^3$ (contrairement à $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$).

Démonstration

- On raisonne par l'absurde.

Démonstration

- On raisonne par l'absurde.
- Soit X une partie bornée de $\mathbb{R}^3$ de mesure non nulle (existe car μ n'est pas identiquement nulle).

Démonstration

- On raisonne par l'absurde.
- Soit X une partie bornée de $\mathbb{R}^3$ de mesure non nulle (existe car μ n'est pas identiquement nulle).
- Il existe alors une boule B tel que $X \subset B$. Donc $\mu(B) \neq 0$

Démonstration

- On raisonne par l'absurde.
- Soit X une partie bornée de $\mathbb{R}^3$ de mesure non nulle (existe car μ n'est pas identiquement nulle).
- Il existe alors une boule B tel que $X \subset B$. Donc $\mu(B) \neq 0$
- Or $B \stackrel{G}{\equiv} B_1 \sqcup B_2$ avec B_1, B_2 des boules de même rayon que B .

Démonstration

- On raisonne par l'absurde.
- Soit X une partie bornée de $\mathbb{R}^3$ de mesure non nulle (existe car μ n'est pas identiquement nulle).
- Il existe alors une boule B tel que $X \subset B$. Donc $\mu(B) \neq 0$
- Or $B \stackrel{G}{\equiv} B_1 \sqcup B_2$ avec B_1, B_2 des boules de même rayon que B .
- Donc $\mu(B) = \mu(B_1) + \mu(B_2) = 2\mu(B)$ donc $\mu(B) = 0$, c'est absurde. ■

I. Introduction

II. Le théorème d'Hausdorff

III. Le théorème de Banach-Tarski

IV. Une conséquence du théorème

1. Mesure universelle sur $\mathbb{R}^3$
2. Conclusion

V. Annexes

- Résultat extrêmement contre-intuitif.

- Résultat extrêmement contre-intuitif.
- Sort de l'ordinaire.

- Résultat extrêmement contre-intuitif.
- Sort de l'ordinaire.
- L'axiome du choix est nécessaire pour la démonstration.

- Résultat extrêmement contre-intuitif.
- Sort de l'ordinaire.
- L'axiome du choix est nécessaire pour la démonstration.
- Le théorème et ses corollaires ne sont pas démontrables sans ce dernier.

- Résultat extrêmement contre-intuitif.
- Sort de l'ordinaire.
- L'axiome du choix est nécessaire pour la démonstration.
- Le théorème et ses corollaires ne sont pas démontrables sans ce dernier.

- Résultat extrêmement contre-intuitif.
- Sort de l'ordinaire.
- L'axiome du choix est nécessaire pour la démonstration.
- Le théorème et ses corollaires ne sont pas démontrables sans ce dernier.

Merci de votre attention !

I. Introduction

II. Le théorème d'Hausdorff

III. Le théorème de Banach-Tarski

IV. Une conséquence du théorème

V. Annexes

1. Démonstration : La G -équidissétabilité est une relation d'équivalence
2. Démonstration : L'ensemble des orbites n'est pas dénombrable
3. Démonstration du premier lemme
4. Démonstration de Banach-Tarski (version faible)
5. Démonstration de la version forte

Soit G un groupe de déplacement de $\mathbb{R}^3$

Soit G un groupe de déplacement de $\mathbb{R}^3$

■ **Symétrie** Soit $A \in \mathbb{R}^3$

On a $id \in G$ et $A = id(A)$ donc $A \stackrel{G}{\equiv} A$.

Soit G un groupe de déplacement de $\mathbb{R}^3$

■ **Symétrie** Soit $A \in \mathbb{R}^3$

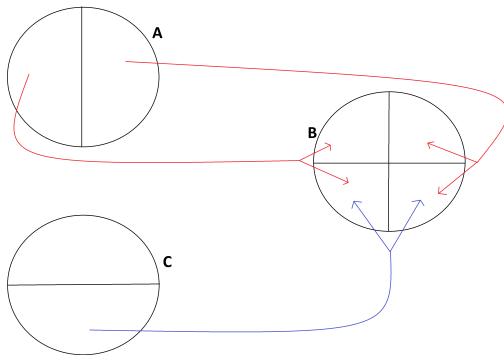
On a $id \in G$ et $A = id(A)$ donc $A \stackrel{G}{\equiv} A$.

■ **Reflexivité** On suppose $A \stackrel{G}{\equiv} B$

Les rotations sont bijectives, donc pour $A_i, B_i \in \mathbb{R}^3$, $u_i \in G$ si

$A_i = u_i(B_i)$ alors $B_i = u_i^{-1}(A_i)$, puis par union, $B \stackrel{G}{\equiv} A$

■ Transitivité



Démonstration formelle

Avec les notations de la définition :

