

---

# Stratégies optimales en cyclisme lors d'une course de côte

---

Sébastien Laigret

Filière MP, année 2017

TIPE Tétraconcours

# Problématique

*Comment un cycliste peut-il, à partir de ses propres données physiologiques, moduler sa vitesse pour arriver le plus rapidement au sommet d'une montée dont le profil est connu à l'avance?*

- **Optimalité** : stratégie optimale.
- **Choix** : à décider par une équipe.
- **Contraintes** : des paramètres physiologiques et environnementaux.

## I) Position du problème et modélisation

1. Formalisation de la problématique et hypothèses de base.
2. Equation de mouvement mécanique : le cycliste est un solide
3. Equation de contrôle énergétique : le cycliste est un humain

## II) Examen de stratégies dans le cadre d'une course de côte

1. Modèle à puissance fixe ou l'éloge de la constance
2. Modèle intermédiaire ou ralentir pour aller plus vite
3. Modèle général : confirmation des variations de vitesse

## III) Conclusions

1. Limites du modèle et paramètres négligés
2. Prolongements éventuels de l'étude

# I) Position du problème et modélisation

## 1. Formalisation de la problématique et hypothèses de bases

- Un temps absolu minimal
- Il faut minimiser :

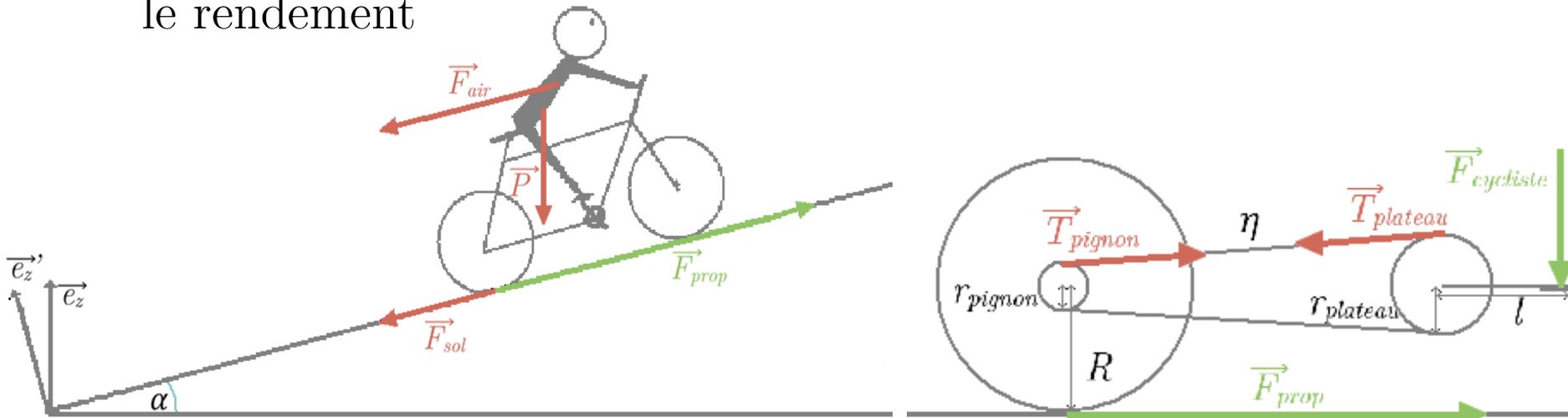
$$T(v) = \int_0^L \frac{1}{v(x)} dx$$

- Une équation fonctionnelle : la fonction vitesse est ici l'inconnue du problème
- Topographique  $(x, \alpha(x)) \rightarrow (x, v(x))$  Vitesse

# I) Position du problème et modélisation

## 2. Equation du mouvement mécanique : le cycliste est un solide (1/3)

- Poids :  $\vec{P} = -mg\vec{e}_z = -mg \sin \alpha \vec{e}'_z - mg \cos \alpha \vec{e}'_x$
- Résistance de friction :  $\vec{F}_{sol} = -\mu mg \cos \alpha \vec{e}'_x$
- Frottements visqueux:  $\vec{F}_{air} = -\frac{1}{2}\rho C_x S v^2 \vec{e}'_x$
- Propulsion :  $\vec{F}_{prop} = \frac{\eta l}{bR} F_{cycliste} \vec{e}'_x$  en se servant des équations de moment  $\eta T r_{pignon} = R F_{prop}$  et  $T r_{plateau} = F_{cycliste} l$  où  $b$  est le braquet,  $l$  la longueur de la manivelle,  $R$  le rayon des roues,  $\eta$  le rendement

