AFFENE Mokhtar

MP

Instabilité cyclique des algorithmes de recherche de racines de polynômes

Notre intérêt pour ce sujet est né d'une fascination pour le paradoxe de la méthode de Newton: un algorithme à la définition élémentaire qui engendre pourtant une dynamique chaotique d'une complexité visuelle et théorique surprenante. Nous nous sommes notamment intéressés à sa généralisation pour les polynômes : l'algorithme de Weierstrass.

L'ancrage au thème « Cycles » est central dans notre étude. En effet, ce qui empêche les algorithmes de Newton et de Weierstrass de converger globalement est la présence de cycles attractifs qui piègent la suite itérative loin des racines. L'objectif est d'identifier ces cycles parasites pour mieux les contourner.

Le candidat atteste avoir travaillé en groupe.

Liste des membres du groupe :

Positionnement thématique (ÉTAPE 1) :

- *MATHEMATIQUES (Algèbre)*
- *INFORMATIQUE (Informatique pratique)*
- *MATHEMATIQUES (Analyse)*

Mots-clés (ÉTAPE 2)

Mots-clés (en français)	**Mots-clés (en anglais)**
Méthode de Newton	*Newton' method*
Cycle attractif	*Attracting cycle*
Théorème de Fatou	*Fatou's theorem*
Bassin d'attraction	*Basin of attraction*
Convergence	*Convergence*

Bibliographie commentée

La recherche des racines de polynômes est un problème historique fondamental ; pourtant les algorithmes itératifs classiques présentent des limites structurelles. Si la méthode de Newton est efficace localement, sa dynamique globale est complexe. **Vanoye et Martin** montrent (dans [5]) qu'il existe des familles de fonctions pour lesquelles la méthode de Newton cycle indéfiniment sur des orbites périodiques, empêchant toute convergence .

plus spécifiquement en ce qui concerne les polynômes, la méthode de Weierstrass est souvent présentée comme une généralisation robuste permettant d'approcher toutes les racines simultanément. Cependant, il a été récemment démontré ([1]) que cet algorithme n'est pas globalement convergent non plus : pour certains polynômes de degré plus grand que 3 il existe des cycles attractifs ouverts qui piègent les itérations .

Il devient alors nécessaire d'étudier la topologie de ces échecs. **Nishizawa et Fujimura** analysent la structure fractale des bassins de convergence et la répartition des zones chaotiques [2].

Face à ces instabilités cycliques intrinsèques aux méthodes discrètes, l'approche continue semble une voie prometteuse. **Sahari** étudie des méthodes de type "Newton continu" qui, en transformant l'itération discrète en équation différentielle, permettent de lisser la trajectoire et d'éviter le chaos [3]. Enfin, une alternative puissante réside dans les méthodes d'homotopie, explorées par **Beltran** [6] et **Tran** [7], qui proposent de déformer continûment un système simple vers le système cible, garantissant théoriquement le suivi des racines.

Problématique retenue

Dans quelle mesure l'identification des cycles attractifs, responsables de la non convergence des méthodes itératives classiques (Newton, Weierstrass), permet-elle de justifier et de mettre en œuvre des méthodes continues ou homotopiques pour garantir une résolution globale ?

Objectifs du TIPE du candidat

Je me propose d'analyser la méthode de Weierstrass à travers la méthode de Newton pour confirmer qu'elle hérite de ses défauts (cycles parasites). Face à ce constat, je me concentrerai sur l'étude et l'implémentation d'une méthode hybride : l'homotopie linéaire. Mon travail consistera à programmer un algorithme de suivi de chemin (boucle prédiction correction) pour relier les racines d'un système connu à celles du polynôme cible, et à comparer son efficacité et sa robustesse face à l'algorithme de Weierstrass sur des cas pathologiques.

