

Script de Présentation TIPE

Super-résolution fractale : Étude comparative des cycles PIFS et
FIF appliqués à l'imagerie médicale

Mohamed Amine Hzikar

Filière MP 2026

*Document de répétition. Le texte correspond au script parlé exact, les encarts verts
indiquent les transitions de diapositives de la présentation Beamer.*

« DIAPO 1 : Page de Titre »

Mesdames, Messieurs les membres du jury, bonjour.

« DIAPO 2 : Introduction »

Dans la nature comme en mathématiques, la répétition d'un processus à l'infini engendre souvent une complexité fascinante. J'ai choisi d'appliquer cette mécanique itérative — qui est au cœur de la théorie des fractales — pour répondre à un défi majeur en imagerie médicale : l'agrandissement d'images, ou super-résolution.

« DIAPO 3 : Problématique »

L'interpolation polynomiale classique, comme le Bicubique, lisse les images et tend à détruire la rugosité tissulaire, pourtant vitale au diagnostic clinique. Mon étude a donc consisté à évaluer des algorithmes alternatifs exploitant cette récursivité, à savoir les méthodes fractales PIFS et FIF, en les jugeant sur deux métriques de qualité d'image : le PSNR et le SSIM. La problématique se pose donc en ces termes : Face à l'interpolation polynomiale, quelle approche fractale, PIFS ou FIF, optimise le compromis PSNR/SSIM pour la super-résolution d'images médicales ?

« DIAPO 4 : Plan de la présentation »

Pour structurer cette analyse, nous poserons d'abord les fondations mathématiques de ces algorithmes. Nous les confronterons ensuite qualitativement puis temporellement, avant d'aboutir à la conception d'un modèle hybride inédit.

« DIAPO 5 : Fondations Mathématiques. Énoncé formel du théorème de Banach, définition de l'espace E , la métrique L_2 , l'opérateur W , et la notation formelle de l'image »

Pour y répondre, posons notre cadre topologique : le théorème du point fixe de Banach.

Notre espace métrique complet est l'espace des images. Formellement, une image est modélisée par une fonction f associant à chaque coordonnée spatiale d'un domaine Ω , une intensité lumineuse dans un ensemble $\mathcal{C}$. Notre distance pour comparer deux images est l'Erreur Quadratique Moyenne.

« DIAPO 6 : Dynamique de Convergence. Séquence d'images (snapshots) montrant la construction itérative de l'attracteur »

Si l'on définit une application W qui transforme une image entière, et que cette application est contractante, Banach nous garantit une chose remarquable : la convergence de la boucle d'itérations. Peu importe l'image de départ, son itération infinie à travers notre application convergera inévitablement vers une image unique, appelée l'attracteur.

« DIAPO 7 : Le Théorème du Collage et objectif de minimisation »

Mais comment forcer cet attracteur infini à être exactement notre image médicale cible ? C'est le rôle du Théorème du Collage. Il prouve que si nous concevons une application telle que la distance entre l'image initiale et sa propre transformée est extrêmement petite, alors l'attracteur final sera visuellement identique à notre cible.

« DIAPO 8 : L'Équation Unifiée. Explication visuelle de la transformation locale et condition de contraction. (Note pour les annexes : Garder la démo du paradoxe dimensionnel en norme L_∞ implique la contraction en L_2 sous le coude si le jury pose la question) »

Une image étant trop complexe pour une seule équation, l'application est définie par morceaux. Comme vous pouvez le voir sur l'équation unifiée, pour calculer la valeur d'un pixel cible, l'algorithme combine trois éléments. Premièrement, une contraction spatiale v : numériquement, on fait le chemin inverse v^{-1} en multipliant les coordonnées de notre petite cible pour aller lire l'information dans une vaste zone source.

Deuxièmement, on applique une contraction de luminance, le contraste. Et troisièmement, on ajoute un ajustement de brillance.

La condition absolue pour que le théorème de Banach s'applique est que ce facteur de contraste s soit strictement inférieur à 1 pour chaque morceau local.

« DIAPO 9 : Approche Algébrique (FIF). L'équation $W_{ij}(f)$, le bloc cible, l'équation du plan q_{ij} et le schéma 3D »

Comment construire cette équation pour minimiser l'erreur du Collage ? Deux stratégies s'opposent.

La première est algébrique : le FIF. L'image est vue comme un maillage de points de contrôle. La contraction géométrique prend l'intégralité de l'image globale pour la rétrécir dans un minuscule bloc cible, par exemple de 2 par 2 pixels (v_{ij}). Le contraste s est imposé par l'utilisateur. L'astuce réside dans la brillance, définie comme un plan bilinéaire. L'algorithme résout un système d'équations 4×4 pour que ce plan s'accroche exactement aux quatre coins du bloc. La transformée est donc mathématiquement égale à l'image aux coins de chaque bloc 2×2 , garantissant une continuité absolue.