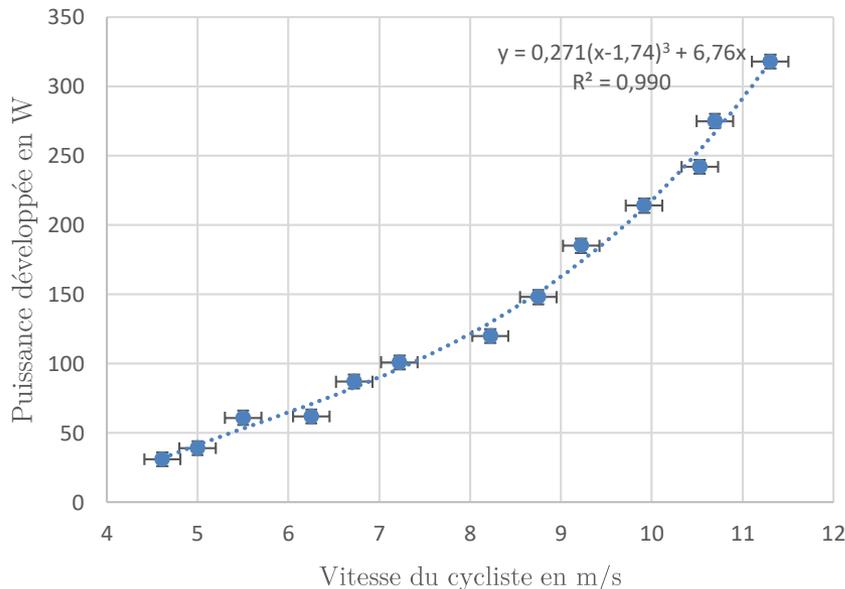


# I) Position du problème et modélisation

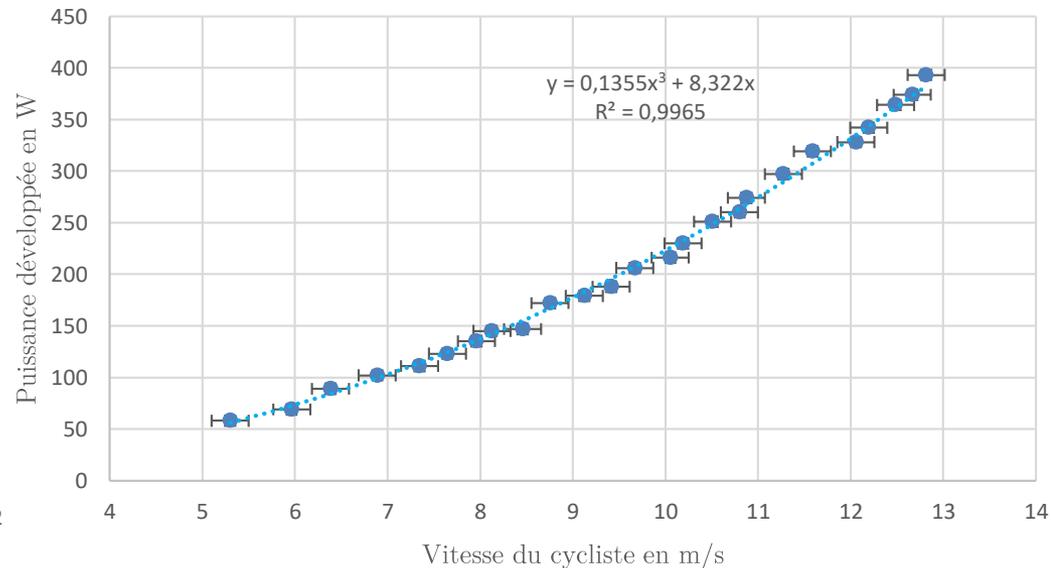
## 2. Equation du mouvement mécanique : le cycliste est un solide (2/3)

- Détermination expérimentale avec des capteurs des résistances à l'avancement avec la collaboration du club *PCO*
- Conforme au modèle :  $P = \mu mgv + \frac{1}{2} \rho C_x S v^3$
- Ce qui permet de trouver entre autres  $\mu \approx 0,005$  et  $SC_x \approx 0,4$

Evolution de la puissance fournie par le cycliste Jorg Muller en fonction de la vitesse



Evolution de la puissance fournie par le cycliste Francis Gillain en fonction de la vitesse



# I) Position du problème et modélisation

## 2. Equation du mouvement mécanique : le cycliste est un solide (3/3)

- Loi de la quantité de mouvements pour de petites pentes :

$$\frac{dv}{dt} = -g\alpha(x) - \mu g - \frac{1}{2} \frac{\rho C_x S}{m} v^2 + \frac{\eta l M}{b R m} f$$

- Ou, par rapport à la position :

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{g}{v} \alpha(x) - \frac{\mu g}{v} - \frac{1}{2} \frac{\rho C_x S}{m} v + \frac{\eta l M}{b R m} \frac{f}{v}$$

- Forces et dérivées de la force bornées :

$$f \leq f_{max} \quad \left| \frac{df}{dt} \right| < C$$

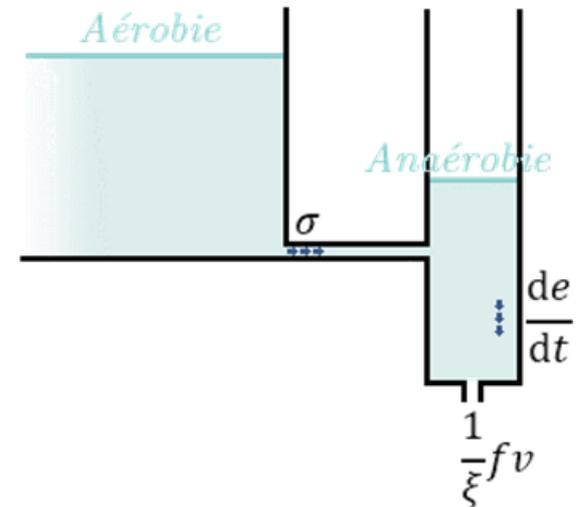
- $f_{max} = 5 \text{ N.kg}^{-1}$
- $C = 0,5 \text{ N.kg}^{-1}.\text{s}^{-1}$

# I) Position du problème et modélisation

## 3. Equation de contrôle énergétique : le cycliste est un humain (1/3)

- Energie aérobie infinie (respiration), variation temporelle  $\sigma$
- Energie anaérobie limitée, variation temporelle  $\frac{d(e_0 - e)}{dt} = -\frac{de}{dt}$
- Choix : énergie anaérobie nulle  $\Leftrightarrow$  épuisement (acide lactique)
- Puissance chimique effectivement utilisée pour l'effort  $\frac{1}{\xi} \frac{\eta l}{bR} f v$ , avec  $\xi$  de l'ordre de 25%
- Equation de conservation de l'énergie de Keller :

