

Mélodies sur une corde :

Modélisation de l'excitation électromagnétique
d'une corde par un aimant fixe (Force de Laplace)

DERQAOUI Marouane

N°SCEI 24772

2025

Introduction



(a) Pierre-Simon de Laplace



(b) Guitare acoustique

Figure 1

Sources des images : https://fr.wikipedia.org/wiki/Pierre-Simon_de_Laplace

Problématique :

Comment l'interaction entre courant électrique et champ magnétique peut-elle être exploitée pour produire des mélodies sur une corde métallique, et en quoi l'excitation électromagnétique sans contact permet-elle un contrôle précis et innovant de ses vibrations ?

Plan de l'étude

- 1 Relation physique-musicale
- 2 Modélisation
 - Corde vibrante
 - Excitation par la force de Laplace
- 3 Analyse du comportement vibratoire et fréquentielle du cordage
 - Principe du fonctionnement
 - Optimisation des paramètres de l'expérience
- 4 Génération de la mélodie
- 5 Conclusion

Plan de l'étude

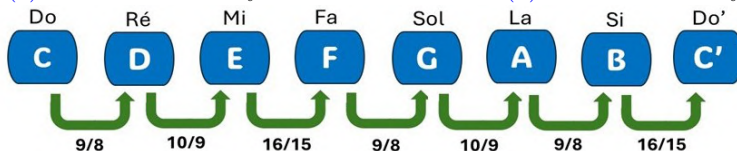
- 1 Relation physique-musicale
- 2 Modélisation
 - Corde vibrante
 - Excitation par la force de Laplace
- 3 Analyse du comportement vibratoire et fréquentielle du cordage
 - Principe du fonctionnement
 - Optimisation des paramètres de l'expérience
- 4 Génération de la mélodie
- 5 Conclusion

Systèmes d'accordage (intonation juste)

	Pythagorean		just intonation
tonic	1		1
major 2nd	9/8		9/8
major 3rd	81/64	>	5/4
perfect 4th	4/3		4/3
perfect 5th	3/2		3/2
major 6th	27/16	>	5/3
major 7th	243/128	>	15/8
octave	2		2



(a) Modèle de Ptolemy



(b) Claudius Ptolemy

Sources des images : <https://www2.hao.ucar.edu/education/scientists/claudius-ptolemy-100-170>

<https://johncarlosbaez.wordpress.com/2023/10/30/just-intonation-part-1/>

Plan de l'étude

- 1 Relation physique-musicale
- 2 Modélisation
 - Corde vibrante
 - Excitation par la force de Laplace
- 3 Analyse du comportement vibratoire et fréquentielle du cordage
 - Principe du fonctionnement
 - Optimisation des paramètres de l'expérience
- 4 Génération de la mélodie
- 5 Conclusion

Equation de la corde vibrante

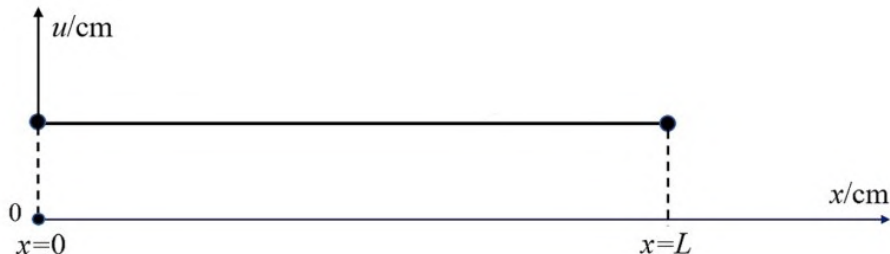


Figure 2 – Diagramme schématisque du système de coordonnées unidimensionnel pour une corde.

Equation de la corde vibrante

Equation de la corde vibrante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

avec $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, la vitesse de propagation de l'onde.

Solution :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin(\omega_n t + \phi_n)$$

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L}, \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Modèle d'excitation

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t)$$

- Force de Laplace (f_1) :

$$f_1 = \frac{B(x)I_0}{\mu} \sin(\omega t)$$

- Force résistive électromagnétique (f_2) :

$$f_2 = -\frac{B(x)}{\mu R} \int_0^L B(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx$$

- Interaction avec l'air (f_3) :

$$f_3 = -\gamma \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$$



Solution

L'application du PFD donne :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f_1 + f_2 + f_3 \quad (0 \leq x \leq L) \quad (1)$$

Pour un traitement simple en mathématiques, nous supposons que :

$$B(0) = B(L) = 0,$$

On peut écrire alors :

$$B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

où

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L B(\xi) \sin\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) d\xi.$$

Solution

En utilisant les notations complexes (annexe), nous pouvons obtenir la solution stable de l'équation (1) :

$$u(x, t) = \sum_n A_n \sin(\omega t + \phi) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (2)$$

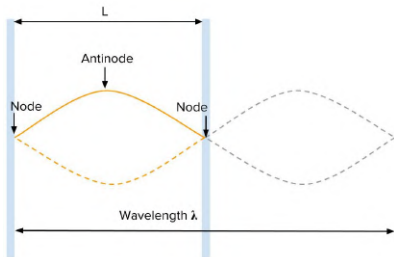
$$A_n = \frac{\beta_{n1}}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\beta_{n2}^2 \omega^2}} \quad (3)$$

$$\beta_{n1} = \frac{B_n I_0}{\mu} \quad \beta_{n2} = \frac{L B_n^2}{4R\mu} + \frac{\gamma}{2} \quad (4)$$

Plan de l'étude

- 1 Relation physique-musicale
- 2 Modélisation
 - Corde vibrante
 - Excitation par la force de Laplace
- 3 Analyse du comportement vibratoire et fréquentielle du cordage
 - Principe du fonctionnement
 - Optimisation des paramètres de l'expérience
- 4 Génération de la mélodie
- 5 Conclusion

Principe du fonctionnement



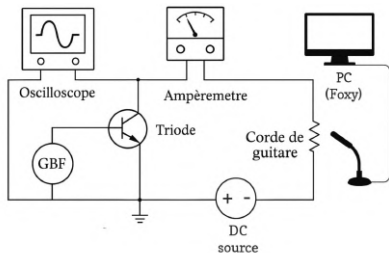
(a) noeud / antinoeud



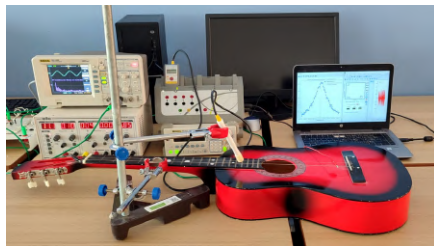
(b) Guitare acoustique

Figure 3 – Étude des propriétés vibratoires et des caractéristiques fréquentielles du cordage.

Appareils



(a) Schéma du circuit pour jouer un ton sur le monocorde



(b) Montage expérimental.

Figure 4 – L'ensemble du montage est utilisé pour l'excitation et la réalisation d'une performance de la mélodie.