« DIAPO 10 : Approche Spatiale (PIFS). L'équation $W_i(f)$, la minimisation de l'EQM, et le schéma du rayon de recherche local »

La seconde approche est spatiale : le PIFS. L'image est découpée en blocs cibles R_i . Pour chacun, l'algorithme fouille un rayon de recherche local pour trouver un gros bloc source D_i similaire. Le contraste et la brillance sont calculés par la méthode des moindres carrés, en minimisant l'EQM. La correspondance n'est plus mathématiquement exacte, mais fortement approchée.

« DIAPO 11 : Le Protocole Expérimental Général. Affichage des 3 catégories anatomiques et des formules vulgarisées du PSNR et du SSIM »

Pour départager ces approches, j'ai automatisé un protocole expérimental sur trois catégories anatomiques distinctes : des IRM cérébrales, des scanners pulmonaires et des IRM du rachis.

Pour chaque expérience, je prélève un échantillon d'images haute résolution. Elles sont dégradées artificiellement puis reconstruites. Les performances sont évaluées en moyennant deux métriques : le PSNR, qui évalue l'erreur quadratique absolue pixel par pixel par rapport à la vérité clinique, et le SSIM, un indice qui évalue la similarité de la structure globale.

« DIAPO 12 : Résultats Expérience 1 - Les Barres. Graphiques comparatifs PSNR et SSIM »

Les résultats de la première expérience révèlent une hiérarchie intéressante.

Sur le PSNR, l'interpolation Bicubique domine. C'est prévisible : cette métrique récompense le lissage et sanctionne les micro-variations fractales.

En revanche, les approches fractales s'imposent sur le SSIM, avec un score presque identique d'environ 0,92. C'est un match nul structurel parfait entre le PIFS et le FIF.

« DIAPO 13 : Preuves visuelles (ROIs). Affichage d'une grille avec des rectangles zoomés sur le Bicubique, le FIF et le PIFS »

Pourtant, malgré ces scores identiques, leurs approches diffèrent visuellement.

Sur ces zooms critiques d'une IRM cérébrale, on observe que le Bicubique est flou. Le FIF présente une surface très continue et un peu artificielle. Le PIFS, lui, semble réellement reconstruire la granulation et la rugosité originelles des tissus.

« DIAPO 14 : Profil d'intensité 1D. Graphique des 4 courbes superposées, pointant sur le fameux "pic" préservé par le PIFS »

Pour quantifier cette impression, j'ai tracé le profil d'intensité 1D d'une coupe tissulaire. On trace une ligne droite à travers une zone texturée de l'image, et on relève l'intensité du niveau de gris de chaque pixel. La courbe noire pointillée représente la réalité. Les courbes du Bicubique et du FIF atténuent fortement les variations et peinent à restituer la véritable dynamique du tissu. Le FIF agit ici comme un lisseur. À l'inverse, la courbe verte du PIFS est la seule à préserver et à reconstruire fidèlement ce pic d'intensité majeur, là où les autres méthodes l'ont effacé.

Cependant, le PIFS génère des micro-cassures géométriques aux frontières de ses blocs, ce qui explique pourquoi le SSIM le sanctionne durement malgré son réalisme.

Face à ce dilemme entre la continuité du FIF et la précision texturale du PIFS, l'arbitrage pour le choix final pour un usage clinique dépendra donc du temps de calcul via une seconde expérience : le tracé des Frontières de Pareto.

« DIAPO 15 : Frontière de Pareto - L'échec de la grille fixe. Graphique avec l'axe des temps en échelle logarithmique »

J'ai donc mis en place une seconde expérience pour tracer ce qu'on appelle la Frontière de Pareto qui est la courbe du compromis exact entre le Temps de calcul et la Qualité structurelle (SSIM).

Alors que le Bicubique et le FIF ont un temps d'exécution fixe, le PIFS permet d'étudier les compromis temps/qualité en faisant varier la taille de ses blocs Range de 16 à 2 pixels.

Dans une première approche avec une grille de blocs fixe, le PIFS est un désastre computationnel. L'axe des temps est ici en échelle logarithmique. Pour obtenir un niveau clinique acceptable, le temps explose à plus de 10 minutes par image, loin derrière le FIF qui se résout en à peine 3 secondes.