$$\frac{1}{\xi} \frac{\eta l}{bR} f v = \sigma - \frac{de}{dt}$$



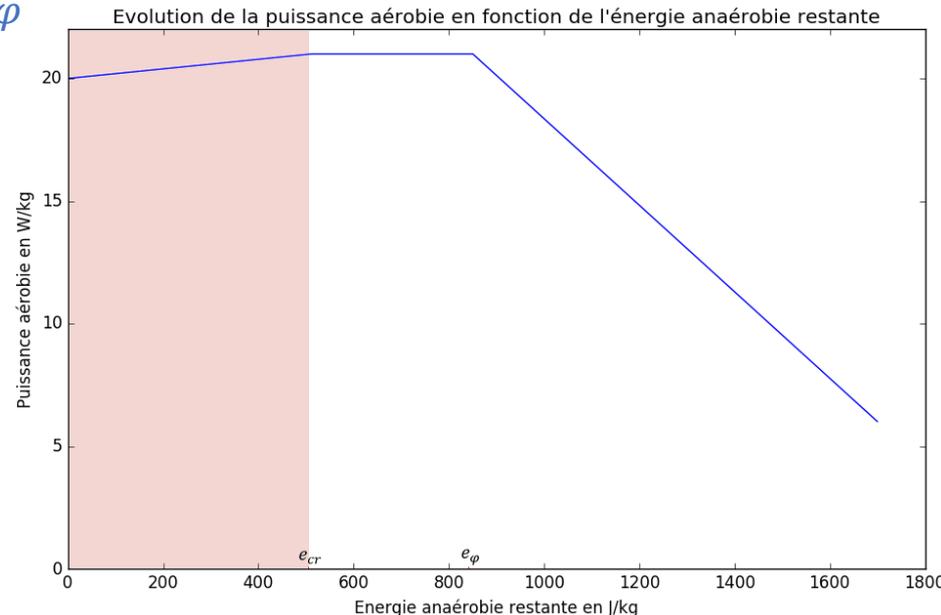
# I) Position du problème et modélisation

## 3. Equation de contrôle énergétique : le cycliste est un humain (2/3)

- En fait, débit aérobie non constant.
- Modèle de Sundstrøm : prend en compte la fatigue.

$$\sigma(e) = \begin{cases} \sigma_f + \frac{\bar{\sigma} - \sigma_f}{e_{cr}} e & \text{si } e < e_{cr} \\ \bar{\sigma} & \text{si } e_{cr} \leq e \leq e_{\varphi} \\ \sigma_r + \frac{\bar{\sigma} - \sigma_r}{e_0 - e_{\varphi}} (e_0 - e) & \text{si } e > e_{\varphi} \end{cases}$$

- $\sigma_r = 6 \text{ W/kg}$ ,
- $\bar{\sigma} = 21 \text{ W/kg}$ ,
- $\sigma_f = 20 \text{ W/kg}$ ,
- $e_{cr} = 0,3 \times e_0 = 510 \text{ J/kg}$ ,
- $e_{\varphi} = \varphi \times e_0 = 850 \text{ J/kg}$



# I) Position du problème et modélisation

## 3. Equation de contrôle énergétique : le cycliste est un humain (3/3)

- Idée d'Aftalion & Fiorini : ralentir permet de « récupérer de l'énergie », en fait de reformer du glucose qui devient une ressource disponible pour l'énergie anaérobie
- Problème : la pente varie
- Choix de modélisation :

$$\vartheta(v, x) = K \left( \left( \frac{dv}{dt} \right)^- \right)^2 \mathbb{1}_{\frac{d\alpha}{dx} \leq 0}$$

- $K = 4 \text{ s}^2$  selon Fiorini

# I) Position du problème et modélisation

- Bilan de la modélisation :

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -g \left( \mu + \alpha \left( \int_0^t v(s) ds \right) \right) - \frac{1}{2} \frac{\rho C_x S}{m} v^2 + \frac{\eta l M}{b R m} f \\ \frac{de}{dt} = \sigma(e) + \vartheta(v, x) - \frac{1}{\xi} \frac{\eta l}{b R} f v \\ e(t) > 0 \end{cases}$$

- $x(T) = L$
- $v(0) = v_0 = 10 \text{ m/s}$
- $e(0) = e_0 = 1657 \text{ J/kg}$
- Trois inconnues, deux équations, une condition :

$$T = \min_v \int_0^L \frac{1}{v(x)} dx$$

## II) Examen de stratégies en course de côte

### 1. Modèle à puissance constante ou l'éloge de la constance (1/4)

- Système du modèle :

