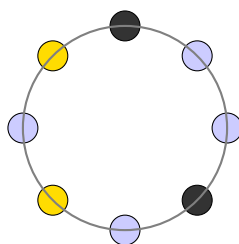

Théorème de Pólya et combinatoire

Dénombrement de coloriage sous l'action d'un groupe



MARZOUKI Mohamed Maamoun

Table des matières

1	Introduction et problème	1
2	Le cadre : coloriage et types	1
3	Une première méthode : la formule de Burnside	2
3.1	Le collier à onze perles	2
4	Le polynôme générateur et le théorème de Pólya	3
4.1	Le polynôme générateur	3
4.2	Calcul de P : l'indicateur des cycles	3
4.3	La formule de Burnside pondérée	3
4.4	Le théorème de Pólya	4
4.5	Application : le collier à vingt-trois perles par le polynôme	5
5	Application : motifs périodiques à symétrie carrée	5
5.1	Cadre et structure en cycles	5
5.2	Dénombrement et polynôme générateur	6
5.3	Complexité algorithmique	6
5.4	Bilan	7
	Conclusion	8

1 Introduction et problème

Comment compter les façons distinctes de colorier un collier de perles, sachant que deux configurations déduites l'une de l'autre par rotation ou réflexion sont identiques ? Ce problème anodin cache une difficulté combinatoire fondamentale : l'*équivalence sous l'action d'un groupe de symétries*. Énumérer puis regrouper à la main est vite hors de portée. Le **théorème de Pólya** (1937), conçu pour dénombrer les isomères chimiques, y répond de façon systématique *et efficace*, via la *formule de Burnside* et quelques outils de *théorie des groupes*. Nos démonstrations en donnent une lecture *algébrique* : un **polynôme générateur** P et un **indicateur des cycles** Q , reliés par les *polynômes de Newton*.

Problème 1. Combien y a-t-il de colliers distincts à 23 perles dont deux noires, sept bleues, deux jaunes et douze blanches, (i) *fixes* (perles numérotées) ? (ii) *mobiles* (à rotation et réflexion près) ?

Le cas *fixe* est immédiat : c'est le coefficient multinomial $\binom{23}{2} \binom{21}{7} \binom{14}{2} = \frac{23!}{2!7!2!12!} \approx 2,68 \times 10^9$. Mais un collier réel peut **tourner** et se **retourner** : deux numérotations symétriques donnent le *même* collier. Le cas *mobile* revient donc à compter les *coloriages modulo l'action d'un groupe* — ici le groupe diédral D_{23} (ordre 46) — ce que résout le théorème de Pólya.

2 Le cadre : coloriage et types

Soit X un ensemble fini de cardinal n sur lequel agit un groupe fini G . On fixe $K = \llbracket 1; k \rrbracket$ (k couleurs) et $\mathcal{C} = K^X$, l'ensemble des **coloriages** $f : X \rightarrow K$; sans symétrie, $|\mathcal{C}| = k^n$.

L'action de G sur X induit une action sur $\mathcal{C}$ par $(g \cdot f)(x) = f(g^{-1} \cdot x)$, et compter les coloriage à symétrie près, c'est compter les orbites $\mathcal{C}/G$.

Définition 2.1 (Type). Le **type** d'un coloriage f est le k -uplet $\xi = (n_1, \dots, n_k)$ où $n_i = |f^{-1}(\{i\})|$ est le nombre d'éléments de couleur i .

La bijection $x \mapsto g \cdot x$ envoie $f^{-1}(\{i\})$ sur $(g \cdot f)^{-1}(\{i\})$: deux coloriage d'une même orbite ont le même type. Pour ξ fixé, $R_\xi \subset \mathcal{C}$ désigne les coloriage de type ξ ; G préserve le type, donc R_ξ est G -stable, et $F_\xi = R_\xi/G$ est l'ensemble des **classes d'équivalence** de type ξ . Pour $\sigma \in G$, on pose enfin

$$R_\xi(\sigma) = \{f \in R_\xi \mid \sigma \cdot f = f\}.$$

L'objectif est de calculer $|F_\xi|$. Deux méthodes : une *résolution directe* par la formule de Burnside (§3), puis l'*outil unificateur* du polynôme générateur et du théorème de Pólya (§4).

3 Une première méthode : la formule de Burnside

La formule de Burnside ramène le comptage des orbites au comptage, bien plus simple, des points fixes de chaque élément du groupe.

