Cycles attractifs et non-convergence dans l’algorithme de Newton:

Etude de l’algorithme de Newton

AFFENE Mokhtar

2026

Sommaire

Introduction et Enjeux

I. Définitions et Propriétés
II. Etude des quadratiques
III.Théorème de Fatou

Ouverture
Annexe

Introduction

Les Enjeux liées à la résolution des équations polynomiales:

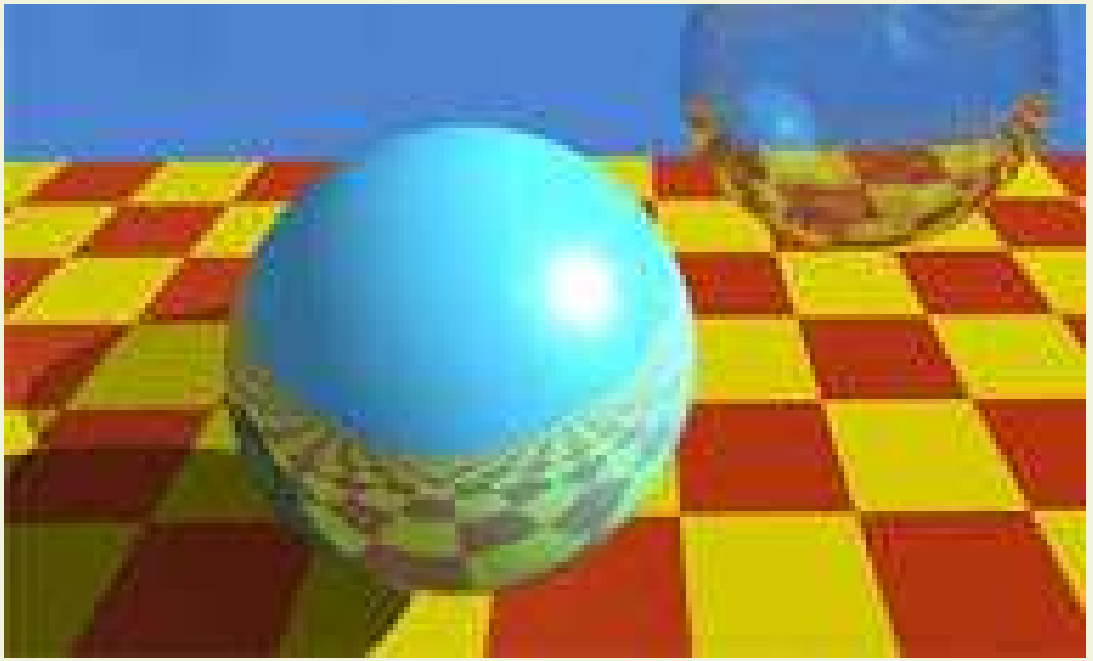
- ❑ Automatique (La stabilité des systèmes):



Introduction

Les Enjeux liées à la résolution des équations polynomiales:

- Imagerie 3D et CAO (Calcul d'intersections)



Introduction:

Méthode de Newton:

$$z_{n+1} = N_p(z_n) = z_n - \frac{P(z_n)}{P'(z_n)}$$

Si on prend le polynôme : $P(X) = X^2 - 2$ et $z_0 = 1$

$n = 1$	$z_1 = 1.5$
$n = 2$	$z_2 = 1.416666666667$
$n = 3$	$z_3 = 1.414215686274$
$n = 4$	$z_4 = 1.414213562374$
$n = 5$	$z_5 = 1.414213562373$

$\sqrt{2} = 1.414213562373 \ldots$

Introduction:

Polynôme de Small: $P(X) = X^3 - 2X + 2$

$$N_P(X) = X - \frac{X^3 - 2X + 2}{3X^2 - 2}$$

$$N_P(0) = 0 - \frac{0 - 2\times 0 + 2}{-2} = 1$$

$$N_P(1) = 1 - \frac{1 - 2 + 2}{3 - 2} = 0$$

Introduction:

$$z_{n+1} = N_P(z_n) = z_n - \frac{z_n^3 - 2z_n + 2}{3z_n^2 - 2}$$

$z_0 = 0.1$

$n = 1$	$z_1 = 1.01421$
$n = 2$	$z_2 = 0.07965$
$n = 3$	$z_3 = 1.00909$
$n = 4$	$z_4 = 0.05222$
$n = 5$	$z_5 = 1.00396$
$n = 6$	$z_6 = 0.02332$
$n = 7$	$z_7 = 1.00080$
$n = 8$	$z_8 = 0.00480$
$n = 9$	$z_9 = 1.00003$
$n = 10$	$z_{10} = 0.00020$