- On suppose $A \stackrel{G}{\equiv} B$ et $B \stackrel{G}{\equiv} C$
- $B = \bigsqcup_{i=1}^n B_i$ et $B = \bigsqcup_{i=1}^n B'_i$
- On pose $K_{i,j} = B_i \cap B'_j$ Donc $B = \bigsqcup_{i=1}^n \bigsqcup_{j=1}^n K_{i,j}$
- On pose $A_{i,j} = \varphi_i^{-1}(K_{i,j})$ et $C_{i,j} = \psi_j^{-1}(K_{i,j})$
- Ainsi : $\psi_j^{-1} \circ \varphi_i(A_{i,j}) = C_{i,j}$
- Donc $A \stackrel{G}{\equiv} C$. ■

I. Introduction

II. Le théorème d'Hausdorff

III. Le théorème de Banach-Tarski

IV. Une conséquence du théorème

V. Annexes

1. Démonstration : La G -équidissécabilité est une relation d'équivalence
2. Démonstration : L'ensemble des orbites n'est pas dénombrable
3. Démonstration du premier lemme
4. Démonstration de Banach-Tarski (version faible)
5. Démonstration de la version forte

- $S' = S \setminus D$ et D est dénombrable.
- S n'étant pas dénombrable, S' ne l'est pas.
- Une orbite est dénombrable.
- S' étant partitionnée en orbites, si l'ensemble des orbites était dénombrable, S le serait.

L'ensemble des orbites est donc **non-dénombrable**.

I. Introduction

II. Le théorème d'Hausdorff

III. Le théorème de Banach-Tarski

IV. Une conséquence du théorème

V. Annexes

1. Démonstration : La G -équidissécabilité est une relation d'équivalence
2. Démonstration : L'ensemble des orbites n'est pas dénombrable
3. **Démonstration du premier lemme**
4. Démonstration de Banach-Tarski (version faible)
5. Démonstration de la version forte

- Soit Δ un axe ne passant par aucun point de T .

- Soit Δ un axe ne passant par aucun point de T .
- Il existe $\sigma \in G$ tel que les ensembles $(\sigma^n(T))_{n \in \mathbb{N}}$ soient disjoints deux à deux. En effet, l'ensemble des angles ne vérifiant pas cela est dénombrable, $[0, 2\pi]$ ne l'est pas.

- Soit Δ un axe ne passant par aucun point de T .
- Il existe $\sigma \in G$ tel que les ensembles $(\sigma^n(T))_{n \in \mathbb{N}}$ soient disjoints deux à deux. En effet, l'ensemble des angles ne vérifiant pas cela est dénombrable, $[0, 2\pi]$ ne l'est pas.
- On note $P \stackrel{\text{def}}{=} \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} (\sigma^n(T))$

- Soit Δ un axe ne passant par aucun point de T .
- Il existe $\sigma \in G$ tel que les ensembles $(\sigma^n(T))_{n \in \mathbb{N}}$ soient disjoints deux à deux. En effet, l'ensemble des angles ne vérifiant pas cela est dénombrable, $[0, 2\pi]$ ne l'est pas.
- On note $P \stackrel{\text{def}}{=} \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} (\sigma^n(T))$
- On pose $R = S \setminus P$ Donc :
$$S = R \sqcup P$$
$$S \setminus T = R \sqcup (P \setminus T)$$

- Soit Δ un axe ne passant par aucun point de T .
- Il existe $\sigma \in G$ tel que les ensembles $(\sigma^n(T))_{n \in \mathbb{N}}$ soient disjoints deux à deux. En effet, l'ensemble des angles ne vérifiant pas cela est dénombrable, $[0, 2\pi]$ ne l'est pas.
- On note $P \stackrel{\text{def}}{=} \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} (\sigma^n(T))$
- On pose $R = S \setminus P$ Donc :

$$S = R \sqcup P$$

$$S \setminus T = R \sqcup (P \setminus T)$$
- Or $\sigma(P) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} (\sigma^n(T))_{n \in \mathbb{N}} = P \setminus T$ Donc $P \stackrel{G}{\equiv} P \setminus T$

- Soit Δ un axe ne passant par aucun point de T .
- Il existe $\sigma \in G$ tel que les ensembles $(\sigma^n(T))_{n \in \mathbb{N}}$ soient disjoints deux à deux. En effet, l'ensemble des angles ne vérifiant pas cela est dénombrable, $[0, 2\pi]$ ne l'est pas.
- On note $P \stackrel{\text{def}}{=} \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} (\sigma^n(T))$
- On pose $R = S \setminus P$ Donc :

$$S = R \sqcup P$$

$$S \setminus T = R \sqcup (P \setminus T)$$
- Or $\sigma(P) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} (\sigma^n(T))_{n \in \mathbb{N}} = P \setminus T$ Donc $P \stackrel{G}{\equiv} P \setminus T$
- Il vient $S \stackrel{G}{\equiv} S \setminus T$. ■

I. Introduction

II. Le théorème d'Hausdorff

III. Le théorème de Banach-Tarski

IV. Une conséquence du théorème

V. Annexes

1. Démonstration : La G -équidissécabilité est une relation d'équivalence
2. Démonstration : L'ensemble des orbites n'est pas dénombrable
3. Démonstration du premier lemme
4. Démonstration de Banach-Tarski (version faible)
5. Démonstration de la version forte

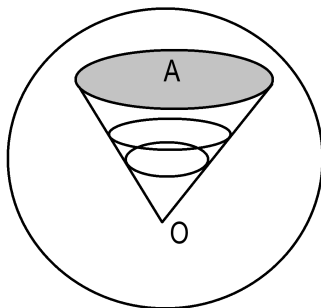
- Soit G le groupe des déplacements de $\mathbb{R}^3$.