Lemme 3.1 (Formule de Burnside). Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini Y . Le nombre d'orbites est

$$|Y/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} |\text{Fix}(\sigma)|, \quad \text{Fix}(\sigma) = \{y \in Y \mid \sigma \cdot y = y\}.$$

(C'est le cas particulier $\bar{\varphi} \equiv 1$ du Lemme 4.3, démontré en §4.) Appliquée à l'action de G sur R_ξ , elle donne directement

$$|F_\xi| = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} |R_\xi(\sigma)| \quad (1)$$

Il suffit donc, pour chaque $\sigma \in G$, de dénombrer les coloriage de type ξ fixés par σ . Un coloriage est fixé par σ si et seulement s'il est *constant sur chaque cycle de σ* : choisir un tel coloriage revient à attribuer une couleur à chaque cycle, en respectant le type voulu.

3.1 Le collier à onze perles

Le groupe diédral D_{11} a 22 éléments. Le type cherché est $\xi = (2, 3, 6)$ (deux perles noires, trois bleues, six blanches).

- L'**identité** fixe les $\binom{11}{2} \binom{9}{3} \binom{6}{6} = \binom{11}{2} \binom{9}{3}$ coloriage de type ξ .
- Les **10 rotations** non triviales : 11 étant premier, chacune est un unique 11-cycle. Un coloriage fixé serait monochrome, ce qui exclut le type ξ . Aucune ne convient.
- Les **11 réflexions** : chaque axe traverse une perle (point fixe) et apparie les 10 autres en 5 paires (2-cycles). Un coloriage fixé est constant sur chaque paire ; les couleurs en nombre pair se répartissent en paires, et la *seule* couleur en nombre impair (le bleu, 3 perles) occupe la perle centrale, les 2 bleues restantes formant 1 paire. On a alors $\binom{5}{1}$ paires noires, $\binom{4}{1}$ paire bleue et $\binom{3}{3}$ paires blanches, soit $|R_\xi(\sigma)| = \binom{5}{1} \binom{4}{1} \binom{3}{3} = 20$ par réflexion.

D'après (1) :

$$|F_\xi| = \frac{1}{22} \left(\binom{11}{2} \binom{9}{3} + 11 \cdot 20 \right) = \frac{1}{22} (55 \cdot 84 + 220) = \frac{4620 + 220}{22} = \mathbf{220}.$$

Efficacité. L'intérêt est décisif. Une énumération naïve parcourrait les $\binom{11}{2,3,6} = 4620$ arrangements (et bien davantage pour de grands colliers) ; la formule (1) ne demande qu'une somme sur les $|G|$ éléments du groupe — mieux, sur ses *classes de conjugaison*, qui partagent la même structure en cycles. On passe d'un coût exponentiel en n à un coût essentiellement linéaire en $|G|$. Reste une limite : la méthode recommence pour *chaque* type. La section suivante encode *tous* les types d'un coup.

4 Le polynôme générateur et le théorème de Pólya

4.1 Le polynôme générateur

À chaque coloriage f de type $(n_1, \dots, n_k)$, associons le **monôme** (ou poids)

$$w(f) = \prod_{i=1}^k X_i^{n_i} \in \mathbb{Q}[X_1, \dots, X_k].$$

Comme deux coloriages de la même orbite ont même type, w est invariant par G et passe au quotient en $\bar{w} : \mathcal{C}/G \rightarrow \mathbb{Q}[X_1, \dots, X_k]$.

Définition 4.1 (Polynôme générateur). Le **polynôme générateur** des coloriages G -invariants de X par K est

$$P = \sum_{\bar{f} \in \mathcal{C}/G} \bar{w}(\bar{f}) \in \mathbb{Q}[X_1, \dots, X_k].$$

Par construction, le coefficient de $X_1^{n_1} \dots X_k^{n_k}$ dans P vaut $|F_\xi|$ pour $\xi = (n_1, \dots, n_k)$, et $P(1, \dots, 1) = |\mathcal{C}/G|$. Connaître P , c'est résoudre *tous* les problèmes de type à la fois.

4.2 Calcul de P : l'indicateur des cycles

Pour calculer P , on l'exprime à l'aide d'un objet attaché à l'action de G directement sur X .

Définition 4.2 (Indicateur des cycles). Pour $g \in G$, soit $m_j(g)$ le nombre de cycles de longueur j de la permutation g de X . Le **polynôme indicateur des cycles** est

$$Q = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \prod_{j=1}^n Z_j^{m_j(g)} \in \mathbb{Q}[Z_1, \dots, Z_n].$$

En regroupant les éléments d'une même classe de conjugaison (qui ont la même structure en cycles), le calcul de Q se réduit à parcourir les classes de conjugaison de G .