Influence de la position de l'aimant : théorie

Nous pouvons obtenir l'amplitude maximale $A_{n(\max)}$ et la fréquence de résonance correspondante ω_{rn} en dérivant l'amplitude A_n par rapport à ω :

Influence de la position de l'aimant : théorie

Nous pouvons obtenir l'amplitude maximale $A_{n(\max)}$ et la fréquence de résonance correspondante ω_{rn} en dérivant l'amplitude A_n par rapport à ω :

$$A_{n(\max)} = \frac{b_{n1}}{2b_{n2}\sqrt{\omega_n^2 + b_{n2}^2}} \quad (5)$$

Influence de la position de l'aimant : théorie

Nous pouvons obtenir l'amplitude maximale $A_{n(\max)}$ et la fréquence de résonance correspondante ω_{rn} en dérivant l'amplitude A_n par rapport à ω :

$$A_{n(\max)} = \frac{b_{n1}}{2b_{n2}\sqrt{\omega_n^2 + b_{n2}^2}} \quad (5)$$

$$\omega_{rn} = \sqrt{\omega_n^2 - 2b_{n2}^2} \quad (6)$$

Influence de la position de l'aimant : théorie

Nous pouvons obtenir l'amplitude maximale $A_{n(\max)}$ et la fréquence de résonance correspondante ω_{rn} en dérivant l'amplitude A_n par rapport à ω :

$$A_{n(\max)} = \frac{b_{n1}}{2b_{n2}\sqrt{\omega_n^2 + b_{n2}^2}} \quad (5)$$

$$\omega_{rn} = \sqrt{\omega_n^2 - 2b_{n2}^2} \quad (6)$$

Influence de la position de l'aimant : théorie

Si nous prenons un modèle de champ magnétique uniforme avec une induction magnétique constante B_0 (dans notre expérience $B_0 = 2500 \text{ G} = 0,25 \text{ T}$) et la position centrale du champ magnétique x_0 , on aura alors :

$$B_n = \frac{4B_0}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi l_0}{2L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right) \quad (7)$$

Nous pouvons simplifier l'équation (6) comme :

$$A_n(\text{max}) = \frac{2B_0 l_0 I_0}{L \mu b_0 \sqrt{\omega_n^2 - \frac{b_0^2}{4}}} \sin\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right) \quad (8)$$

avec l_0 est la largeur effective

Influence de la position de l'aimant : expérience

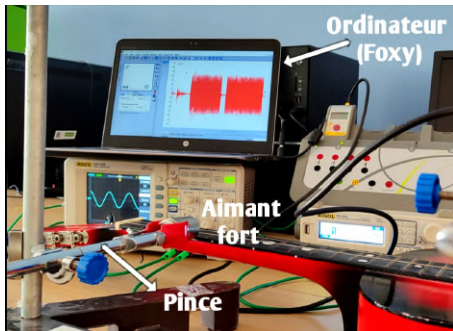
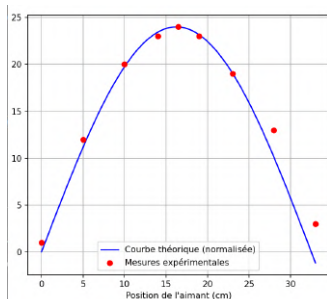


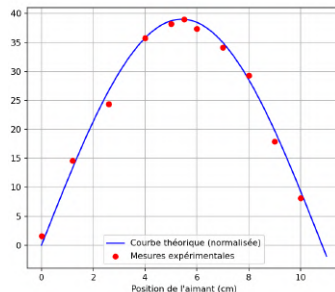
Figure 5 – Mesure expérimentale de $A = f(x_0)$

- On travaille sur les deux harmoniques $n = 2$ et $n = 6$, c'est-à-dire avec des fréquences de 130 Hz et 389 Hz.
- On utilise un aimant puissant à environ 1 cm de la corde..
- On fixe le courant $I_0 \approx 0,8\text{A}$.
- L'amplitude maximale est mesurée à plusieurs reprises.

Influence de la position de l'aimant : résultats



(a) $n=2$



(b) $n=6$

Figure 6 – Mesures de l'amplitude (u.a) en fonction de la position de l'aimant. Les mesures expérimentales suivent de près la courbe théorique, validant ainsi la forme semi-sinusoidale prédite par le modèle.

Fréquences harmoniques de résonance

Largeurs à mi-hauteur correspondantes (FWHM)

- On place l'aimant au niveau du ventre de vibration (noeud de pression) correspondant à l'onde stationnaire étudiée.
- On balaie les fréquences voisines de la fréquence propre f_n correspondante.
- On repère la fréquence pour laquelle l'amplitude de la vibration est maximale (résonance) : cela correspond à la fréquence propre recherchée.

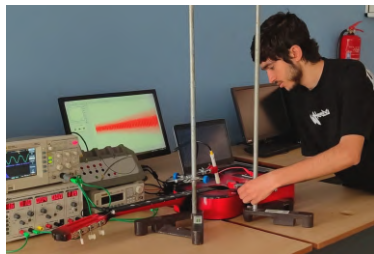
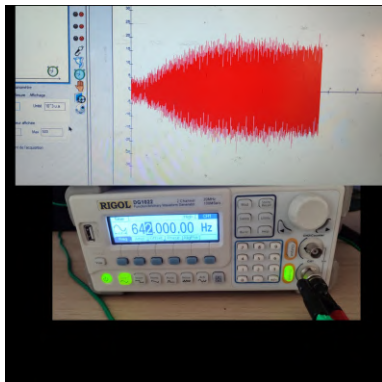
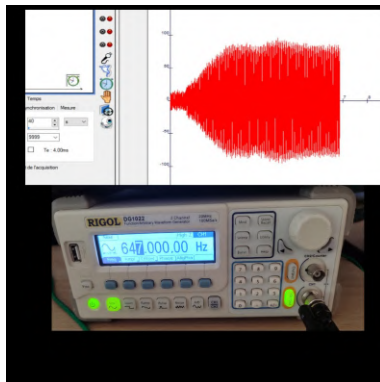


Figure 7 – Recherche de la fréquence de résonance

Exemple avec $n=10$:

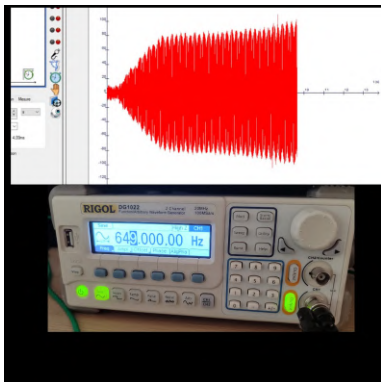


$$(a) f_{10}^{(1)} = 642 \text{ Hz} / A_{10}^{(1)} = 1.8 \text{ u.a}$$

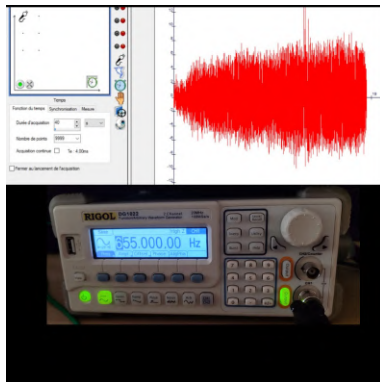


$$(b) f_{10}^{(2)} = 647 \text{ Hz} / A_{10}^{(2)} = 7.5 \text{ u.a}$$

Exemple avec $n=10$:

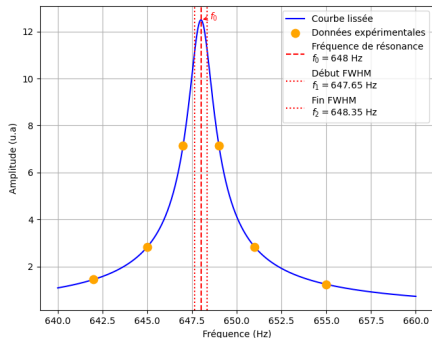


$$(c) f_{10}^{(3)} = 649 \text{ Hz} / A_{10}^{(3)} = 7.6 \text{ u.a}$$



$$(d) f_{10}^{(4)} = 655 \text{ Hz} / A_{10}^{(4)} = 1 \text{ u.a}$$

Courbe de résonance (n=10)



- Comme prévu théoriquement, la fréquence de résonance

$$\omega_{rn} = \sqrt{\omega_n^2 - 2b_{n2}^2}$$

est inférieure à la fréquence propre du système.