$z_0 = 0.99$

$n = 1$	$z_1 = -0.0631734552$
$n = 2$	$z_2 = 1.0062760164$
$n = 3$	$z_3 = 0.0365136475$
$n = 4$	$z_4 = 1.0019550979$
$n = 5$	$z_5 = 0.0116171280$
$n = 6$	$z_6 = 1.0002009093$
$n = 7$	$z_7 = 0.0012042464$
$n = 8$	$z_8 = 1.0000021735$
$n = 9$	$z_9 = 0.0000130412$
$n = 10$	$z_{10} = 1.0000000002$

Sommaire

Introduction et Enjeux

I. Définitions et Propriétés
II. Etude des quadratiques
III.Théorème de Fatou

Ouverture
Annexe

Sommaire

Introduction et Enjeux

I. Définitions et Propriétés
II. Etude des quadratiques
III.Théorème de Fatou

Ouverture
Annexe

Définitions et Propriétés

Définitions:
$P \in \mathbb{C}[X]$

Orbite : $\mathcal{O}(z) = \{ {N_P}^{\circ n}(z) | \, n \in \mathbb{N}\}$

Point k-périodique:
z est un point périodique de période k si:

$$\forall \, 0 < j < k, \;\; {N_P}^{\circ j}(z) \neq z \;\text{ et }\; {N_P}^{\circ k}(z) = z$$

Cycle (de longueur k) **:** $\{ {N_P}^{\circ n}(z) | \, n \in \{1, \dots, k\}\}$

Définitions et Propriétés

Définitions:

$P \in \mathbb{C}[X]$, $c = \{z_0, z_1, \dots, z_{k-1}\}$

Cycle attractif : c est un cycle attractif s'il existe $r > 0$ telque: $\forall z \in B(z_0, r)$,

$$\lim_{n \to \infty} \left({N_P}^{\circ kn}(z) \right) = z_0$$

Cycle répulsif : c est un cycle répulsif s'il existe $r > 0$ telque: $\forall z \in B(z_0, r)$, $n_0 \in \mathbb{N}, \forall\, n > n_0$,

$${N_P}^{\circ kn}(z) \notin B(z_0, r)$$

Définitions et Propriétés

Définitions:

$P \in \mathbb{C}[X]$, $c = \{z_0, z_1, \dots, z_{k-1}\}$ (cycle attractif)

Bassin d'attraction (d'un cycle attractif)**:**

c est un cycle attractif ,il existe $r > 0$ telque:

$$\forall z \in B(z_0, r), \lim_{n \to \infty} \left({N_P}^{\circ kn}(z) \right) = z_0$$

Alors:

$$\mathcal{A}(c) = \bigcup_{n=0}^{\infty} N_P^{-k} \ \ (B(z_0, r))$$

Bassin d'attraction immédiat : c'est la composante connexe de $\mathcal{A}(c)$ qui contient z_0.

Définitions et Propriétés

Définitions:

$P \in \mathbb{C}[X]$,

Ensemble de Julia rempli :

$$\mathcal{K}(P) = \{z \in \mathbb{C} \mid \left(N_P{}^{\circ n}(z)\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$$

Ensemble de Julia :

$$\mathcal{J}(P) = \partial\mathcal{K}(P)$$

Définitions et Propriétés

Le multiplicateur:

Pour un cycle $c = (z_0, z_1, \dots, z_k)$, on pase:

$$\Lambda(c) = \left(N_P{}^{\circ k}\right)'(z_0) = \dots = \left(N_P{}^{\circ k}\right)'(z_k)$$

$$\Lambda(c) = N_P'(z_0) \times \dots \times N_P{}'(z_k)$$

Caractérisation des cycles attractifs:

c est un cycle attractif si et seulement si $|\Lambda(c)| < 1$

Caractérisation des cycles répulsifs:

c est un cycle répulsif si et seulement si $|\Lambda(c)| > 1$

Définitions et Propriétés

$P = (X-\alpha)^m Q(X), \qquad N_P(\alpha) = \alpha$

On a :

$$N_P(X) = X - \frac{(X-\alpha)^m Q(X)}{m(X-\alpha)^{m-1}Q(X) + (X-\alpha)^m Q'(X)}$$

$$= X - \frac{(X-\alpha)Q(X)}{mQ(X) + (X-\alpha)Q'(X)}$$

$$= X - \frac{U(X)}{V(X)}$$

On a:

$U(\alpha) = 0\,, \;\; U'(\alpha) = Q(\alpha)\,,$

$V(\alpha) = mQ(\alpha)\,, \;\; V'(\alpha) = (m+1)Q'(\alpha)$

Définitions et Propriétés

$P = (X - \alpha)^m Q(X), \qquad N_P(\alpha) = \alpha$

On a :

$$N_P{}'(X) = 1 - \frac{U'(X)V(X) - U(X)V'(X)}{V^2(X)}$$

Donc:

$$N_P'(\alpha) = 1 - \frac{m \times Q^2(\alpha)}{m^2 \times Q^2(\alpha)} = 1 - \frac{1}{m} < 1$$

Définitions et Propriétés

$\boldsymbol{N_P(\infty) = \infty}$

$w = \psi(z) = \frac{1}{z}$

On a :

$$g(X) = \psi \circ N_P \circ \psi^{-1}$$
$$\Lambda = g'(0)$$

Donc:

$$g'(0) = \lim_{w \to 0} \frac{g(w) - g(0)}{w} = \lim_{w \to 0} \frac{g(w)}{w} = \lim_{z \to \infty} \frac{z}{N_P(z)}$$

Or:

$$N_P(z) = z - \frac{P(z)}{P'(z)} \sim z - \frac{z}{d}$$
$$N_P(z) \sim z\left(1 - \frac{1}{d}\right)$$

Définitions et Propriétés

$\boldsymbol{N_P}(\infty) = \infty$

Fianlement :

$$\Lambda = \lim_{z \to \infty} \frac{z}{z\left(\frac{d-1}{d}\right)} = \frac{d}{d-1} > 1$$

Sommaire

Introduction et Enjeux

I. Définitions et Propriétés
II. Etude des quadratiques
III.Théorème de Fatou

Ouverture
Annexe

Cas des polynômes de degrés 2

Caractérisation de l'ensemble de Julia pour les polynômes quadratiques:

On a $\boldsymbol{P(z) = (z - \alpha)(z - \beta)}$, $\quad \boldsymbol{P'(z) = 2z - (\alpha + \beta)}$

On a $N_P(z) - \alpha = \frac{(z-\alpha)^2}{2z-(\alpha+\beta)}$ de même $N_P(z) - \beta = \frac{(z-\beta)^2}{2z-(\alpha+\beta)}$