4.3 La formule de Burnside pondérée

Lemme 4.3 (Burnside pondérée). *Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini Y , $\pi : Y \rightarrow Y/G$ la projection canonique, V un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel, $\bar{\varphi} : Y/G \rightarrow V$ une application et $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$. Alors*

$$\sum_{\bar{y} \in Y/G} \bar{\varphi}(\bar{y}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{y \in \text{Fix}(g)} \varphi(y),$$

où $\text{Fix}(g) = \{y \in Y \mid g \cdot y = y\}$.

Démonstration. On calcule de deux manières $e = \sum_{(g,y) \in R} \varphi(y)$, où $R = \{(g,y) \in G \times Y \mid g \cdot y = y\}$.

Sommation sur Y . En notant $\text{Stab}(y)$ le stabilisateur de y ,

$$e = \sum_{y \in Y} |\text{Stab}(y)| \varphi(y).$$

Sur une orbite $\mathcal{O}_y$, φ vaut constamment $\bar{\varphi}(\mathcal{O}_y)$ et $|\text{Stab}(y)| = |G| / |\mathcal{O}_y|$ (théorème orbite–stabilisateur). D'où

$$e = \sum_{\mathcal{O}_y \in Y/G} |\mathcal{O}_y| \cdot \frac{|G|}{|\mathcal{O}_y|} \bar{\varphi}(\mathcal{O}_y) = |G| \sum_{\mathcal{O}_y \in Y/G} \bar{\varphi}(\mathcal{O}_y).$$

Sommation sur G . Directement, $e = \sum_{g \in G} \sum_{y \in \text{Fix}(g)} \varphi(y)$. En égalant et en divisant par $|G|$,

on conclut. $\square$

Remarque. Avec $V = \mathbb{Q}$ et $\bar{\varphi} \equiv 1$, on retrouve la formule de Burnside classique du Lemme 3.1, utilisée en §3.

4.4 Le théorème de Pólya

Pour $s \geq 1$, on pose $p_s = X_1^s + \dots + X_k^s$ (sommes de Newton), et $p_0 = 1$.

Théorème 4.4 (Pólya, 1937). *Le polynôme générateur P (Déf. 4.1) et l'indicateur des cycles Q (Déf. 4.2) sont reliés par*

$$\boxed{P = Q(p_1, \dots, p_n)} \quad \text{soit} \quad P = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \prod_{j=1}^n (X_1^j + \dots + X_k^j)^{m_j(g)}.$$

Démonstration. On applique le Lemme 4.3 à $Y = \mathcal{C}$ avec $\bar{\varphi} = \bar{w}$:

$$P = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{f \in \text{Fix}(g)} w(f).$$

Un coloriage f est fixé par g ($f(g^{-1} \cdot x) = f(x)$) si et seulement s'il est *constant sur chaque orbite de $\langle g \rangle$ sur X* . En décomposant $X = \bigsqcup_{s=1}^t X^{(s)}$ en orbites de cardinaux n_s , l'application $f \mapsto (f(x^{(s)}))_s$ est une bijection $\text{Fix}(g) \rightarrow K^t$, et $w(f) = \prod_s X_{f(x^{(s)})}^{n_s}$. Donc

$$\sum_{f \in \text{Fix}(g)} w(f) = \prod_{s=1}^t \left(\sum_{i=1}^k X_i^{n_s} \right) = \prod_{s=1}^t p_{n_s} = \prod_{j=1}^n p_j^{m_j(g)}.$$

En reportant, $P = \frac{1}{|G|} \sum_g \prod_j p_j^{m_j(g)} = Q(p_1, \dots, p_n)$. $\square$

Corollaire 4.5 (Nombre total de coloriages). *Le nombre total de coloriages de X avec au plus k couleurs, modulo G , est*

$$P(1, \dots, 1) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} k^{|X/\langle g \rangle|}.$$

Démonstration. En $X_i = 1$, on a $p_j = k$ pour $j \geq 1$, donc $\prod_j p_j^{m_j(g)} = k^{\sum_j m_j(g)} = k^{|X/\langle g \rangle|}$. $\square$

4.5 Application : le collier à vingt-trois perles par le polynôme

Reprenons le collier, cette fois à $n = 23$ perles et $k = 4$ couleurs, par le théorème de Pólya. Le groupe D_{23} (46 éléments) a pour structures en cycles : l'identité (23 cycles de longueur 1) ; les 22 rotations non triviales (23 premier, donc chacune un unique 23-cycle) ; les 23 réflexions (une perle fixe et 11 paires). L'indicateur des cycles donne, par le Théorème 4.4,

$$P = \frac{1}{46} \left[(X_1 + \dots + X_4)^{23} + 22(X_1^{23} + \dots + X_4^{23}) + 23(X_1 + \dots + X_4)(X_1^2 + \dots + X_4^2)^{11} \right].$$