- Soit G le groupe des déplacements de $\mathbb{R}^3$.
- On pose $\Sigma' = \Sigma \setminus \{0\}$ et S la sphère frontière de Σ .

- Soit G le groupe des déplacements de $\mathbb{R}^3$.
- On pose $\Sigma' = \Sigma \setminus \{0\}$ et S la sphère frontière de Σ .
- On décompose Σ' de manière similaire à la sphère.

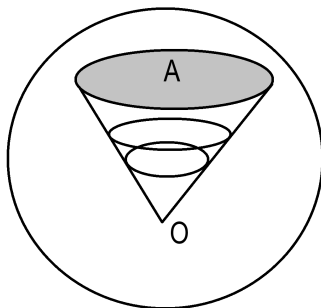
- Soit G le groupe des déplacements de $\mathbb{R}^3$.
- On pose $\Sigma' = \Sigma \setminus \{0\}$ et S la sphère frontière de Σ .
- On décompose Σ' de manière similaire à la sphère.

- Soit G le groupe des déplacements de $\mathbb{R}^3$.
- On pose $\Sigma' = \Sigma \setminus \{0\}$ et S la sphère frontière de Σ .
- On décompose Σ' de manière similaire à la sphère.



- Il vient : $\Sigma' \stackrel{G}{\cong} \Sigma_1 \sqcup \Sigma_2 \sqcup \{0\}$

- Soit G le groupe des déplacements de $\mathbb{R}^3$.
- On pose $\Sigma' = \Sigma \setminus \{0\}$ et S la sphère frontière de Σ .
- On décompose Σ' de manière similaire à la sphère.



- Il vient : $\Sigma' \stackrel{G}{\equiv} \Sigma_1 \sqcup \Sigma_2 \sqcup \{0\}$
- Il faut montrer que $\Sigma' \stackrel{G}{\equiv} \Sigma$

- Soit x un point de S .

- Soit x un point de S .
- Alors $\Sigma \setminus \{0\} \stackrel{G}{\equiv} \Sigma \setminus \{x\}$ Puis :

- Soit x un point de S .
- Alors $\Sigma \setminus \{0\} \stackrel{G}{\equiv} \Sigma \setminus \{x\}$ Puis :
- $\Sigma \setminus \{x\} = (\Sigma \setminus S) \sqcup (S \setminus \{x\}) \stackrel{G}{\equiv} (\Sigma \setminus S) \sqcup S \stackrel{G}{\equiv} \Sigma$

- Soit x un point de S .
- Alors $\Sigma \setminus \{0\} \stackrel{G}{\equiv} \Sigma \setminus \{x\}$ Puis :
- $\Sigma \setminus \{x\} = (\Sigma \setminus S) \sqcup (S \setminus \{x\}) \stackrel{G}{\equiv} (\Sigma \setminus S) \sqcup S \stackrel{G}{\equiv} \Sigma$
- Il vient $\Sigma \stackrel{G}{\equiv} \Sigma_1 \sqcup \Sigma_2$. ■

I. Introduction

II. Le théorème d'Hausdorff

III. Le théorème de Banach-Tarski

IV. Une conséquence du théorème

V. Annexes

1. Démonstration : La G -équidissécabilité est une relation d'équivalence
2. Démonstration : L'ensemble des orbites n'est pas dénombrable
3. Démonstration du premier lemme
4. Démonstration de Banach-Tarski (version faible)
5. Démonstration de la version forte

- Soit X , Y deux parties bornées d'intérieurs non vides.

- Soit X , Y deux parties bornées d'intérieurs non vides.
- Il existe deux boules de rayon $r > 0$, $\Sigma_x \subset X$ et $\Sigma_y \subset Y$.

- Soit X , Y deux parties bornées d'intérieurs non vides.
- Il existe deux boules de rayon $r > 0$, $\Sigma_x \subset X$ et $\Sigma_y \subset Y$.
- En recouvrant X de boules fermées (on a $\overline{X}$ compact), on montre que $\Sigma_x \stackrel{D}{\equiv} X$ puis que $\Sigma_y \stackrel{D}{\equiv} Y$ avec D le groupes des déplacements de $\mathbb{R}^3$.

- Soit X, Y deux parties bornées d'intérieurs non vides.
- Il existe deux boules de rayon $r > 0$, $\Sigma_x \subset X$ et $\Sigma_y \subset Y$.
- En recouvrant X de boules fermées (on a $\overline{X}$ compact), on montre que $\Sigma_x \stackrel{D}{\equiv} X$ puis que $\Sigma_y \stackrel{D}{\equiv} Y$ avec D le groupes des déplacements de $\mathbb{R}^3$.
- Comme $\Sigma_x \stackrel{D}{\equiv} \Sigma_y$, on obtient $X \stackrel{D}{\equiv} Y$. ■