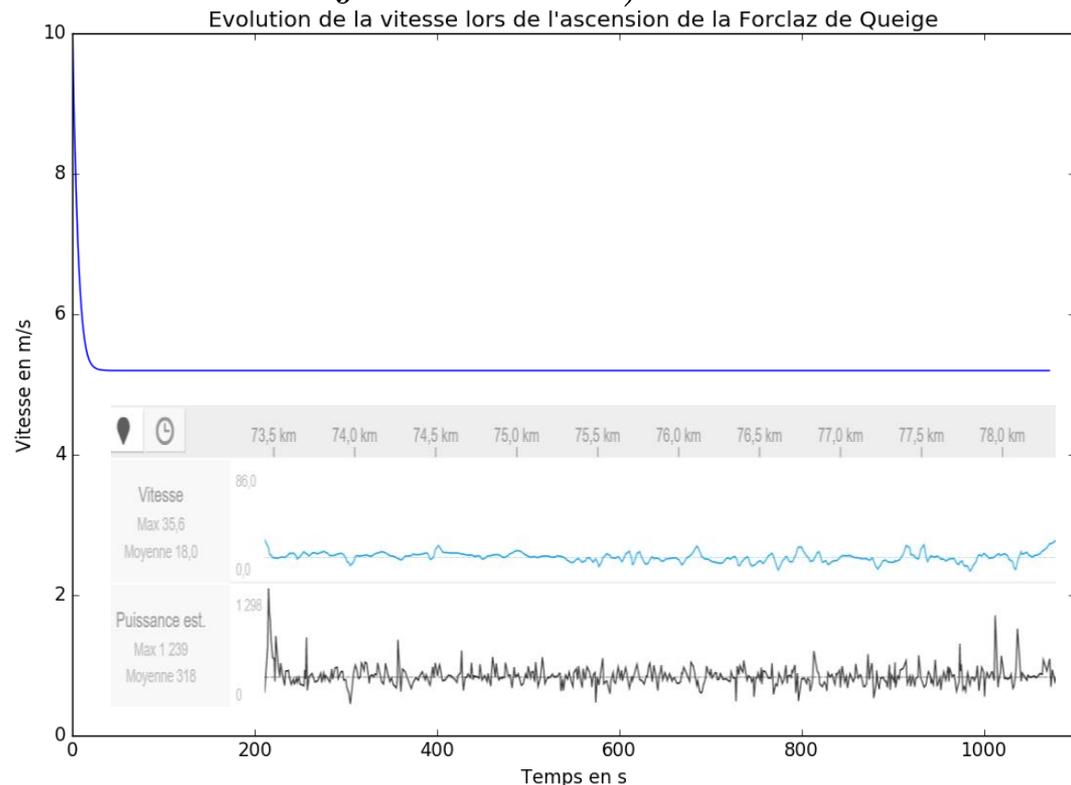
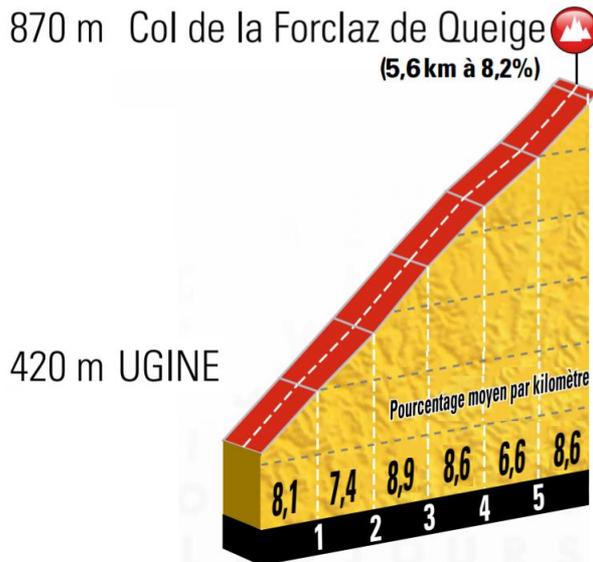
$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -(\alpha + \mu)g - \frac{1}{2} \frac{\rho C_x S}{m} v^2 + p \frac{M}{m} \frac{1}{v} \\ \frac{de}{dt} = \sigma - \frac{1}{\xi} p \end{cases}$$

- Seul paramètre d'optimisation : la puissance  $p$ .
- $M = 62$  kg,  $m = 70$  kg,  $e_0 = 1\,700$  J.kg<sup>-1</sup>,  $\sigma = 21$  W.kg<sup>-1</sup>.  
 $SC_x = 0,404$  m<sup>2</sup>,  $g = 9,81$  N.m<sup>-1</sup>,  $\mu = 0,005$ ,  $\rho = 1,22$  kg.m<sup>-3</sup>.
- Pas de temps fixé à 1 s
- Résolution sous *Python* en utilisant la méthode de Runge-Kutta pour chaque valeur de puissance

## II) Examen de stratégies en course de côte

### 1. Modèle à puissance constante ou l'éloge de la constance (2/4)

- Col de la Forclaz de Queige depuis UGINE (5,6 km à 8,2%)
- Performance simulée : 17'56" à 347 W et 18,7 km/h
- Performance record réelle : 17'16" à 318 W et 18,0 km/h (réalisée par Eduardo Sepulveda le 22 juillet 2016)
- Ecart en temps : 3,47%



## II) Examen de stratégies en course de côte

### 1. Modèle à puissance constante ou l'éloge de la constance (3/4)

- **Propriété :** La vitesse optimale à puissance constante tend vers une constante et l'écart entre la vitesse à tout instant et la valeur asymptotique est équivalente à une décroissance exponentielle

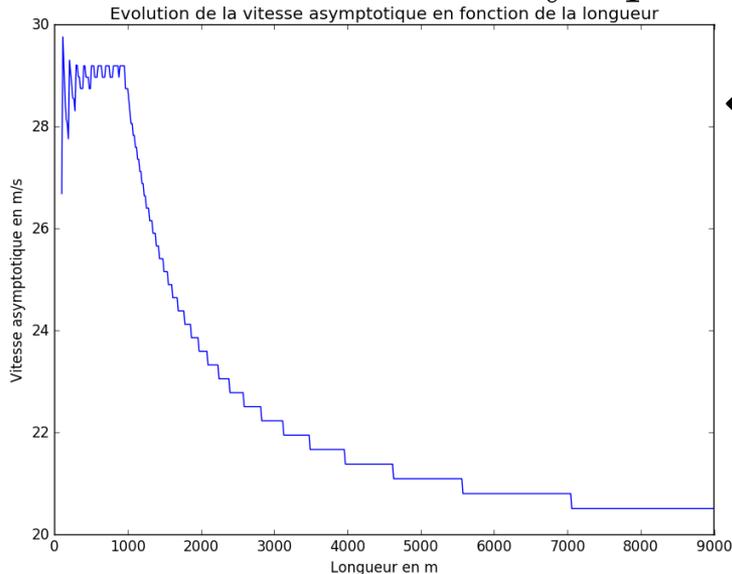
$$\frac{dv}{dt} = -(\alpha + \mu)g - \frac{1}{2} \frac{\rho C_x S}{m} v^2 + p \frac{M}{m} \frac{1}{v}$$
$$v_\infty = \left( \frac{Mp}{\rho C_x S} + \sqrt{\frac{\left(\frac{Mp}{\frac{1}{2}\rho C_x S}\right)^2}{4} + \frac{\left(\frac{(\alpha+\mu)mg}{\frac{1}{2}\rho C_x S}\right)^3}{27}} \right)^{\frac{1}{3}} + \left( \frac{Mp}{\rho C_x S} - \sqrt{\frac{\left(\frac{Mp}{\frac{1}{2}\rho C_x S}\right)^2}{4} + \frac{\left(\frac{(\alpha+\mu)mg}{\frac{1}{2}\rho C_x S}\right)^3}{27}} \right)^{\frac{1}{3}}$$
$$\tau = \frac{v_\infty}{\frac{\rho C_x S}{m} v_\infty^2 + \frac{pM}{v_\infty}} = \frac{3}{2} \frac{\rho C_x S}{m} v_\infty^2 + (\alpha + \mu)g \sim \frac{v_\infty}{\alpha g}$$
$$v(t) - v_\infty \sim K e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- Temps *quasi-caractéristique* de l'ordre de la dizaine de secondes