- (FWHM) : $\Delta f = 0,7$ Hz
- Le facteur de qualité $Q_{Fs} = \frac{f}{\Delta f} = 929$ est suffisamment élevé pour produire des sons musicaux agréables.

Tableau récapitulatif

Table 1 – Fréquences harmoniques et facteurs de qualité Q_F .

n	8	9	10	11	12	13	14	15	16
f (Hz)	518,9	582,7	648,0	712,2	777,4	842,8	907,9	973,5	1039,4
Δf (Hz)	0,4	0,4	0,7	0,4	0,6	0,8	0,8	0,7	0,7
$Q_F = \frac{f}{\Delta f}$	1300	1463	929	1788	1300	1056	1138	1393	1484

Bilan : amplitude maximale associée à chaque fréquence harmonique

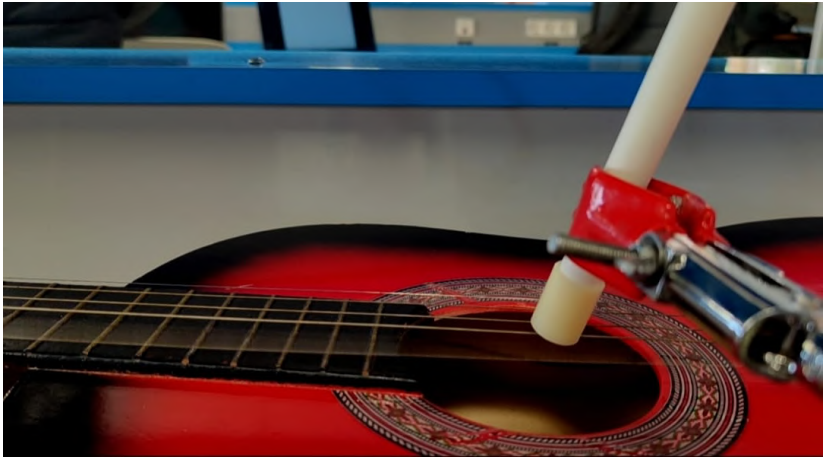
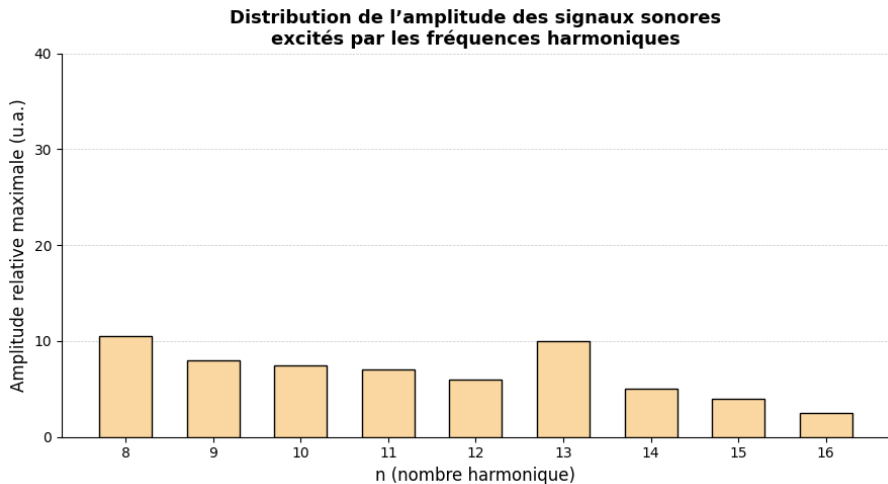


Figure 8 – Détermination de l'amplitude maximale

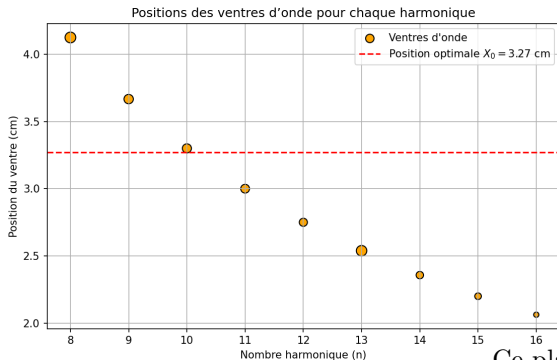
Bilan : amplitude maximale associée à chaque fréquence harmonique



Plan de l'étude

- 1 Relation physique-musicale
- 2 Modélisation
 - Corde vibrante
 - Excitation par la force de Laplace
- 3 Analyse du comportement vibratoire et fréquentielle du cordage
 - Principe du fonctionnement
 - Optimisation des paramètres de l'expérience
- 4 Génération de la mélodie
- 5 Conclusion

Optimisation de la position de l'aimant



$$x_0(n) = \frac{\lambda_n}{4} = \frac{L}{2n}$$

$$X_{\text{opt}} = \frac{\sum_{n=8}^{16} A_n \cdot x_0(n)}{\sum_{n=8}^{16} A_n}$$

$$X_0 \approx 3.27 \text{ cm}$$

Ce placement maximise l'excitation des harmoniques $n = 8$ à $n = 13$.

Excitation harmonique : vers une mélodie de fréquences multiples

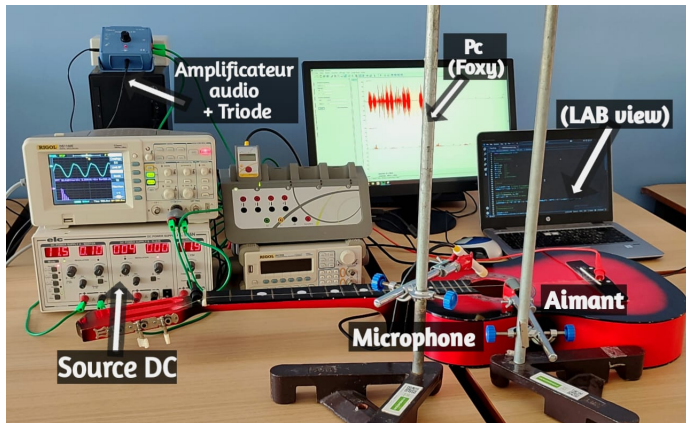


Figure 9 – L'ensemble du montage utilisé pour l'excitation et la réalisation d'une performance de la mélodie.

Excitation harmonique : vers une mélodie de fréquences multiples

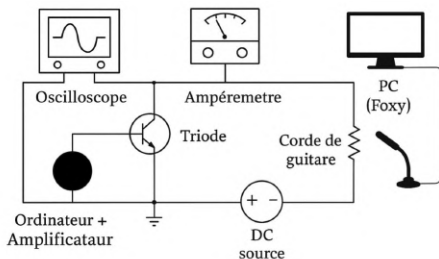


Figure 10 –

- La position de l'aimant est fixée à $X_a = 3,27$ cm.
- Le générateur de signaux est remplacé par un lecteur audio numérique.
- Les fréquences utilisées sont choisies pour maximiser l'excitation des harmoniques.
- L'amplitude de chaque excitation est modulée progressivement, afin de produire un son plus naturel et musical.