Donc $\frac{N_P(z)-\alpha}{N_P(z)-\beta} = \frac{(z-\alpha)^2}{(z-\beta)^2}$

Si on pose $w = \frac{z-\alpha}{z-\beta}$

Donc après une étape de Newton : $w_{n+1} = w_n^2$

Ainsi si $|w_0| > 1$ la suite tend vers l'infini

Si $|w_0| < 1$ la suite tend vers 0

Donc l'ensemble de Julia est le cercle unité

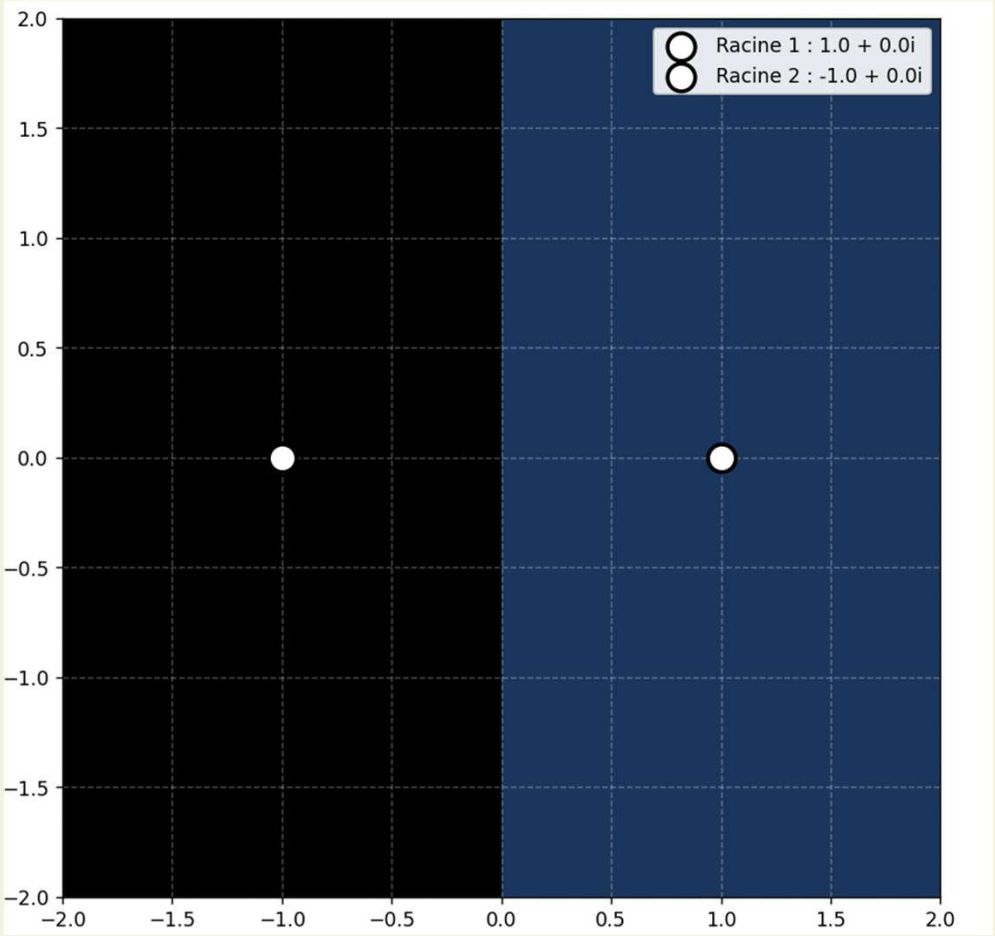
Cas des polynômes de degrés 2

On a $|\boldsymbol{w}| = 1 \iff \left|\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right| = 1 \iff |z-\alpha| = |z-\beta|$