# II) Examen de stratégies en course de côte

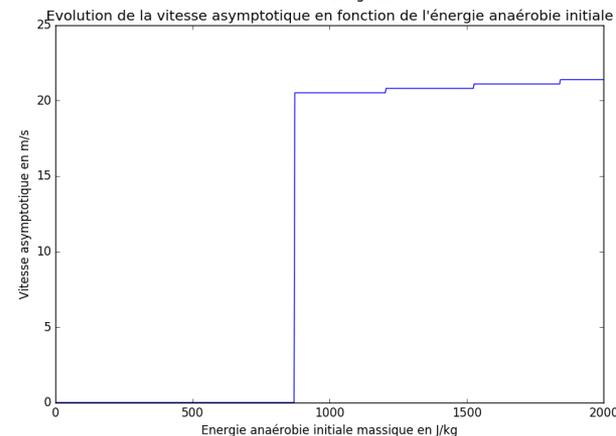
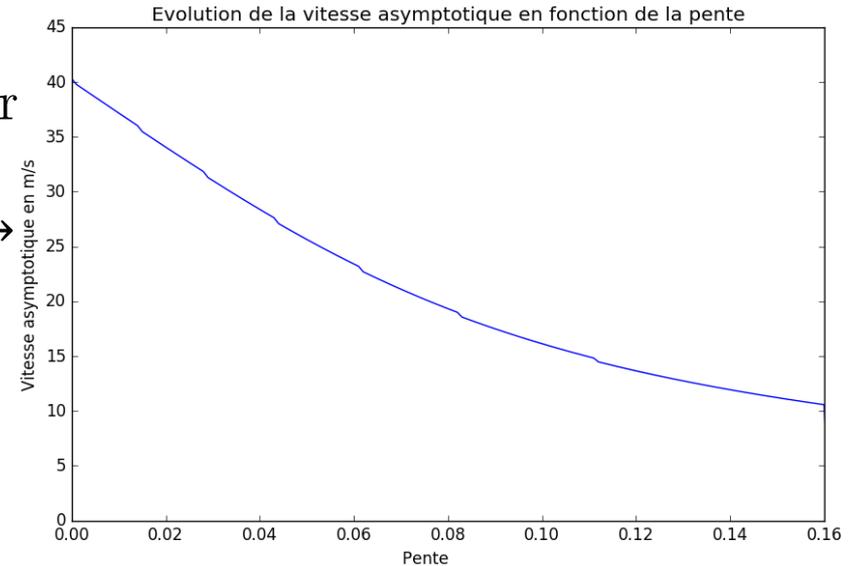
## 1. Modèle à puissance constante ou l'éloge de la constance (4/4)

- $L = 5000$  m,  $e_0 = 1700$  J/kg,  $\sigma = 21$  et  $\alpha = 7$  ‰. Evolutions de la vitesse asymptotique en fonction de...



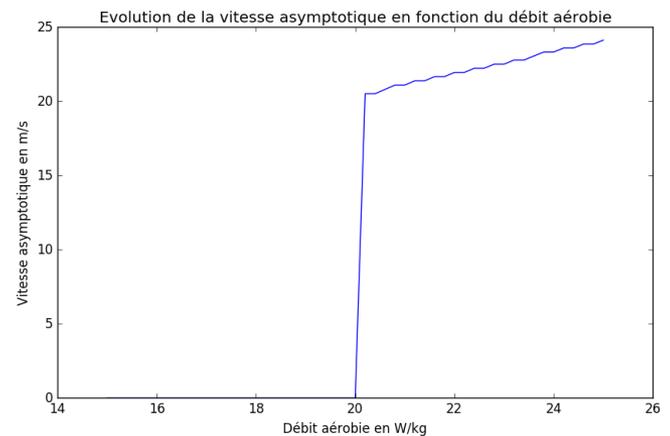
← la longueur

la pente →



← l'énergie anaérobie initiale

le débit aérobie →



## II) Examen de stratégies en course de côte

### 2. Modèle intermédiaire ou ralentir pour aller plus vite (1/3)

- Prise en compte de la recréation d'énergie
- Recherche d'une vitesse harmonique, sans terme de phase :

$$v(t) = \bar{v} + A \sin(\omega t)$$

- Force qui en découle :