Références bibliographiques (ÉTAPE 1)

[1] BERNHARD REINKE, DIERK SCHLEICHER AND MICHAEL STOLL : The Weierstrass–Durand–Kerner root finder is not generally convergent *: Mathematics of Computation, 2023*

[2] K. NISHIZAWA, M. FUJIMURA : Families of Rational Maps and Convergence Basins of Newton's Method, *: Proc. Japan Acad., 1992*

[3] S. M. SAHARI : Sur la dynamique de quelques méthodes donnant les racines de polynômes *: Université Badji Mokhtar Annaba, 2011*

[4] D. SAUPE : Discrete Versus Continuous Newton's Method: A Case Study *: Acta Applicandae Mathematicae 13,1988*

[5] E. VANOYE, M. MARTIN : Newton's Method Cycles *: Arcadia University, 2016*

[6] C. BELTRAN, A. LEYKIN : Certified Numerical Homotopy Tracking *: Experimental Mathematics, 2012*

[7] B. D. TRAN : Optimal Path Homotopy For Univariate Polynomials *: Quy Nhon University, Vietnam, 2022*

Références bibliographiques (ÉTAPE 2)

[1] MAGISTÈRE DE MATHÉMATIQUES D'ORSAY TRAVAIL ENCADRÉ DE RECHERCHE : Dynamique holomorphe : du local au global. *: Université Paris-Saclay, 27 mai 2022.*

[2] J. H. CURRY, L. GARNETT ET D. SULLIVAN. : On the Iteration of a Rational Function : Computer Experiments with Newton's Method. *: J. H. Curry, L. Garnett et D. Sullivan. On the IteratiCommunications in Mathematical Physics, vol. 91, no. 2, pp. 267–277, 1983.*

[3] JAMES T. CAMPBELL AND JARED T. COLLINS : SPECIFYING ATTRACTING CYCLES FOR NEWTON MAPS OF POLYNOMIALS *: 2010 Mathematics Subject Classification: 30D05, 34M03, 37F10, 39B12*

DOT

[1] *: [Septembre] - Recherche de sujet et initiation aux homotopies: Cadrage du projet autour de la résolution polynomiale. Étude des homotopies pour la recherche de racines, en particulier les homotopies optimisées à travers l'article [7] B. D. TRAN : Optimal Path Homotopy For Univariate Polynomials.*

[2] *: [Début Octobre] - Pivot vers l'homotopie linéaire et la correction de Newton Face à la complexité et au manque d'efficacité de l'algorithme précédent, réorientation des recherches vers l'homotopie linéaire via la publication [6] C. BELTRAN, A. LEYKIN : Certified Numerical Homotopy Tracking : Experimental. Étude et mise en œuvre de la "boucle prédiction-correction" utilisant l'algorithme de Newton pour la phase de correction.*

[3] *: [Fin Octobre] - Transition vers la recherche dynamique (via la méthode de Weierstrass): Élargissement de l'étude à l'algorithme de Weierstrass, conçu pour identifier toutes les racines simultanément. Analyse de ses limites numériques et mise en évidence des configurations spécifiques où l'algorithme se met à cycler.*

[4] *: [Décembre] - Recentrage sur les cycles de l'algorithme de Newton: Constat de la complexité majeure des méthodes nécessaires pour prouver l'existence des cycles attractifs dans l'algorithme de Weierstrass (décrite dans l'article [1] B. REINKE, D. SCHLEICHER, M. STOLL : The Weierstrass–Durand–Kerner). Choix stratégique de se recentrer sur l'algorithme de Newton, qui présente lui aussi ce défaut de non-convergence par boucles périodiques.*

[5] *: [Janvier] - Exploration du cas continu (également qualifié de Newton amorti) à travers [4] D. SAUPE : Discrete Versus Continuous Newton's Method. .*

[6] *: [Janvier - Avril] - Focalisation sur la dynamique de l'algorithme de Newton. Face à la grande richesse de la dynamique et des propriétés de cet algorithme, décision de se consacrer exclusivement à son analyse et de ne pas revisiter les autres méthodes explorées au premier semestre.*