

Super-résolution fractale : Étude comparative des cycles PIFS et FIF appliqués à l'imagerie médicale

Les méthodes de zoom classiques lissent les détails, ce qui est critique en imagerie médicale où la texture porte le diagnostic. Intrigué par l'omniprésence des structures fractales biologiques, j'ai voulu déterminer si les approches itératives (PIFS/FIF) permettaient de préserver cette rugosité essentielle là où l'interpolation polynomiale échoue.

Les deux méthodes reposent sur des cycles itératifs contractants : l'image haute résolution émerge comme point fixe (attracteur) d'une boucle de transformations géométriques pour les PIFS, ou d'une récursion fonctionnelle pour les FIF. Ces cycles illustrent la convergence vers une structure complexe par répétition d'autosimilarités.

Le candidat atteste avoir travaillé en monôme.

Positionnement thématique (ÉTAPE 2) :

- *INFORMATIQUE (Informatique pratique)*
- *MATHEMATIQUES (Mathématiques Appliquées)*
- *MATHEMATIQUES (Analyse)*

Mots-clés (ÉTAPE 2)

Mots-clés (en français)

Système de fonctions itérées (IFS)
Super-résolution
Interpolation fractale
Théorème du point fixe
Imagerie médicale

Mots-clés (en anglais)

Iterated Function System (IFS)
Super-resolution
Fractal interpolation
Fixed point theorem
Medical imaging

Bibliographie commentée

La modélisation des structures naturelles, souvent irrégulières et rugueuses, échappe à la géométrie euclidienne classique. Ce constat motive l'exploration de la géométrie fractale comme cadre unifié pour le traitement du signal. L'ouvrage de référence de **Barnsley [1]** pose les fondements théoriques de cette approche : il démontre, via le théorème du point fixe de Banach appliqué à l'espace métrique des images (muni de la distance de Hausdorff), que toute image peut être approximée comme l'attracteur unique d'un Système de Fonctions Itérées (IFS). Ce résultat est crucial pour notre étude car il implique qu'une image fractale n'est pas définie par une résolution fixe, mais par l'opérateur contractant lui-même, permettant théoriquement un redimensionnement infini.

Cependant, trouver l'IFS global d'une image arbitraire est un problème inverse complexe. **Jacquin [2]** résout cette difficulté en introduisant les Systèmes de Fonctions Itérées Partitionnés (PIFS). Son approche exploite l'autosimilarité locale plutôt que globale : l'image est segmentée en blocs "domaines" et "ranges". Cette méthode a été raffinée algorithmiquement par **Fisher [3]**, dont les travaux sur le partitionnement adaptatif (Quadtree) sont essentiels pour notre implémentation de l'encodeur. Dans le cadre de la super-résolution, nous exploiterons la nature continue des transformations affines codées par Fisher : en décodant le système sur une grille de pixels plus dense que l'originale, nous forcerons l'algorithme à générer des détails synthétiques cohérents avec la structure locale de l'image.

Parallèlement à l'approche "mosaïque" des PIFS, **Barnsley et Harrington [4]** ont développé le concept de Fonctions d'Interpolation Fractale (FIF). Ici, l'objectif n'est plus de compresser une image, mais de construire une courbe continue passant exactement par un jeu de points de données, tout en contrôlant sa dimension fractale (sa rugosité). Pour appliquer cette théorie aux images médicales, nous nous appuyons sur l'extension aux surfaces bivariées proposée par **Bouboulis et Dalla [5]**. Leur méthode permet de générer des surfaces d'interpolation 2D sur des grilles rectangulaires, offrant une alternative directe aux splines bicubiques pour le ré-échantillonnage.

Enfin, l'application de ces concepts mathématiques au diagnostic médical nécessite un protocole d'évaluation rigoureux. L'article de **Thevenaz et al. [6]** servira de référence critique (témoin) : il met en évidence les limites des interpolations linéaires standards, notamment les effets de flou ("blurring") qui masquent les hautes fréquences nécessaires au diagnostic. Enfin, la pertinence clinique de notre étude est corroborée par la revue exhaustive de **Lopes et Betrouni [7]** en imagerie médicale. Ils établissent que la complexité texturale (dimension fractale) est un marqueur pathologique déterminant pour le diagnostic (architecture osseuse, vascularisation tumorale). Cette validation biologique justifie notre hypothèse centrale : un algorithme de super-résolution fiable doit impérativement préserver cette signature fractale (ce que promettent PIFS et FIF), là où les interpolations classiques introduisent un lissage artificiel destructeur d'information. Ce TIPE se propose donc d'arbitrer ce débat en quantifiant le compromis entre la fidélité mathématique (PSNR) et la richesse structurelle (SSIM) apportée par ces itérations fractales.