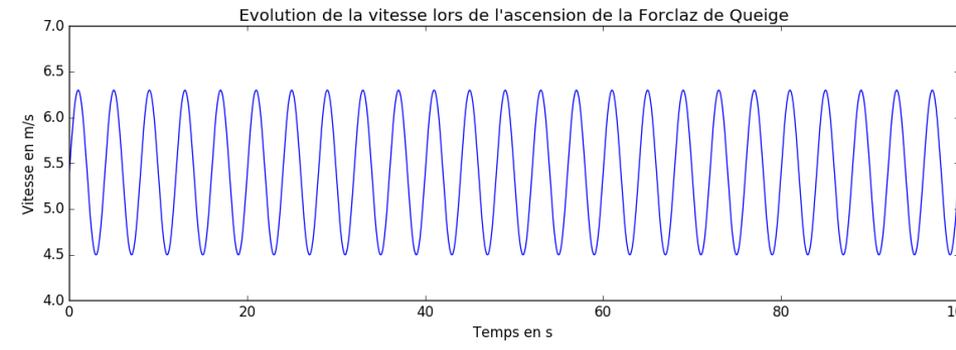
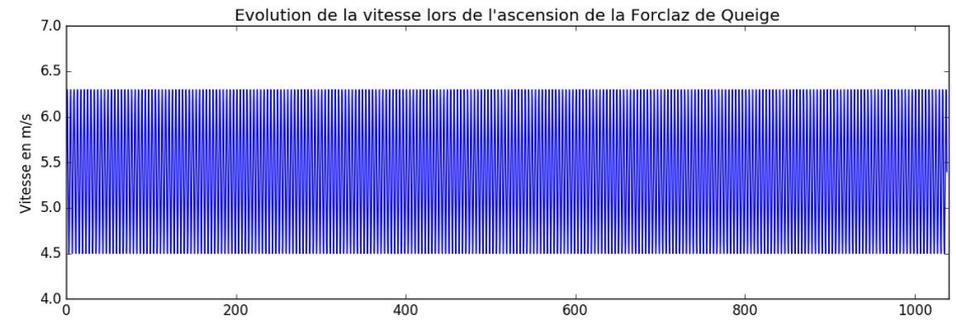
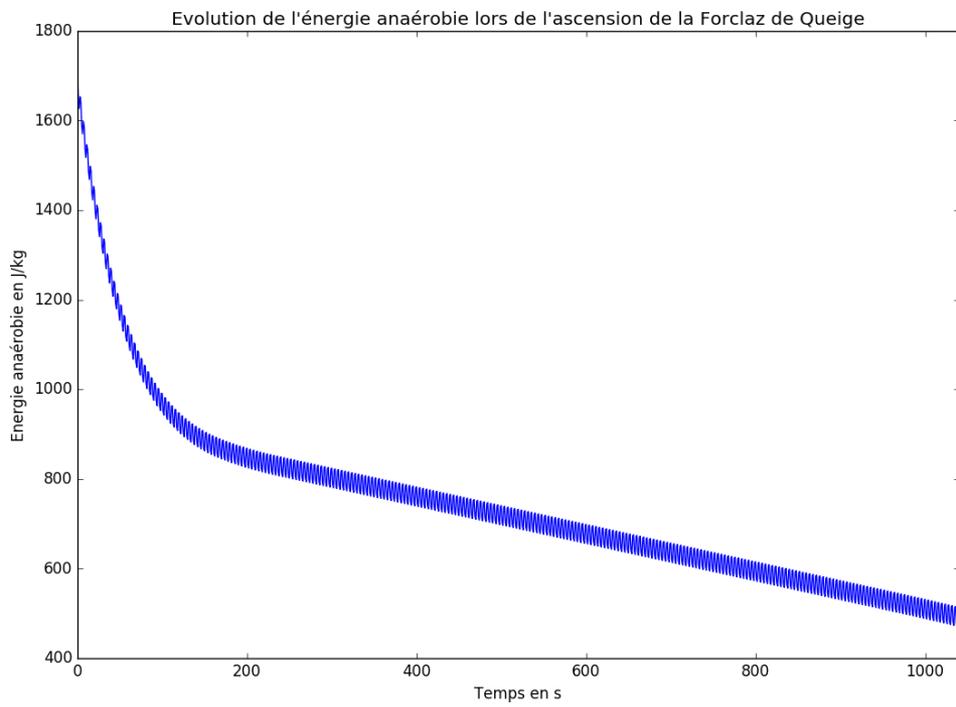
$$f(t) = \frac{bRm}{\eta l M} \left( A\omega \cos(\omega t) + g(\alpha + \mu) + \frac{1}{2} \frac{\rho C_x S}{m} (\bar{v} + A \sin(\omega t))^2 \right)$$

- Seule contrainte : l'équation de contrôle énergétique
- Trois paramètres à optimiser cette fois : la vitesse moyenne, la pulsation et l'amplitude
- Résolution sous *Python* avec Runge-Kutta et le calcul de l'intégrale avec la méthode de Simpson

# II) Examen de stratégies en course de côte

## 2. Modèle intermédiaire ou ralentir pour aller plus vite (2/3)

- Col de la Forclaz de Queige depuis Ugine (5,6 km à 8,2%)
- Résultats de l'algorithme :  $v(t) = 5,4 + 0,9 \sin\left(\frac{2\pi}{5} t\right)$
- Permet de terminer en 17'18'', modèle précédent en 17'56'' et Sepulveda en 17'16''



## II) Examen de stratégies en course de côte

### 2. Modèle intermédiaire ou ralentir pour aller plus vite (3/3)

- Gagner une quarantaine de secondes sur 5 kilomètres
- Une meilleure approche du temps et un comportement plus fidèle à la réalité
- Mais au prix d'une concentration éprouvante et difficilement quantifiable sur le plan énergétique
- Energie restante à la fin non nulle : justifie l'hypothèse de la phase à l'origine nulle

## II) Examen de stratégies en course de côte

### 3. Modèle général (1/4)

- Ecriture du système en position

$$\begin{cases} \frac{dv}{dx} = -\frac{g}{v(x)} \alpha(x) - \frac{\mu g}{v(x)} - \frac{\frac{1}{2} \rho C_x S}{m} v(x) + \frac{\eta l M}{b R m} \frac{f(x)}{v(x)} \\ \frac{de}{dx} = \frac{\sigma(e)}{v(x)} - \frac{1}{\xi} \frac{\eta l}{b R} f(x) + \frac{\vartheta(v, x)}{v(x)} \end{cases}$$

- Plus aucune hypothèse supplémentaire *a priori* : pente variable, capacité aérobie variable et recreation d'énergie sont prises en compte