Accord sur une corde : deux fréquences, un seul signal

Excitation simultanée de C5($n=8$) et E5($n=10$) pour produire un dyade harmonique

Résultats :

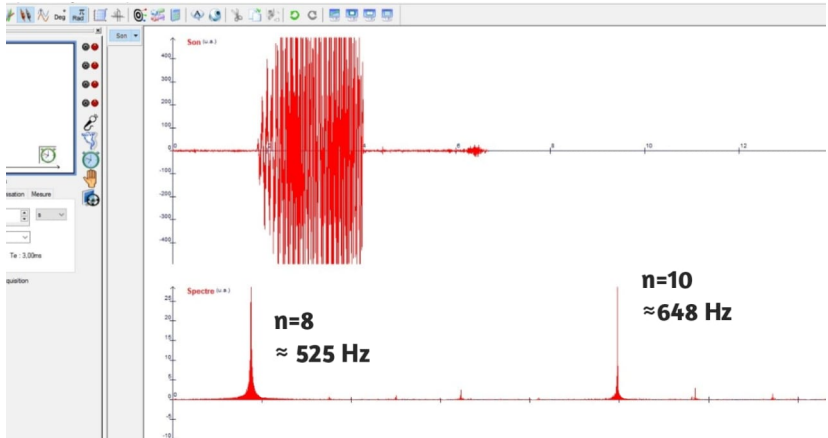


Figure 11 – Dyade C5 + E5

Accord sur une corde : Huit notes

Forme d'onde de sortie de huit notes (C5-C6)

Résultats :

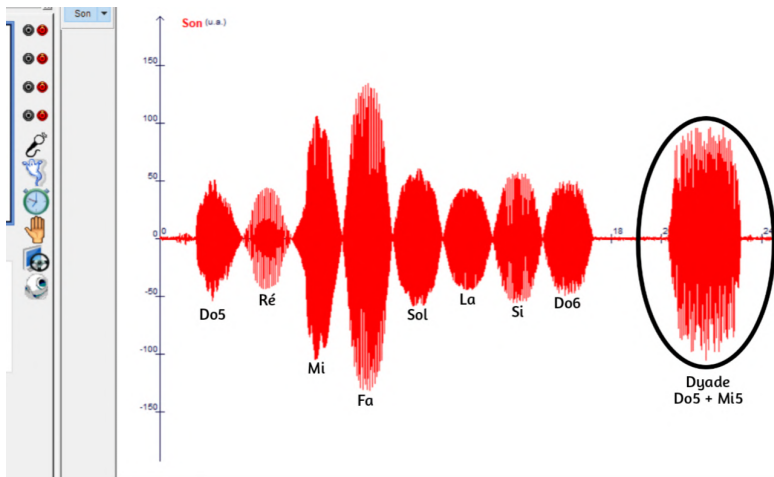


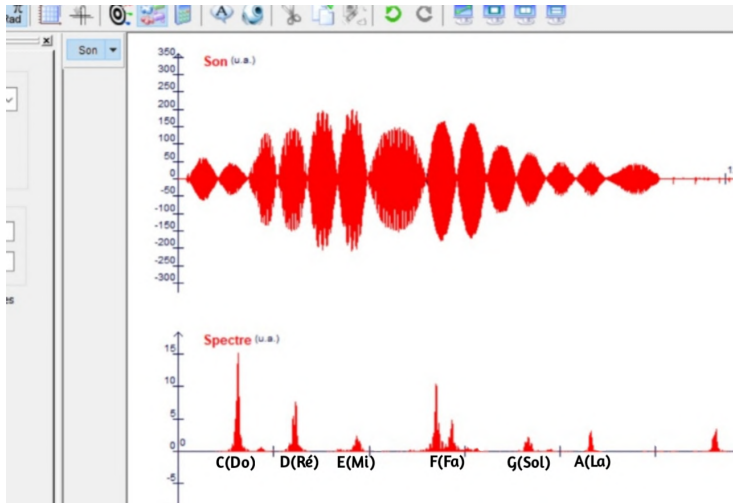
Figure 12 – Huit notes (Do5 à Do6) et un accord (dyade Do5 + Mi5)

Génération d'une mélodie complète : “Ah ! vous dirai-je, Maman”

Note	Note scientifique	Fréquence (Hz)	Durée (s)
C (Do)	C6	518.90	0.6 ou 1.2
G (Sol)	G6	778.35	0.6 ou 1.2
A (La)	A6	843.22	0.6
F (Fa)	F6	713.49	0.6
E (Mi)	E6	648.63	0.6
D (Ré)	D6	583.76	0.6

Table 2 – Fréquences et durées des notes utilisées dans la mélodie “Ah ! vous dirai-je, Maman”

Génération d'une mélodie complète : "Ah ! vous dirai-je, Maman"

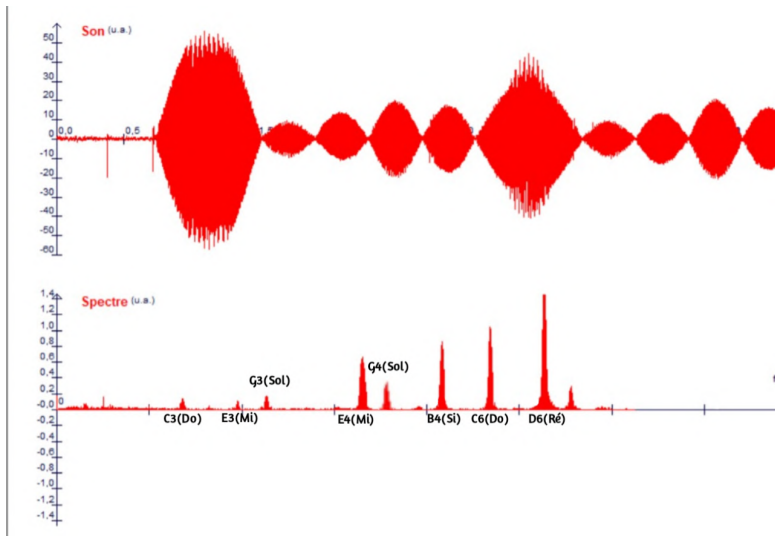


Génération d'une mélodie complète : “Mariage d'Amour”

Note	Note scientifique	Fréquence (Hz)	Durée (s)
Si (B)	B4	455.0	0.8
Mi (E)	E3	162.5	0.8
Mi (E)	E4	325.0	0.4
Sol (G)	G4	390.0	0.4
La (A)	A4	422.5	0.4
Sol (G)	G3	195.0	0.8
Do (C6)	C6	518.9	0.4 à 0.8
Do' (C7)	C7	973.9	0.4
Ré (D)	D6	583.8	0.8
Do (C)	C3	130.0	1.6

Table 3 – Notes, fréquences et durées caractéristiques de la mélodie “Mariage d'Amour” avec précision des octaves.