Donc l'ensemble de Julia est la médiatrice de $[\alpha, \beta]$

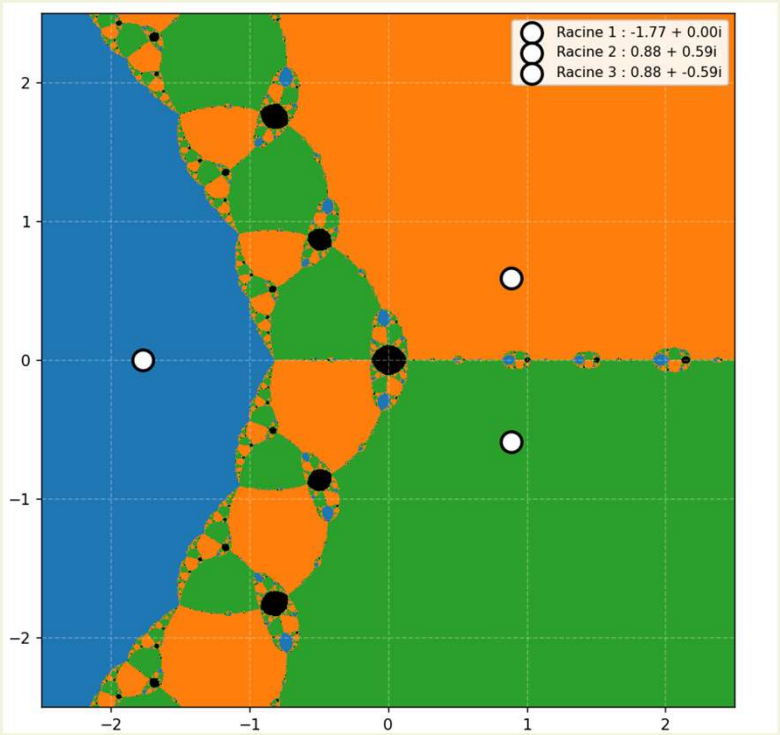
Cas des polynômes de degrés 2

Les deux bassins d'attraction de N_P
Pour $P = X^2 - 1$

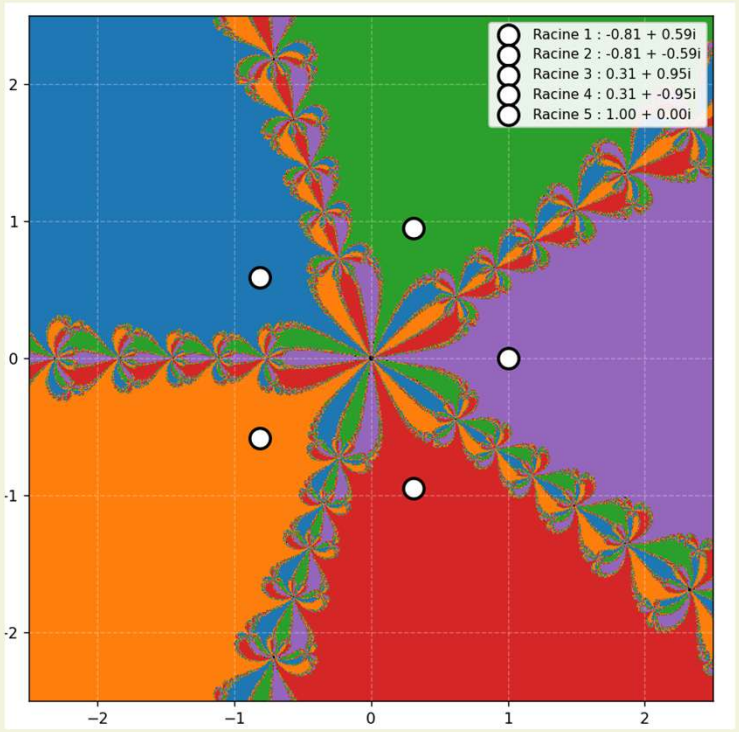


Cas des polynômes de degrés 2

À partir des polynômes qui ont des degrés plus ou égale à 3, l'ensemble de Julia devient chaotique



$$P = X^3 - 2X + 2$$



$$P = X^5 - 1$$

Sommaire

Introduction et Enjeux

I. Définitions et Propriétés
II. Etude des quadratiques
III.Théorème de Fatou

Ouverture
Annexe

Théorème de Fatou

Points critiques de N_P :

z est un point critique de N_P si : $N_P'(z) = 0$

$$N_p{}'(z) = \frac{P(z)P''(z)}{(P^2)'(z)}$$

Les points critique de N_P sont les racines de P et les racines de P''

Les racine de P'' sont appelés **points critiques libres** de N_P.

Théorème de Fatou

Théorème de Fatou

.

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction rationnelle de degrés au moins 2.
Tout bassin d'attraction immédiat d'un cycle périodique attractif de f contient au moins un point critique de f

Théorème de Fatou

Critère d'existence des cycles attractifs pour P :

1) On cherche les point d'inflexion de P.

2) On vérifie pour chaqu'un de ceux-ci s'il converge vers l'une des racines de P ou vers un cycle attractif.

Théorème de Fatou

Exemple : $P = X^4 - 3X + 2{,}98$

On a :

$$P' = 4X^3 - 2{,}98$$
$$P'' = 12X^2$$

Donc:

$$P''(z) = 0 \iff z = 0$$

Or:

$$N_P(X) = X - \frac{X^4 - 3X + 2{,}98}{4X^3 - 3}$$

Algorithme de Newton

Exemple : $P = X^4 - 3X + 2{,}98$

$z_0 = 0$

$n = 1$	$z_1 = 0.9933$
$n = 2$	$z_2 = -0.0643$
$n = 3$	$z_3 = 0.9929$
$n = 4$	$z_4 = -0.0693$
$n = 5$	$z_5 = 0.9928$
$n = 6$	$z_6 = -0.0706$
$n = 7$	$z_7 = 0.9928$
$n = 8$	$z_8 = -0.0710$
$n = 9$	$z_9 = 0.9928$
$n = 10$	$z_{10} = -0.0711$

$z_0 \approx -0,0712$ $\quad$ $z_1 \approx 0,9928$

$$N_P'(-0{,}0712) = \frac{3.1936 \times 0.0608}{(-3.0014)^2} \approx 0.0216$$

Et

$$N_P'(0.9928) = \frac{0{,}9731 \times 11{,}8282}{(0{,}9141)^2} \approx 13{,}7777$$

Finalement:

$$\Lambda = N_P'(-0{,}0712) \times N_P'(0.9928) \approx 0{,}2968 < 1$$

Théorème de Fatou

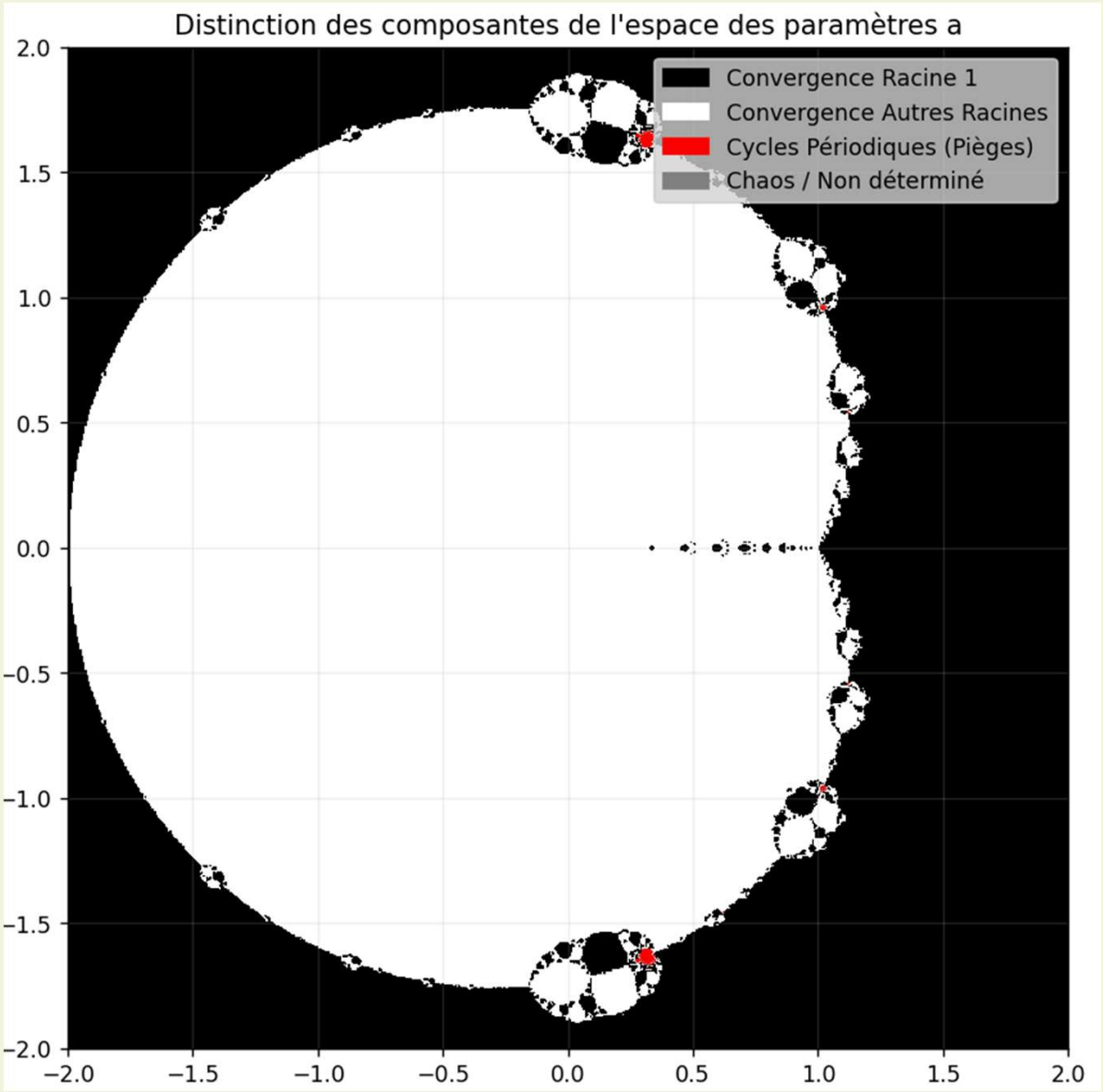
Réduction de l'espace des

si $T \in Aff(\mathbb{C})$, $\quad T_P = \prod_k (X - T(\alpha_k))$
et $N_{T_P} = T \circ N_P \circ T^{-1}$