## II) Examen de stratégies en course de côte

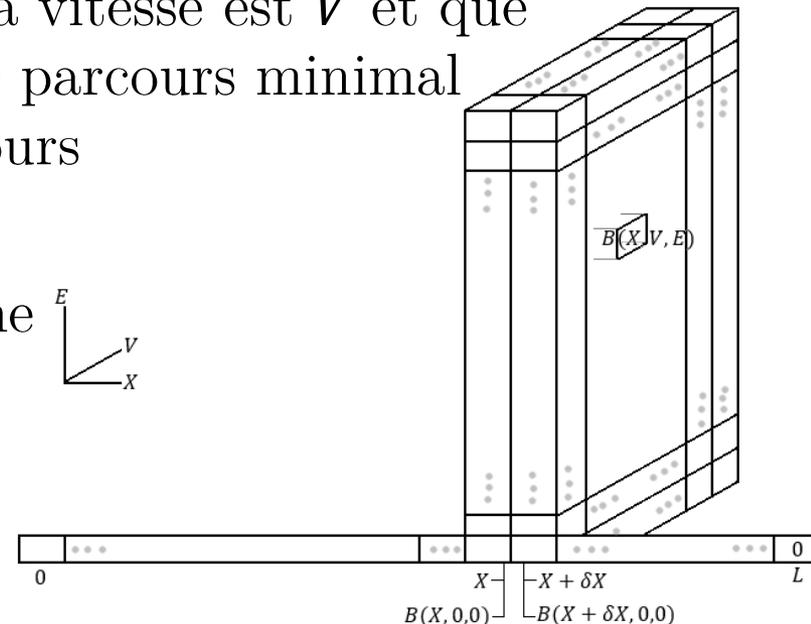
### 3. Modèle général (2/4)

- Programmation dynamique et fonction de Bellmann :

$$B(X, V, E) = \min_f \int_X^L \frac{1}{v(x)} dx$$

$$B(X, V, E) = \min_f \left[ B(X + \delta X, V + \delta V, E + \delta E) + \int_X^{X + \delta X} \frac{1}{v(x)} dx \right]$$

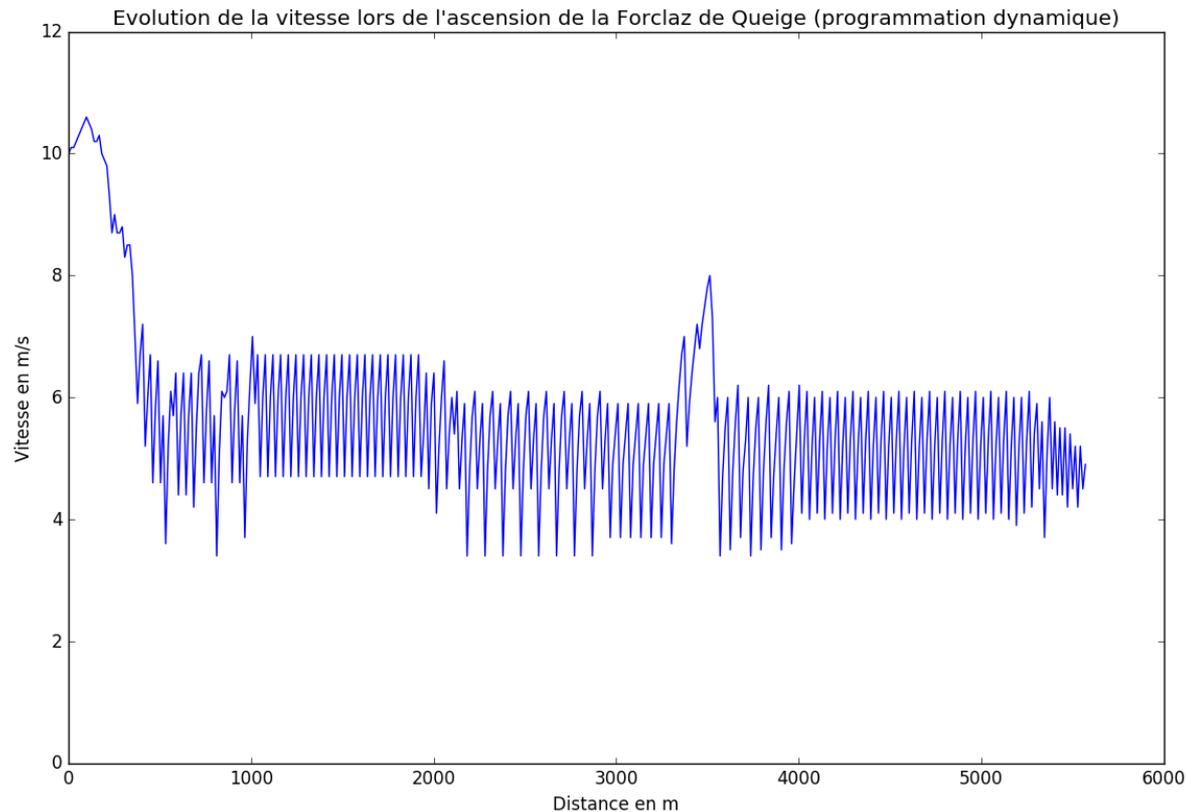
- Définit à l'abscisse  $X$ , sachant que la vitesse est  $V$  et que l'énergie en stock est  $E$ , le temps de parcours minimal qui reste pour rallier la fin du parcours
- Implique un maillage des grandeurs
- Complexité théorique de l'algorithme en  $\Theta(n^3)$