Génération d'une mélodie complète : "Mariage d'Amour"

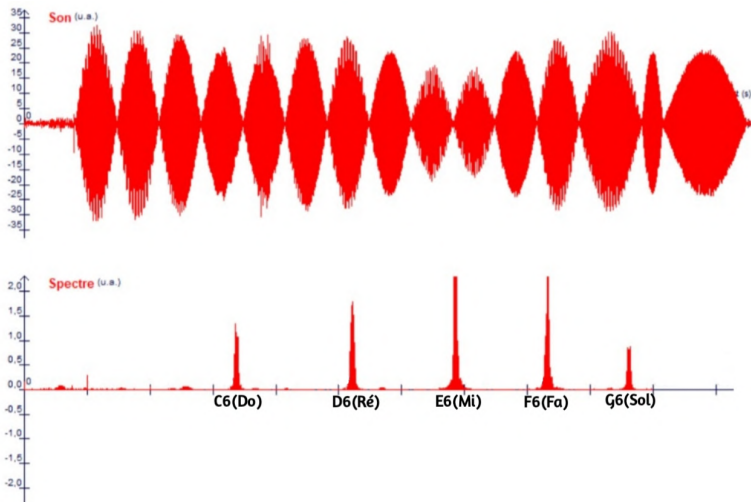


Génération d'une mélodie complète : "Hymne à la joie"

Note	Note scientifique	Fréquence (Hz)	Durée (s)
Mi (E)	E6	648.6	0.5
Fa (F)	F6	713.5	0.5
Sol (G)	G6	778.4	0.5
Mi (E)	E6	648.6	0.5
Do (C)	C6	518.9	0.5
Ré (D)	D6	583.8	0.5
Mi (E)	E6	648.6	0.75
Ré (D)	D6	583.8	0.25 / 1.0

Table 4 – Fréquences et durées des notes utilisées dans la mélodie "Hymne à la joie"

Génération d'une mélodie complète : "Hymne à la joie"



Plan de l'étude

- 1 Relation physique-musicale
- 2 Modélisation
 - Corde vibrante
 - Excitation par la force de Laplace
- 3 Analyse du comportement vibratoire et fréquentielle du cordage
 - Principe du fonctionnement
 - Optimisation des paramètres de l'expérience
- 4 Génération de la mélodie
- 5 Conclusion

Conclusion



**MERCI POUR
VOTRE ATTENTION**

Annexes

Annexe :

Équation de la corde vibrante

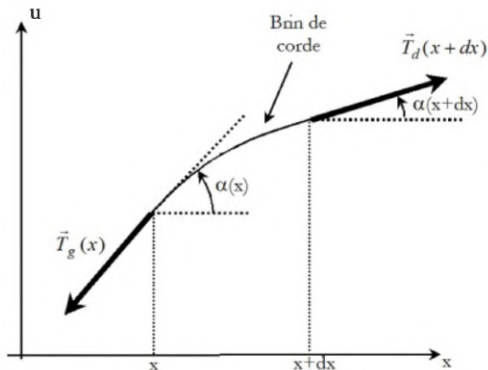


Figure 13 – Modélisation dun petit élément de corde

Annexe :

Équation de la corde vibrante

Hypothèses et données :

μ : masse linéique de la corde

L : longueur de la corde

$T(x)$: tension au point x

Le poids est négligé

Petits déplacements $\Rightarrow$ approximation des petits angles

On applique le PFD à un élément entre x et $x + dx$:

$$0 = T(x + dx, t) \cos(\alpha(x + dx, t)) - T(x, t) \cos(\alpha(x, t))$$

$$\mu dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T(x + dx, t) \sin(\alpha(x + dx, t)) - T(x, t) \sin(\alpha(x, t))$$

Annexe :

Équation de la corde vibrante

Petits angles :

$$\cos \alpha(x, t) \approx 1, \quad \sin \alpha(x, t) \approx \alpha(x, t) \approx \frac{\partial u}{\partial x}$$

Première équation :

$$T(x + dx, t) = T(x, t) = T = \text{constante}$$

Deuxième équation :

$$\begin{aligned} \mu dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= T [\alpha(x + dx, t) - \alpha(x, t)] \\ &= T \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx \\ &= T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \end{aligned}$$

Annexe :

1. Équation différentielle avec excitation

Équation de départ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f_1 + f_2 + f_3$$

avec :

$$f_1 = \frac{B(x)I_0}{\mu} \sin(\omega t) \text{ (force de Lorentz),}$$

$$f_2 = -\frac{B(x)}{\mu R} \int_0^L B(x) \frac{\partial u}{\partial t} dx \text{ (résistance électromagnétique),}$$

$$f_3 = -\gamma \frac{\partial u}{\partial t} \text{ (dissipation dans l'air).}$$

Annexe :

2. Décomposition en série de Fourier

Conditions aux bords : $u(0, t) = u(L, t) = 0$.

Décomposition (puisque la corde est soumise à des conditions aux bords fixes, on exprime sa déformation comme une superposition d'ondes stationnaires) :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right)$$

$$B(x) = \sum_n B_n \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \quad [n = 1, 2, 3, \dots] \quad (*)$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L B(\xi) \sin \left(\frac{n\pi \xi}{L} \right) d\xi \quad (**)$$

On projette toute l'équation sur $\sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right)$.

Annexe :

3. Équation différentielle obtenue pour chaque mode

Équation par projection

$$\ddot{u}_n(t) + 2\beta_{n2}\dot{u}_n(t) + \omega_n^2 u_n(t) = \beta_{n1} \sin(\omega t)$$

avec :

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L},$$

$$\beta_{n1} = \frac{B_n I_0}{\mu},$$

$$\beta_{n2} = \frac{LB_n^2}{4R\mu} + \frac{\gamma}{2}.$$

Annexe :

4. Résolution avec les notations complexes

On remplace $\sin(\omega t)$ par $\Im(e^{i\omega t})$.

Équation complexe :

$$\ddot{u}_n(t) + 2\beta_{n2}\dot{u}_n(t) + \omega_n^2 u_n(t) = \beta_{n1}e^{i\omega t}$$

Or et comme :

Le système est linéaire,
soumis à une excitation sinusoïdale à fréquence fixe (régime forcé),
la réponse stationnaire a la même pulsation ω ,
et cette forme permet une résolution simple et directe, tout en respectant les propriétés physiques de la corde.

On peut écrire :

$$u_n(t) = A_n^{(c)} e^{i\omega t}$$

Annexe :

5. Calcul de l'amplitude complexe

Substitution

$$A_n^{(c)} = \frac{\beta_{n1}}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2i\beta_{n2}\omega}$$

Amplitude réelle :

$$A_n = |A_n^{(c)}| = \frac{\beta_{n1}}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\beta_{n2}^2\omega^2}}$$

Phase :

$$\phi_n = -\arctan\left(\frac{2\beta_{n2}\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}\right)$$

Annexe :

5. Amplitude maximale et fréquence de résonance

On peut obtenir l'amplitude maximale $A_{n(\max)}$ en annulant la dérivée partielle de l'amplitude A_n par rapport à la fréquence ω . Cela permet d'obtenir la fréquence de résonance ω_{rn} :

$$A_{n(\max)} = \frac{\beta_{n1}}{2\beta_{n2}\sqrt{\omega_{rn}^2 + \beta_{n2}^2}} \quad (9)$$

$$\omega_{rn} = \sqrt{\omega_n^2 - 2\beta_{n2}^2} \quad (10)$$

Annexe :

5. Amplitude maximale et fréquence de résonance

En supposant un champ magnétique uniforme de valeur B_0 , avec une largeur effective l_0 et une position centrale x_0 , on a :

$$B(\xi) = \begin{cases} B_0 & \text{si } \xi \in \left[x_0 - \frac{l_0}{2}, x_0 + \frac{l_0}{2} \right] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On remplace dans l'équation (**):

$$B_n = \frac{2B_0}{L} \int_{x_0 - l_0/2}^{x_0 + l_0/2} \sin\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) d\xi \quad (2)$$

Par un changement de variable $\xi = x_0 + u$, avec $u \in \left[-\frac{l_0}{2}, \frac{l_0}{2}\right]$, on obtient :

$$B_n = \frac{2B_0}{L} \int_{-l_0/2}^{l_0/2} \sin\left(\frac{n\pi(x_0 + u)}{L}\right) du \quad (3)$$

Annexe :

5. Amplitude maximale et fréquence de résonance

Ce qui donne :

$$B_n = \frac{4B_0}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi l_0}{2L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right) \quad (5)$$

Dans le cas d'un champ généré par un aimant cylindrique permanent (tel que dans notre expérience), la largeur effective l_0 (environ 1,5 cm) est faible devant la longueur de la corde L (66 cm).