Le nombre de colliers de type $(2, 7, 2, 12)$ est le coefficient de $X_1^2 X_2^7 X_3^2 X_4^{12}$. La rotation ne contribue pas ; l'identité donne le multinomial ; chaque réflexion impose la perle centrale bleue (seule couleur impaire), les autres se répartissant en paires :

$$|F_\xi| = \frac{1}{46} \left(\binom{23}{2} \binom{21}{7} \binom{14}{2} + 23 \binom{11}{1} \binom{10}{3} \binom{7}{1} \right) = \mathbf{58\,202\,760}.$$

On lit ici tout l'intérêt du formalisme : changer le type recherché (par exemple remplacer deux perles blanches par du vert) ne demande aucun nouveau calcul, seulement la lecture d'un autre coefficient du *même* polynôme P .

5 Application : motifs périodiques à symétrie carrée

On cherche à dénombrer les coloriages d'une grille carrée modulo les symétries du carré. Ce problème, d'apparence élémentaire, illustre la portée pratique du théorème : le groupe agissant est explicite, les calculs sont entièrement menables, et le résultat est directement interprétable.

5.1 Cadre et structure en cycles

Un carreau carré admet les symétries du groupe diédral D_4 (ordre 8) : quatre rotations ($0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$) et quatre réflexions (axes médians et diagonaux). On modélise le motif comme une grille 4×4 de 16 cases, numérotées par leurs coordonnées (i, j) avec $0 \leq i, j \leq 3$, chacune colorée parmi k couleurs. Sans symétrie, il existe k^{16} coloriages. Le tableau suivant détermine, pour chaque élément de D_4 , son action sur les cases et le nombre de cycles qui en résulte.

Symétrie	Action sur (i, j)	Nb de cycles	Fixés (k coul.)
Identité e	$(i, j) \mapsto (i, j)$	16	k^{16}
Rotation r_{90}	$(i, j) \mapsto (j, 3-i)$	4	k^4
Rotation r_{180}	$(i, j) \mapsto (3-i, 3-j)$	8	k^8
Rotation r_{270}	$(i, j) \mapsto (3-j, i)$	4	k^4
Réflexion s_h (axe horiz.)	$(i, j) \mapsto (3-i, j)$	8	k^8
Réflexion s_v (axe vert.)	$(i, j) \mapsto (i, 3-j)$	8	k^8
Réflexion s_d (diag. princ.)	$(i, j) \mapsto (j, i)$	10	k^{10}
Réflexion $s_{d'}$ (anti-diag.)	$(i, j) \mapsto (3-j, 3-i)$	10	k^{10}

Pourquoi r_{90} a-t-elle 4 cycles ? Elle envoie $(0, 0) \rightarrow (0, 3) \rightarrow (3, 3) \rightarrow (3, 0) \rightarrow (0, 0)$, formant un 4-cycle. Les 16 cases se répartissent ainsi en 4 orbites de taille 4, d'où 4 cycles.

5.2 Dénombrement et polynôme générateur

Le Corollaire 4.5 donne le nombre de motifs D_4 -distincts à k couleurs :

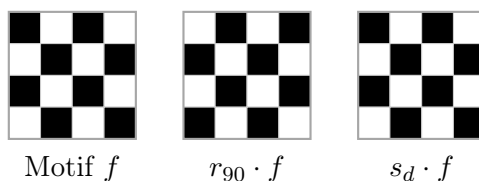
$$N_k = \frac{1}{8} \left(k^{16} + 2k^4 + 3k^8 + 2k^{10} \right).$$

Pour $k = 2$ (bicolore, noir et blanc) : $N_2 = \frac{65536+32+3 \cdot 256+2 \cdot 1024}{8} = \mathbf{8\,548}$ coloriages distincts, contre $2^{16} = 65\,536$ sans symétrie — un facteur $\approx 7,7$ de réduction.

Le théorème de Pólya (Théorème 4.4) va plus loin : le polynôme générateur

$$P = \frac{1}{8} \left[(X_1 + X_2)^{16} + 2(X_1^4 + X_2^4)^4 + (X_1^2 + X_2^2)^8 + 2(X_1^2 + X_2^2)^8 + 2(X_1 + X_2)^2 (X_1^2 + X_2^2)^7 \right]$$

encode en un seul objet le nombre de coloriages distincts de *chaque* composition. Le coefficient de $X_1^p X_2^{16-p}$ dans P donne le nombre de coloriages bicolores distincts comportant exactement p cases noires, pour tout p simultanément.