## II) Examen de stratégies en course de côte

### 3. Modèle général (3/4)

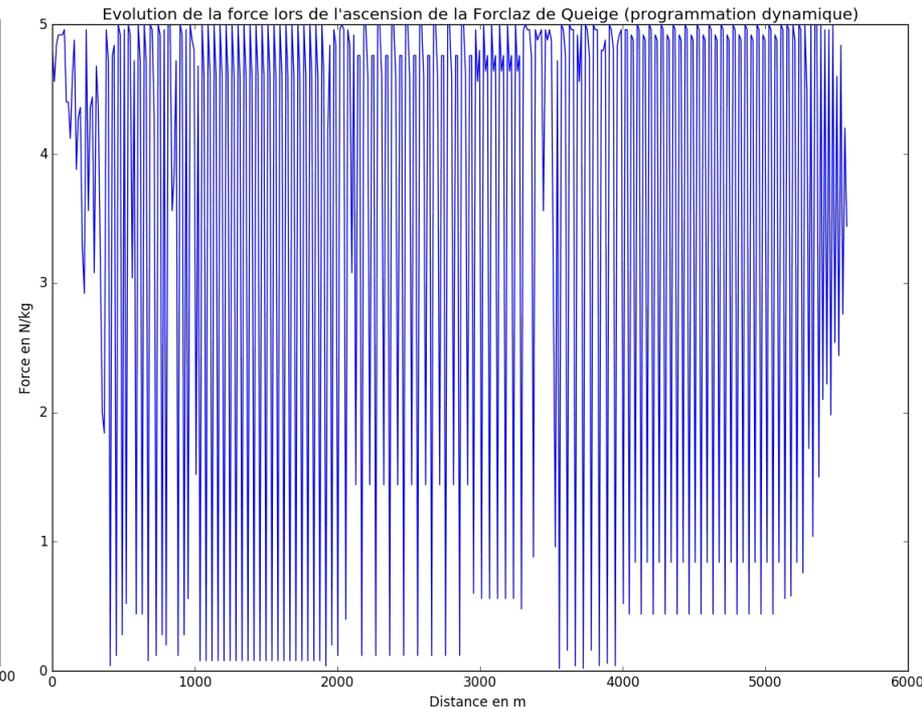
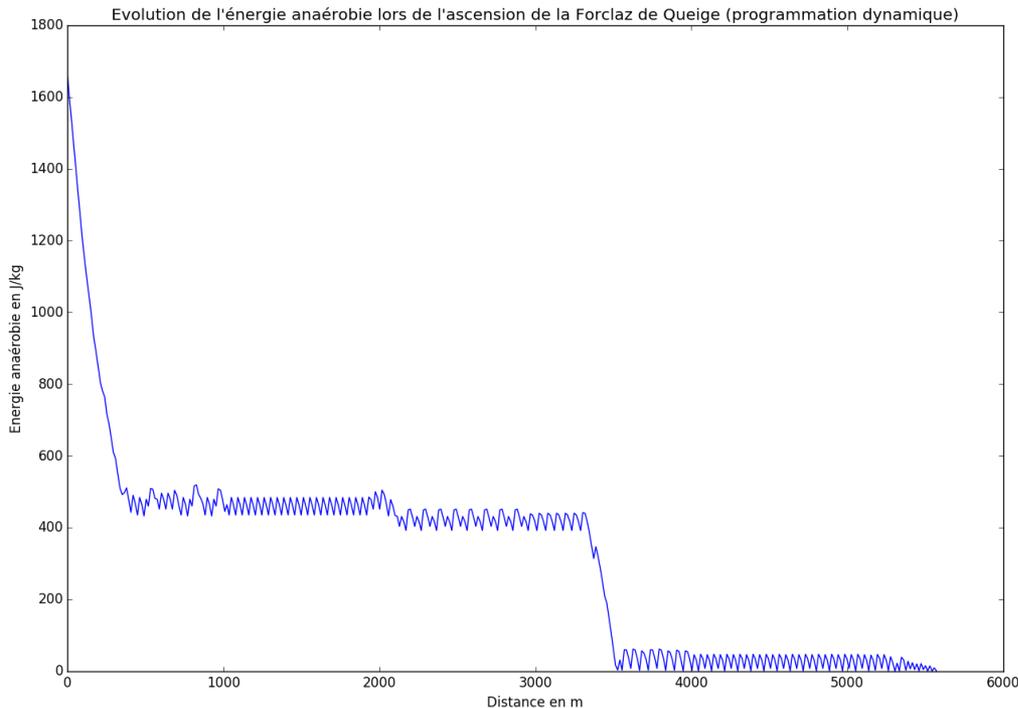
- Pour  $v_0 = 10$  m/s et  $e_0 = 1657$  J/kg, le temps optimal retourné est de 1012 s, soit **16'52''** à comparer avec les 17'16'' du professionnel



## II) Examen de stratégies en course de côte

### 3. Modèle général (4/4)

- Des oscillations à tous les niveaux
- En particulier, un régime transitoire anaérobie avant un retour en mode aérobie, cohérent avec la physiologie du sport pour un effort d'endurance



# III) Conclusions

## 1. Limites du modèle et paramètres négligés

- Inertie de la roue négligeable
- Braquet constant
- Effets d'altitude : vent, masse volumique constante
- Modèle de l'atmosphère isotherme :

$$F_{air} = \rho_0 e^{-\frac{Mg}{RT}z} C_x S v^2 \text{ avec } \frac{RT}{Mg} \approx 8 \text{ km}$$

- Déshydratation : variation de masse, surchauffe et dérive cardiaque
- Position du cycliste constante : pas de variation de  $S$
- Modèle 2D : les virages ne sont pas pris en compte
- Pas de dopage, ni chimique, ni mécanique !

## III) Conclusions

### 2. Prolongements de l'étude.

- Compétition entre deux coureurs : l'interaction entre les deux est modélisée par une vitesse d'aspiration de l'un sur l'autre
- Application mobile d'entraînement (sport connecté)
- Implémentation sur vélo à assistance électrique

## III) Conclusions

- *Objectif* : proposer des stratégies optimales pour qu'un cycliste puisse aller le plus rapidement possible sur une ascension
- *Théorie* : deux équations, fondées sur la loi de la quantité de mouvement et la conservation de l'énergie
- *Démarche* : formuler quelques hypothèses supplémentaires pour obtenir des courbes de réponse en vitesse
- *Résultats* : on retrouve à l'aide de simulations numériques des constats empiriques sur la physiologie de l'effort

*La tendance générale est qu'il faut accepter d'aller moins vite localement pour aller plus vite globalement.*