Annexe :

5. Amplitude maximale et fréquence de résonance

On a :

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{n\pi l_0}{2L}\right) &\approx \frac{n\pi l_0}{2L} \quad \Rightarrow \quad B_n \approx \frac{4B_0}{n\pi} \cdot \frac{n\pi l_0}{2L} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right) \\ &= \frac{2B_0 l_0}{L} \sin\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right)\end{aligned}$$

$$\beta_{n1} = \frac{B_n I_0}{\mu} = \frac{2B_0 l_0 I_0}{L\mu} \sin\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right)$$

$$\beta_{n2} \approx \frac{\gamma}{2} = \frac{b_0 \mu}{2}$$

$$\omega_{rn}^2 + \beta_{n2}^2 = \omega_n^2 - \beta_{n1}^2$$

$$A_{n(\max)} = \frac{\beta_{n1}}{2\beta_{n2}\sqrt{\omega_n^2 - \beta_{n2}^2}} \approx \frac{\beta_{n1}}{b_0 \mu \sqrt{\omega_n^2 - \frac{b_0^2}{4}}}$$

Annexe :

5. Amplitude maximale et fréquence de résonance

On obtient :

$$A_{n(\max)} = \frac{2B_0 l_0^2}{L\mu b_0 \sqrt{\omega_n^2 - \frac{b_0^2}{4}}} \sin\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right)$$

Pour les faibles valeurs de n , on peut alors approximer l'amplitude maximale comme :

$$A_{n(\max)} = \frac{2B_0 l_0^2}{L\mu b_0 \sqrt{\omega_n^2 - b_0^2/4}} \sin\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right) \quad (11)$$

On en déduit que la dépendance de l'amplitude maximale $A_{n(\max)}$ en fonction de la position x_0 de l'aimant suit une forme sinusoïdale. Ce comportement est confirmé par les résultats expérimentaux suivants.

Annexe :

Code python pour le tracé de l'influence de la position de l'aimant (n=2)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Constantes physiques
n = 2
l0 = 0.015    # m
B0 = 0.25     # T
I0 = 0.8      # A
L = 0.65      # m
mu = 0.01     # kg/m
T = 70        # N
b0 = 5        # Amortissement

v = np.sqrt(T / mu) # vitesse de propagation
omega_n = n * np.pi * v / L # fréquence angulaire propre

x_cm = np.linspace(0, 33, 500)
x_m = x_cm / 100 # conversion en mètres

A_theorique = (2 * B0 * l0 * I0) / (L * mu * b0 *
    np.sqrt(omega_n**2 - (b0**2) / 4)) * np.sin(n * np.pi * x_m / L)

# Normalisation
norm_max = 24
facteur_normalisation = norm_max / np.max(np.abs(A_theorique))
A_theorique_normalisée = A_theorique * facteur_normalisation
```

Annexe :

Code python pour le tracé de l'influence de la position de l'aimant ($n=2$)

```
# Données expérimentales simulées (n=2)
positions_exp_cm = np.array([0, 5, 10, 14, 16.5, 19, 23, 28, 33])
amplitudes_exp = np.array([1, 12, 20, 23, 24, 23, 19, 13, 3])

# Tracé
plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.plot(x_cm, A_theorique_normalisée, color='blue',
         label="Courbe théorique (normalisée)")
plt.scatter(positions_exp_cm, amplitudes_exp, color='red', zorder=5,
            label="Mesures expérimentales")
plt.xlabel("Position de l'aimant (cm)")
plt.ylabel("Amplitude (u.a.)")
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.show()
```

Annexe :

Code python pour le tracé de l'influence de la position de l'aimant (n=6)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# -----
# Constantes physiques
# -----
n = 6
l0 = 0.015    # m
B0 = 0.25     # T
I0 = 0.8      # A
L = 0.65      # m
mu = 0.01     # kg/m
T = 70        # N
b0 = 5        # Amortissement

# -----
# Calculs
# -----
v = np.sqrt(T / mu)    # vitesse de propagation
omega_n = n * np.pi * v / L    # fréquence angulaire propre

# Axe des positions en cm (0 à 11 cm)
x_cm = np.linspace(0, 11, 300)
x_m = x_cm / 100    # conversion en mètres

# Calcul de l'amplitude théorique
A_theorique = (2 * B0 * l0 * I0) / (L * mu * b0 * np.sqrt(omega_n**2 - (b0**2) / 4)) * np
    .sin(n * np.pi * x_m / L)
```

Annexe :

Code python pour le tracé de l'influence de la position de l'aimant (n=6)

```
# Normalisation à 39
# -----
norm_max = 39
facteur_normalisation = norm_max / np.max(np.abs(A_theorique))
A_theorique_normalisée = A_theorique * facteur_normalisation

# -----
# Données expérimentales simulées
# -----
positions_exp_cm = np.array([0.0, 1.2, 2.6, 4.0, 5.0, 5.5, 6.0, 7.0, 8.0, 9.0, 10.0])
amplitudes_exp = np.array([1, 9, 15, 22, 23.5, 24, 23, 21, 18, 11, 5])
amplitudes_exp = np.array([1.5, 14.5, 24, 36, 38, 39, 38, 34.5, 29.5, 18, 8])

# -----
# Tracé
# -----
plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.plot(x_cm, A_theorique_normalisée, color='blue', label="Courbe théorique (normalisée)")
plt.scatter(positions_exp_cm, amplitudes_exp, color='red', zorder=5, label="Mesures expérimentales")

plt.xlabel("Position de l'aimant (cm)")
plt.ylabel("Amplitude (u.a.)")
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.show()
```

Annexe :

Code python pour le tracé de la courbe de résonance

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# -----
# Paramètres
# -----
f0 = 648          # fréquence de résonance en Hz
A0 = 12.5         # amplitude maximale
Q = 929          # facteur de qualité

# -----
# Calcul de la largeur à mi-hauteur (FWHM)
# -----
delta_f = f0 / Q
f1 = f0 - delta_f/2
f2 = f0 + delta_f/2

# -----
# Plage de fréquences pour la courbe lissée
# -----
f = np.linspace(640, 660, 1000)

# Amplitude (courbe de résonance théorique)
A = A0 / np.sqrt(1 + Q**2 * ((f - f0) / f0)**2)

# --- Points expérimentaux ---
# Fréquences choisies autour de f0 (6 points)
freq_exp = np.array([642, 645, 647, 649, 651, 655])
```

Annexe :

Code python pour le tracé de la courbe de résonance

```
# Amplitudes expérimentaux
amp_exp = np.array([1.5, 3.0, 7.5, 7.4, 2.8, 1.3])

print("Points expérimentaux :")
for fr, amp in zip(freq_exp, amp_exp):
    print(f"Fréquence = {fr} Hz, Amplitude = {amp:.4f} u.a.")