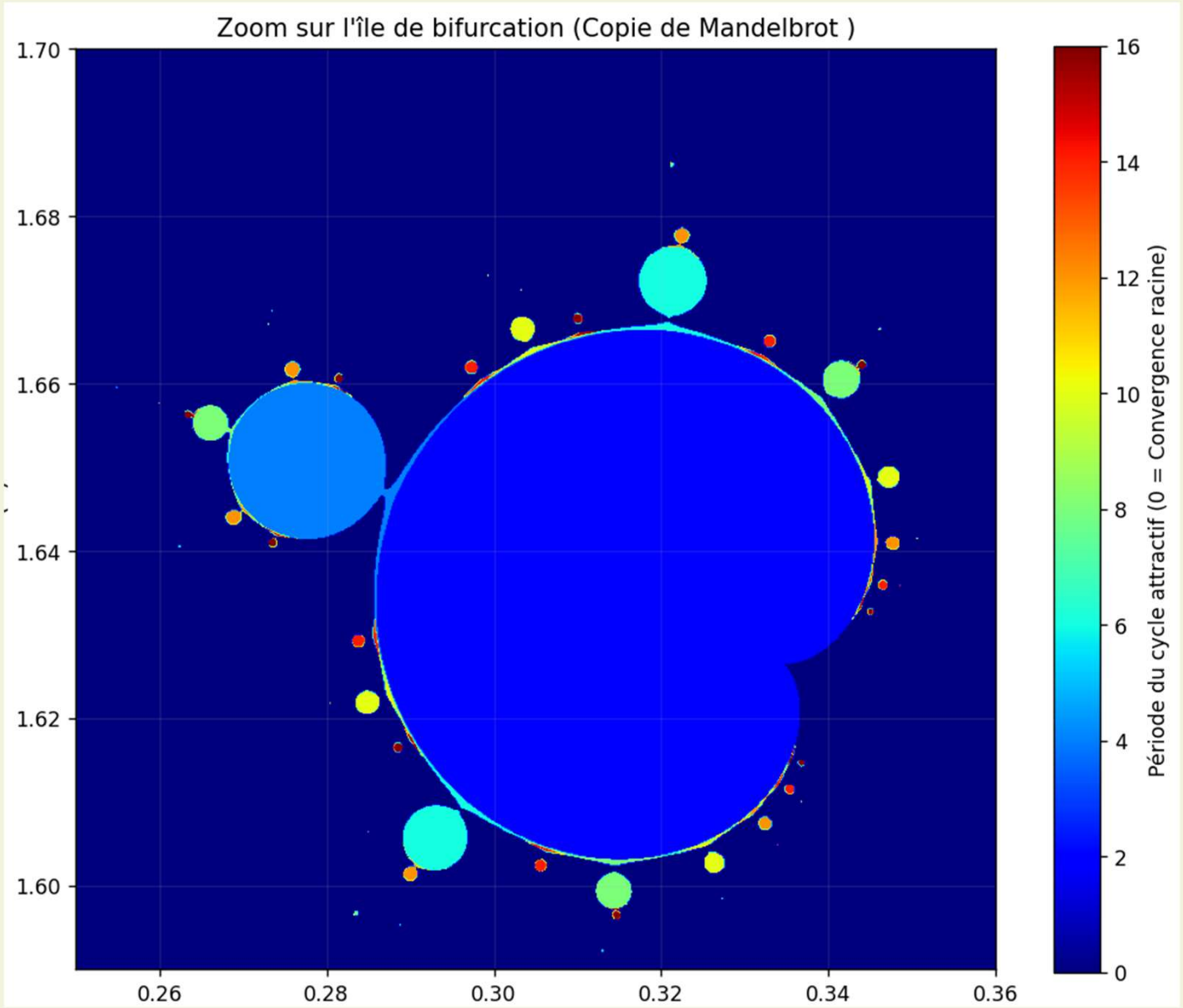
On peut donc mettre tous les polynômes cubiques unitaires (sauf X^3) de la forme:

$$P_a = X^3 + (a-1)X - a\,, \qquad a \in \mathbb{C}$$

Théorème de Fatou



Théorème de Fatou



Sommaire

Introduction et Enjeux

I. Définitions et Propriétés
II. Etude des quadratiques
III.Théorème de Fatou

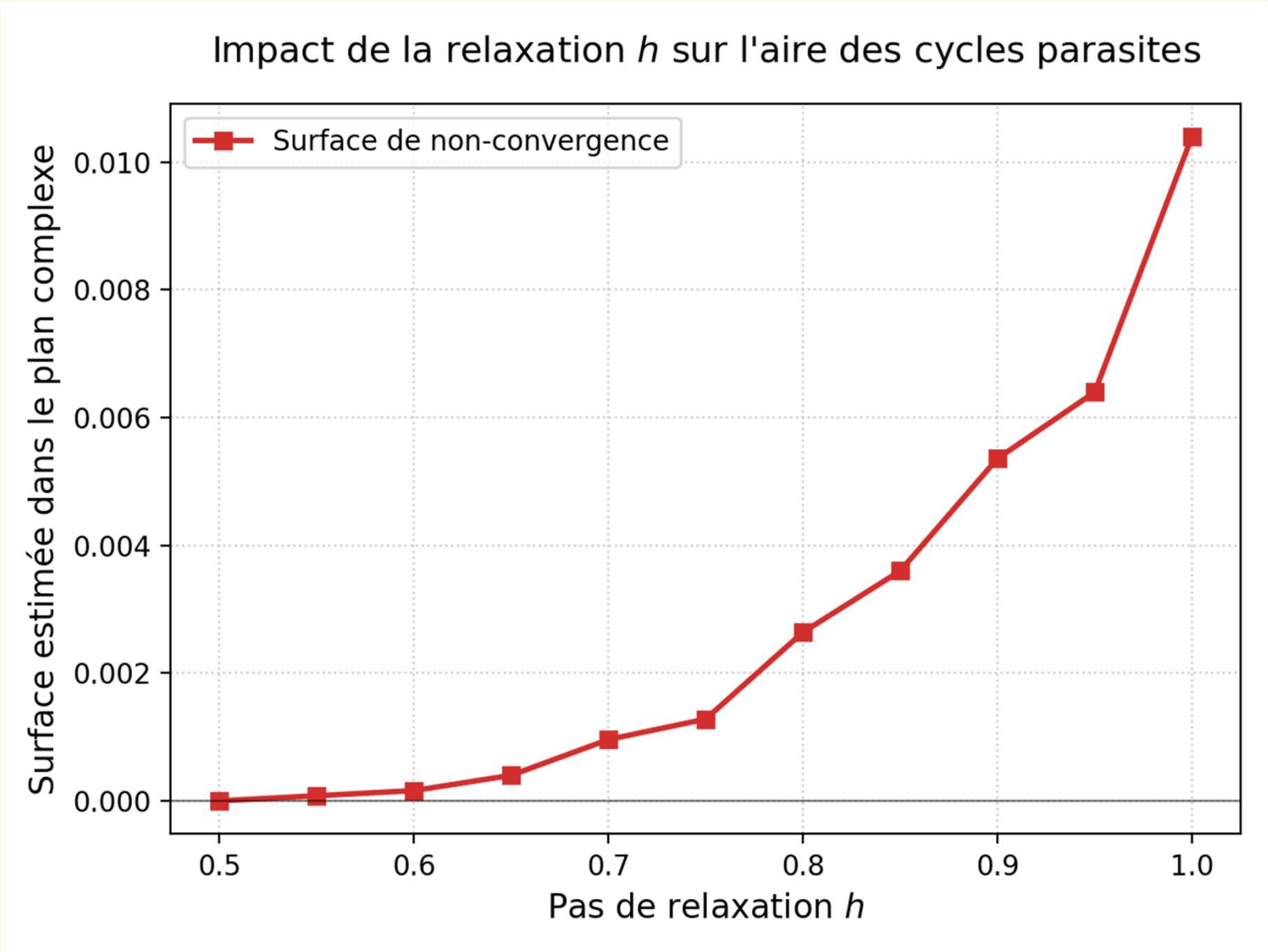
Ouverture
Annexe

Ouverture

Méthode de Newton amortie:

$$z_{n+1} = N_p(z_n) = z_n - h\frac{P(z_n)}{P'(z_n)}$$

Ouverture


Impact de la relaxation h sur l'aire des cycles parasites
Surface de non-convergence
Surface estimée dans le plan complexe
0.010
0.008
0.006
0.004
0.002
0.000
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
Pas de relaxation h

Sommaire

Introduction et Enjeux

I. Définitions et Propriétés
II. Etude des quadratiques
III.Théorème de Fatou

Ouverture
Annexe

Annexe: estimation de l'aire de la non-convergence:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def aire_de_non_convergence(h, num_samples=200000, max_iter=150, epsilon=1e-4):
    """
    Estime la surface des zones de non-convergence dans le plan a en [-2,2]x[-2,2]
    par la méthode de Monte-Carlo pour un pas de relaxation h donné.
    """
    np.random.seed(5) # Fixer la graine pour la reproductibilité

    # Tirage aléatoire uniforme de N points dans le carré [-2, 2] x [-2, 2]
    re_a = np.random.uniform(-2, 2, num_samples)
    im_a = np.random.uniform(-2, 2, num_samples)
    a = re_a + 1j * im_a

    # Condition initiale : l'unique point critique libre z0 = 0
    z = np.zeros_like(a, dtype=complex)

    # Itérations de la suite de Newton amortie
    for _ in range(max_iter):
        p = z**3 + (a - 1.0) * z - a
        dp = 3.0 * z**2 + a - 1.0
        dp2 = np.where(np.abs(dp) < 1e-9, 1e-9, dp)
        z = z - h * p / dp2
```

Annexe: estimation de l'aire de la non-convergence:

```
25
26      # Calcul des 3 racines théoriques pour chaque valeur de 'a'
27      r1 = np.ones_like(a)
28      delta = np.sqrt(1.0 - 4.0 * a + 0j)
29      r2 = (-1.0 + delta) / 2.0
30      r3 = (-1.0 - delta) / 2.0
31
32      # Vérification de la convergence vers l'une des trois racines
33      converged =(np.abs(
34          z - r1) < epsilon) | (np.abs(z - r2) < epsilon) | (np.abs(z - r3) < epsilon
35                                                                  )
36
37      # Proportion de points n'ayant pas convergé
38      fraction_non_convergence = np.sum(~converged) / num_samples
39
40      # Aire totale du domaine d'échantillonnage = 4 * 4 = 16
41      total_area = 16.0
42      return fraction_non_convergence * total_area
43
44  # Échantillonnage du pas de relaxation h entre 0.5 et 1.0
45  h_values = np.linspace(0.5, 1.0, 11)
46  estimated_areas = [aire_de_non_convergence(h) for h in h_values]
```