« DIAPO 16 : L'Optimisation Spatiale (Mécanique du Quadtree). Schéma explicatif de la division récursive des blocs »

Pour briser ce mur de complexité, j'ai implémenté une architecture adaptative Quadtree. L'optimisation Quadtree rend la taille des blocs dynamique en évaluant d'abord l'erreur de reconstruction (EQM) de grands blocs Range par rapport à leurs blocs Domain. Si cette erreur dépasse un seuil de tolérance θ (comme sur les zones complexes), le bloc est scindé récursivement en quatre sous-blocs jusqu'à ce que le critère de qualité soit respecté ou que la taille limite soit atteinte.

« DIAPO 17 : Frontière de Pareto - Le sauvetage du Quadtree. Graphe avec l'axe des temps en échelle linéaire »

On ne fait varier plus la taille des blocs Ranges, on fait varier le seuil de tolérance d'erreur, noté θ .

Sur la seconde Frontière de Pareto, le gain est massif. L'axe des temps est ici en échelle linéaire. En évitant de sur-partitionner les zones inutiles de l'IRM, l'algorithme divise son temps d'exécution par plus de 3,5, plafonnant désormais à 3 minutes même avec le réglage le plus exigeant ($\theta = 0.5$). L'algorithme fait preuve d'une grande résilience : en relâchant le seuil (de $\theta = 0.5$ à $\theta = 80$), on divise le temps de calcul par trois (tombant à 50 secondes) tout en maintenant une excellente qualité structurelle et le SSIM ne baisse que de ≈ 0.81 à ≈ 0.78 . Le PIFS passe sous les 3 minutes et devient cliniquement viable.

« DIAPO 18 : L'Architecture Hybride Différentielle. Schéma séquentiel de l'intégration I -> FIF -> Résidu -> PIFS Quadtree -> Synthèse »

Bien que viable, le PIFS reste plus lent que le FIF. Refusant de choisir entre ces deux paradigmes, j'ai conçu une hybridation inspirée du traitement du signal résiduel.

Le FIF effectue d'abord un dégrossissage structurel instantané. On extrait ensuite l'image résiduelle, la différence entre l'originale et la prédiction du FIF. Ce résidu est majoritairement noir, ne contenant que les hautes fréquences manquantes.

Le PIFS Quadtree n'est appliqué que sur ce résidu. L'arbre s'élague massivement. La synthèse finale réunit simplement la continuité du FIF et la texture récupérée par le PIFS.

« DIAPO 19 : Résultats Exp 3 (Partie 1 - Qualité). Le diagramme en barres de l'Expérience 1 avec l'ajout de la colonne "Hybride" en orange »

Réévalué dans les mêmes conditions que l'expérience 1, l'algorithme Hybride surpasse le FIF en PSNR (30,01 dB contre 29,78 dB) en réinjectant la texture manquante, et égale parfaitement le PIFS en SSIM (0,9221 contre 0,9220) avec un minimum de calculs. Face à cette égalité qualitative absolue entre l'Hybride et le PIFS, le temps de calcul (Frontière de Pareto) devient l'unique critère pour trancher en milieu hospitalier.

« DIAPO 20 : Résultats Exp 3 (Partie 2 - Pareto). Frontière de Pareto finale Hybride vs PIFS avec zoom opérationnel »

L'évaluation de cette approche Hybride dévoile une Frontière de Pareto finale remarquable en échelle linéaire des temps.

Premièrement, on observe une domination stricte dans la zone opérationnelle, la courbe de l'hybride surpasse l'approche spatiale pure. À temps d'exécution égal, l'hybride garantit une meilleure structure. Deuxièmement, un mur d'efficacité asymptotique se dessine. L'algorithme plafonne autour de 35 secondes de temps minimal. Enfin, le gain multiplicateur est indéniable : pour atteindre une qualité SSIM cible, le PIFS classique nécessitait 100 secondes, là où l'Hybride l'atteint en seulement 35 secondes.

« DIAPO 21 : Conclusion Générale. Synthèse visuelle finale rappelant l'apport respectif des méthodes et la force du modèle hybride »

En conclusion, notre parcours nous a menés de la théorie mathématique à l'étude d'un véritable compromis d'ingénierie médicale. La problématique exigeait d'arbitrer entre le PIFS et le FIF.

L'approche spatiale restaure excellemment la texture mais coûte en temps, tandis que l'approche algébrique est fulgurante mais trop lisse. L'aboutissement de ce travail réside dans leur synthèse différentielle. Le FIF accomplit le gros œuvre topologique instantanément, laissant au PIFS Quadtree l'unique tâche d'injecter la rugosité tissulaire là où elle fait réellement défaut.

Ce modèle hybride offre une réponse optimale à notre problématique, alliant la sécurité d'une structure continue, la précision d'une texture clinique, et un temps de traitement viable pour le diagnostic hospitalier.

« DIAPO 22 : Clôture. "Merci pour votre attention." centré »

Je vous remercie de votre attention.