# Tracé
plt.figure(figsize=(10,6))
plt.plot(f, A, label='Courbe lissée', color='blue')

# Points expérimentaux
plt.scatter(freq_exp, amp_exp, color='orange', label='Données expérimentales', s=80,
            zorder=5)

# Traits rouges pour la fréquence de résonance et FWHM
plt.axvline(f0, color='red', linestyle='--', label=f'Fréquence de résonance\n$f_0 = {f0}$ Hz')
plt.axvline(f1, color='red', linestyle=':', label=f'Début FWHM\n$f_1 = {f1:.2f}$ Hz')
plt.axvline(f2, color='red', linestyle=':', label=f'Fin FWHM\n$f_2 = {f2:.2f}$ Hz')

# Annotation pour f0
plt.annotate('$f_0$', xy=(f0, A0), xytext=(f0+0.5, A0+0.01), arrowprops=dict(arrowstyle='->', color='red'), color='red')

plt.xlabel('Fréquence (Hz)')
plt.ylabel('Amplitude (u.a)')
plt.legend()
plt.show()
```


Annexe :

Code python pour le tracé l'amplitude maximale associée à chaque fréquence harmonique

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# Données
n = np.arange(8, 17)
amplitudes = [10.5, 8, 7.5, 7, 6, 10, 5, 4, 2.5]

# Paramètres d'affichage pro
plt.figure(figsize=(9, 5))
bars = plt.bar(n, amplitudes, width=0.6, color='#FAD7A0', edgecolor='black', linewidth
               =1.2)

# Coins arrondis
for bar in bars:
    bar.set_linewidth(1)
    bar.set_linestyle('--')
    bar.set_zorder(3)

# Titres et étiquettes
plt.title("Distribution de l'amplitude des signaux sonores\nexcités par les fréquences
          harmoniques", fontsize=13, weight='bold')
plt.xlabel("n (nombre harmonique)", fontsize=12)
plt.ylabel("Amplitude relative maximale (u.a.)", fontsize=12)
```

Annexe :

Code python pour le tracé l'amplitude maximale associée à chaque fréquence harmonique

```
# Grille
plt.grid(axis='y', linestyle='--', linewidth=0.5, alpha=0.7, zorder=0)

# Axes
plt.ylim(0, 40)
plt.xticks(n, fontsize=10)
plt.yticks(np.linspace(0, 40, 5), fontsize=10)

# Suppression des bordures supérieures et droites
plt.gca().spines['top'].set_visible(False)
plt.gca().spines['right'].set_visible(False)

# Espacement optimal
plt.tight_layout()

# Affichage
plt.show()
```

Annexe :

Position optimale de l'aimant

```
import matplotlib.pyplot as plt

# Longueur de la corde
L = 66 # en cm

# Harmoniques considérées
n_values = list(range(8, 17))
amplitudes = [0.105, 0.08, 0.075, 0.07, 0.06, 0.10, 0.05, 0.04, 0.025]

# Calcul des positions  $X_0 = L/(2n)$ 
positions = [L / (2 * n) for n in n_values]

# Position optimale calculée
X_opt = 3.27

plt.figure(figsize=(8, 5))
plt.scatter(n_values, positions, s=[a * 1000 for a in amplitudes], color='orange',
            edgecolor='black', label="Ventres d'onde")
plt.axhline(y=X_opt, color='red', linestyle='--', label=f"Position optimale  $X_0 = \{X\_opt :.2f\}$  cm")

plt.xlabel("Nombre harmonique (n)")
plt.ylabel("Position du ventre (cm)")
plt.title("Positions des ventres d'onde pour chaque harmonique")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.savefig("positions_harmoniques.png", dpi=300)
plt.show()
```

Annexe :

Fonctions de génération des notes musicales

```
% Fonction note1 - Octave Do4
function note = note1(degre, duree, amplitude)
    frequence_echant = 20000;
    f = 130.0;
    octave = [f, 9/8*f, 5/4*f, 11/8*f, 3/2*f, 13/8*f, 9/8*f, 15/8*f];
    t = linspace(0, 2 * pi * duree, floor(frequence_echant * duree)
    );
    note = (sin(octave(degre) * t)) .* sin(t/(2 * duree)) .*
        amplitude;
end

% Fonction note2 - Octave Do5
function note = note2(degre, duree, amplitude)
    frequence_echant = 20000;
    f = 260.0;
    octave = [f, 9/8*f, 5/4*f, 11/8*f, 3/2*f, 13/8*f, 9/8*f, 15/8*f];
    t = linspace(0, 2 * pi * duree, floor(frequence_echant * duree)
    );
    note = (sin(octave(degre) * t)) .* sin(t/(2 * duree)) .*
        amplitude;
end
```

Annexe :

Fonctions de génération des notes musicales

```
% Fonction note3 - Octave Do6
function note = note3(degre, duree, amplitude)
    frequence_echant = 20000;
    f = 518.9;
    octave = [f, 9/8*f, 5/4*f, 11/8*f, 3/2*f, 13/8*f, 9/8*f, 15/8*f];
    t = linspace(0, 2 * pi * duree, floor(frequence_echant * duree)
    );
    note = (sin(octave(degre) * t)) .* sin(t/(2 * duree)) .*
        amplitude;
end

% Fonction note4 - Octave Do7
function note = note4(degre, duree, amplitude)
    frequence_echant = 20000;
    f = 1039.4;
    octave = [f, 9/8*f, 5/4*f, 11/8*f, 3/2*f, 13/8*f, 9/8*f, 15/8*f];
    t = linspace(0, 2 * pi * duree, floor(frequence_echant * duree)
    );
    note = (sin(octave(degre) * t)) .* sin(t/(2 * duree)) .*
        amplitude;
end
```

Annexe :

Une gamme musicale et une dyade

```
% 'Une gamme musicale et une dyade'
frequence_echant = 20000;

n1 = note3(1, 2, 2);
n2 = note3(2, 2, 2);
n3 = note3(3, 2, 2);
n4 = note3(4, 2, 3);
n5 = note3(5, 2, 2);
n6 = note3(6, 2, 2);
n7 = note3(7, 2, 3);
n8 = note4(1, 2, 3);
n9 = note3(1, 3, 0); % Temps de silence
n10 = note3(1, 3, 3) + note3(3, 3, 3);

melodie = [n1,n2,n3,n4,n5,n6,n7,n8,n9,n10];

tracer(melodie);
son(melodie, frequence_echant);
```

Annexe :

Mélodie :Ah! vous dirai-je, Maman

```
frequence_echant = 20000;

n1 = note3(1, 0.6, 1.25);
n2 = note3(1, 0.6, 1.25);
n3 = note3(5, 0.6, 1.5);
n4 = note3(5, 0.6, 1.5);
n5 = note3(6, 0.6, 2);
n6 = note3(6, 0.6, 2);
n7 = note3(5, 1.2, 1.5);
melodie = [n1,n2,n3,n4,n5,n6,n7];
n1 = note3(4, 0.6, 2);
n2 = note3(4, 0.6, 2);
n3 = note3(3, 0.6, 1.5);
n4 = note3(3, 0.6, 1.5);
n5 = note3(2, 0.6, 1.5);
n6 = note3(2, 0.6, 1.5);
n7 = note3(1, 1.2, 1.5);
melodie = [melodie, n1,n2,n3,n4,n5,n6,n7];

tracer(melodie);
son(melodie, frequence_echant);
```

Annexe :

Mélodie : Hymne à la joie

```
% 'Ode à la Joie'
frequence_echant = 20000;

y1 = note3(3,0.5,1)+ note2(1,0.5,0.3);
y2 = note3(3,0.5,1);
y3 = note3(4,0.5,1);
y4 = note3(5,0.5,1);
melodie = [y1,y2,y3,y4];

y1 = note3(5,0.5,1)+ note1(5,0.5,0.4);
y2 = note3(4,0.5,1);
y3 = note3(3,0.5,1);
y4 = note3(2,0.5,1);
melodie = [melodie,y1,y2,y3,y4];

y1 = note3(1,0.5,1)+ note2(1,0.5,0.3);
y2 = note3(1,0.5,1);
y3 = note3(2,0.5,1);
y4 = note3(3,0.5,1);
melodie = [melodie,y1,y2,y3,y4];
```