Problématique retenue

Face à l'interpolation polynomiale, quelle approche fractale (PIFS ou FIF) optimise le compromis PSNR/SSIM pour la super-résolution d'images médicales ?

Objectifs du TIPE du candidat

- Formaliser le cadre théorique des systèmes itératifs contractants en s'appuyant sur le théorème du point fixe de Banach pour justifier la convergence des deux modèles.
- Expliciter la construction algorithmique : détailler la mécanique de zoom par autosimilarité (PIFS) et la génération de surfaces rugueuses par récursion (FIF).
- Mener une étude comparative sur des images médicales en confrontant les résultats fractals aux standards polynomiaux via des métriques de fidélité (PSNR) et de structure (SSIM)
- Évaluer l'applicabilité clinique en analysant les limites des méthodes : entre la restauration réaliste des textures et le risque d'artefacts nuisibles au diagnostic.

Références bibliographiques (ÉTAPE 1)

- [1] BARNSLEY M. F. : *Fractals Everywhere : Academic Press, 1988 (Re-issued 2012).*
- [2] JACQUIN A. E. : *Image Coding Based on a Fractal Theory of Iterated Contractive Transformations : IEEE Trans. Image Processing, 1992.*
- [3] FISHER Y. : *Fractal Image Compression: Theory and Application : Springer-Verlag, 1995.*
- [4] BARNSLEY M. F., HARRINGTON A. N. : "The Calculus of Fractal Interpolation Functions" : *Journal of Approximation Theory, 1989.*
- [5] BOUBOULIS P., DALLA L. : *Fractal interpolation surfaces on rectangular grids : Journal of Math. Analysis and Applications, 2007.*
- [6] THEVENAZ P., BLU T., UNSER M. : "Fractal Interpolation Surfaces Derived from Fractal Interpolation Functions" : *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007.*
- [7] LOPES R., BETROUNI N. : *Fractal and multifractal analysis: A review with applications in clinical medicine : International Journal of Molecular Sciences, 2009.*

Références bibliographiques (ÉTAPE 2)

- [1] KAGGLE (UNIQUE DATA) : *Base de données d'imagerie médicale - Spinal Vertebrae Segmentation Dataset : <https://www.kaggle.com/datasets/trainingdatapro/spinal-vertebrae-segmentation>, consulté le 28 mai 2026*

[2] KAGGLE (NAVONEEL CHAKRABARTY) : Base de données d'imagerie médicale - Brain MRI Images for Brain Tumor Detection : <https://www.kaggle.com/datasets/navoneel/brain-mri-images-for-brain-tumor-detection>, consulté le 28 mai 2026

[3] KAGGLE (RISHAN HASAN TENIS) : Base de données d'imagerie médicale - CT- Medical Images : <https://www.kaggle.com/datasets/rishantenis/ct-medical-images>, consulté le 28 mai 2026

DOT

[1] : Juillet 2025 - Étude du théorème du point fixe de Banach et des systèmes de fonctions itérées. Ce cadrage m'a conduit à retenir une première approche par PIFS pour tester la super-résolution d'images médicales, en comparaison avec une interpolation polynomiale classique.

[2] : Août 2025 - Première implémentation Python de l'encodeur PIFS. Un blocage numérique est apparu lors de la résolution matricielle sur des images en entiers 8 bits, provoquant des dépassements de capacité. La conversion des calculs en flottants 64 bits a permis de stabiliser l'algorithme.

[3] : Novembre 2025 - Évaluation du PIFS sur plusieurs images médicales. Les artefacts de blocs dégradent la continuité visuelle, tandis que la réduction de leur taille augmente fortement le temps de calcul. Cette difficulté m'a amené à étudier une approche algébrique plus rapide : le FIF.

[4] : Janvier 2026 - Développement d'environnements de tests automatisés (pipelines en multiprocessing) pour réaliser des benchmarks rigoureux sur un dataset Kaggle d'images médicales (Cerveau, Poumons, Rachis).

[5] : Mai 2026 - Après comparaison des limites du PIFS et du FIF, choix d'une approche hybride. Le FIF fournit une première reconstruction rapide, puis le PIFS, optimisé par Quadtree, agit sur le résidu afin de mieux conserver les hautes fréquences.