Trois coloriages d'une même orbite sous D_4 : un seul représentant dans $\mathcal{C}/G$.

5.3 Complexité algorithmique

La formule n'est pas qu'un résultat d'existence : elle fournit un algorithme dont le coût dépend de la taille du groupe, et non du nombre k^{n^2} de coloriages.

Au lieu d'énumérer tous les coloriage puis de regrouper ceux qui se déduisent l'un de l'autre, on parcourt les 8 symétries de D_4 et pour chacune on compte le nombre de ses cycles — ce qui suffit pour appliquer le Corollaire 4.5.

Algorithme — nombre de coloriage D_4 -distincts sur une grille $n \times n$ à k couleurs

Données : la taille n , le nombre de couleurs k , les 8 symétries $\sigma_1, \dots, \sigma_8$ de D_4 .

Résultat : $|\mathcal{C}/G|$, le nombre de coloriage distincts modulo D_4 .

$S \leftarrow 0$ // S accumulera la somme de Burnside

Pour chaque symétrie σ_ℓ ($\ell = 1, \dots, 8$) : // $|G|$ tours seulement, indépendamment de k

$c \leftarrow \text{NOMBREDECYCLES}(\sigma_\ell, n)$ // orbites de $\langle \sigma_\ell \rangle$ sur les n^2 cases

$S \leftarrow S + k^c$ // coloriage fixés par σ_ℓ (Cor. 4.5)

Renvoyer $S \div 8$ // moyenne de Burnside

Sous-procédure $\text{NOMBREDECYCLES}(\sigma, n)$:

Marquer toutes les cases comme *non visitées* ; $c \leftarrow 0$.

Pour chaque case x non encore visitée : // début d'un nouveau cycle

$c \leftarrow c + 1$; suivre $x \rightarrow \sigma(x) \rightarrow \sigma^2(x) \rightarrow \dots$ // parcourir et marquer

jusqu'à revenir à x .

Renvoyer c .

Analyse du coût. NOMBREDECYCLES visite chaque case exactement une fois : coût $O(n^2)$. L'algorithme principal effectue 8 appels, soit $O(8n^2)$ au total, *indépendant de k* . Pour $n = 8$ et $k = 2$, cela représente 8 appels en $O(64)$ opérations contre $2^{64} \approx 1,8 \times 10^{19}$ coloriage à énumérer.

Vérification numérique. Pour $n = 4$, $k = 2$, on lit c dans le tableau :

$$\begin{aligned} S &= 2^{16} + 2^4 + 2^8 + 2^4 + 2^8 + 2^8 + 2^{10} + 2^{10} \\ &= 65536 + 16 + 256 + 16 + 256 + 256 + 1024 + 1024 = 68384, \end{aligned}$$

d'où $N_2 = 68384/8 = \mathbf{8\,548}$, en accord avec la formule de la section précédente.

5.4 Bilan

Le groupe D_4 réduit l'ensemble des coloriage d'un facteur 7,7 : 8 548 orbites au lieu de 65 536 coloriage. Ce résultat est exact et obtenu sans énumération. La même formule s'adapte immédiatement à tout autre k ou n : pour $k = 4$, on obtient $N_4 \approx 537\,497\,133$ coloriage distincts sans aucun recalcul de structure.

Conclusion

Le théorème de Pólya fournit une réponse systématique au problème du dénombrement de configurations à symétrie près. Son apport central est le polynôme générateur P : un seul objet algébrique qui code simultanément le nombre d'orbites de chaque type, via la substitution $Z_j \mapsto p_j$ dans l'indicateur des cycles. La preuve repose sur deux ingrédients : la formule de Burnside pondérée, qui ramène le comptage des orbites à une moyenne sur le groupe, et les polynômes symétriques de Newton, qui rendent ce calcul effectif. Ce cadre s'étend sans modification à tout groupe fini agissant sur un ensemble fini — dénombrement d'isomères, de graphes non isomorphes, ou de positions équivalentes dans un jeu — partout où l'énumération directe est rendue inaccessible par la taille exponentielle de l'ensemble des configurations.

Références

- [1] P. Caldero, J. Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométries*, tome II, Calvage & Mounet, 2015 (§5, « Coloriages »).
- [2] G. Pólya, *Kombinatorische Anzahlbestimmungen für die Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen*, *Acta Mathematica*, vol. 68, pp. 145–254, 1937.
- [3] W. Burnside, *Theory of Groups of Finite Order*, Cambridge University Press, 1897 (2^e éd. 1911).