Annexe :

Mélodie : Hymne à la joie

```
y1 = note3(3,0.75,1)+ note1(5,0.75,0.3);
y2 = note3(2,0.25,1);
y3 = note3(2,1,1);
melodie = [melodie,y1,y2,y3];
y1 = note3(3,0.5,1)+ note2(1,0.5,0.3);
y2 = note3(3,0.5,1);
y3 = note3(4,0.5,1);
y4 = note3(5,0.5,1);
melodie = [melodie,y1,y2,y3,y4];
y1 = note3(5,0.5,1)+ note1(5,0.5,0.3);
y2 = note3(4,0.5,1);
y3 = note3(3,0.5,1);
y4 = note3(2,0.5,1);
melodie = [melodie,y1,y2,y3,y4];
y1 = note3(1,0.5,1)+ note2(1,0.5,0.3);
y2 = note3(1,0.5,1);
y3 = note3(2,0.5,1)+ note1(5,0.5,0.3);
y4 = note3(3,0.5,1);
melodie = [melodie,y1,y2,y3,y4];
```

Annexe :

Mélodie : Hymne à la joie

```
y1 = note3(2,0.75,1)+ note2(1,0.75,0.3);
y2 = note3(1,0.25,1);
y3 = note3(1,0.75,0.75);
melodie = [melodie,y1,y2,y3];
y1 = note3(2,0.5,1)+ note1(5,0.5,0.3);
y2 = note3(2,0.5,1);
y3 = note3(3,0.5,1)+ note2(1,0.5,0.3);
y4 = note3(1,0.5,1);
melodie = [melodie,y1,y2,y3,y4];
y1 = note3(2,0.5,1)+ note1(5,0.5,0.3);
y2 = note3(3,0.25,1);
y3 = note3(4,0.25,1);
y4 = note3(3,0.5,1)+ note2(1,0.5,0.3);
y5 = note3(1,0.5,1);
melodie = [melodie,y1,y2,y3,y4,y5];
y1 = note3(2,0.5,1)+ note1(5,0.5,0.3);
y2 = note3(3,0.25,1);
y3 = note3(4,0.25,1);
y4 = note3(3,0.5,1)+ note2(1,0.5,0.3);
y5 = note3(2,0.5,1);
melodie = [melodie,y1,y2,y3,y4,y5];
```

Annexe :

Mélodie : Hymne à la joie

```
y1 = note3(1,0.5,1)+ note2(4,0.5,0.3);  
y2 = note3(2,0.5,1);  
y3 = note1(5,1,0.7)+note2(6,1,0.3);  
melodie = [melodie,y1,y2,y3];
```

```
y1 = note3(3,0.5,1)+ note2(1,0.5,0.3);  
y2 = note3(3,0.5,1);  
y3 = note3(4,0.5,1);  
y4 = note3(5,0.5,1);  
melodie = [melodie,y1,y2,y3,y4];
```

```
y1 = note3(5,0.5,1)+ note1(5,0.5,0.3);  
y2 = note3(4,0.5,1);  
y3 = note3(3,0.5,1)+ note2(1,0.5,0.3);  
y4 = note3(2,0.5,1);  
melodie = [melodie,y1,y2,y3,y4];
```

```
y1 = note3(1,0.5,1)+ note2(4,0.5,0.3);  
y2 = note3(1,0.5,1);  
y3 = note3(2,0.5,1)+ note1(5,0.5,0.3);  
y4 = note3(3,0.5,1);  
melodie = [melodie,y1,y2,y3,y4];
```

Annexe :

Mélodie : Hymne à la joie

```
y1 = note3(2,0.75,1)+ note2(1,0.75,0.3);  
y2 = note3(1,0.25,1);  
y3 = note3(1,1,0.7)+note2(1,1,0.3);  
melodie = [melodie,y1,y2,y3];
```

```
y1 = note3(2,0.5,1.5)+ note1(5,0.5,0.45);  
y2 = note3(2,0.5,1.5);  
y3 = note3(3,0.5,1.5)+ note2(1,0.5,0.45);  
y4 = note3(1,0.5,1.5);  
melodie = [melodie,y1,y2,y3,y4];
```

```
y1 = note3(2,0.5,1.5)+ note1(5,0.5,0.45);  
y2 = note3(3,0.25,1.5);  
y3 = note3(4,0.25,1.5);  
y4 = note3(3,0.5,1.5)+ note2(1,0.5,0.45);  
y5 = note3(1,0.5,1.5);  
melodie = [melodie,y1,y2,y3,y4,y5];
```

```
y1 = note3(2,0.5,1.5)+ note1(5,0.5,0.45);  
y2 = note3(3,0.25,1.5);  
y3 = note3(4,0.25,1.5);
```

Annexe :

Mélodie : Hymne à la joie

```
y4 = note3(3,0.5,1.5)+ note2(1,0.5,0.45);  
y5 = note3(2,0.5,1.5);  
melodie = [melodie,y1,y2,y3,y4,y5];
```

```
y1 = note3(1,0.5,1.5)+ note2(4,0.5,0.45);  
y2 = note3(2,0.5,1.5);  
y3 = note1(5,1,1)+note2(6,1,0.3);  
melodie = [melodie,y1,y2,y3];
```

```
y1 = note3(3,0.5,1.5)+ note2(1,0.5,0.45);  
y2 = note3(3,0.5,1.5);  
y3 = note3(4,0.5,1.5);  
y4 = note3(5,0.5,1.5);  
melodie = [melodie,y1,y2,y3,y4];
```

```
y1 = note3(5,0.5,1.5)+ note1(5,0.5,0.45);  
y2 = note3(4,0.5,1.5);  
y3 = note3(3,0.5,1.5)+ note2(1,0.5,0.45);  
y4 = note3(2,0.5,1.5);  
melodie = [melodie,y1,y2,y3,y4];
```

Annexe :

Mélodie : Hymne à la joie

```
y1 = note3(1,0.5,1.5)+ note2(4,0.5,0.45);  
y2 = note3(1,0.5,1.5);  
y3 = note3(2,0.5,1.5)+ note1(5,0.5,0.45);  
y4 = note3(3,0.5,1.5);  
melodie = [melodie,y1,y2,y3,y4];  
  
y1 = note3(2,0.75,1.5)+ note2(1,0.75,0.45);  
y2 = note3(1,0.25,1.5);  
y3 = note3(1,1,1.5)+note2(1,1,0.45);  
melodie = [melodie,y1,y2,y3];  
  
plot(melodie);  
son(melodie, frequence_echant);
```

Références



O. O'Reilly and P. J. Holmes,

Non-linear, non-planar and non-periodic vibrations of a string
J. Sound Vib. (1992).



U. Hassan, Z. Usman, and M. Sabieh Anwar,

Video-based spatial portraits of a nonlinear vibrating string
Am. J. Phys. (2012).



L. E. Kinsler, A. R. Frey, A. B. Coppens, and J. V. Sanders,

Fundamentals of Acoustics (4th edition)

Chin. Phys. C 38 (2014).



P. Perov, W. Johnson, and N. Perova-Mello,

The physics of guitar string vibrations

Phys. Rep. (2020).

Références



I. Johnston,

Measured Tones : The Interplay of Physics and Music
3rd ed., CRC Press, Boca Raton, 2009, Chap. 12-14.



T. D. R. Neville and H. Fletcher,

The Physics of Musical Instruments (2nd edition)
Springer, New York, 1998.



8notes.com,

Partitions et tablatures de guitare

<https://www.8notes.com/scores>