

Stabilisation des grattes-ciel par le pendule à Masse Accordée (TMD)

Nadi El Mahdi

7 juin 2026

Introduction

Définition

Un **Tuned Mass Damper** (TMD) ou **Pendule à Masse Accordée** est un dispositif mécanique passif modélisable par une boucle de rétroaction. En réagissant aux oscillations d'une structure, sa masse secondaire génère une force d'inertie opposée qui atténue les vibrations de la structure.

- **Applications** : Gratte-ciels, ponts, tours, structures sensibles aux séismes
- **Exemple emblématique** : La tour Taipei 101 (TMD de 660 tonnes)

Introduction



Figure 1 : Tuned mass damper

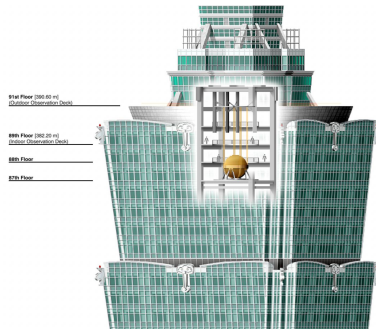


Figure 2 : La tour de Taïpei 101

Problématique

Problème central

Comment le TMD permet-il de réduire les vibrations des structures soumises à des sollicitations dynamiques, et quelles sont les limites du TMD linéaire face aux excitations réelles, justifiant l'introduction du TMD non linéaire ?

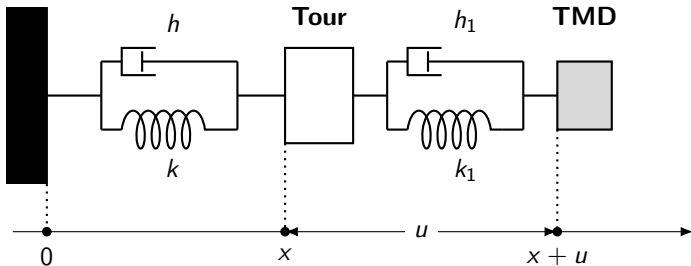
Plan de la présentation

- 1 Modélisation théorique
- 2 Optimisation du TMD
- 3 TMD face à la non linéarité
- 4 Conclusion

Plan

- 1 Modélisation théorique
- 2 Optimisation du TMD
- 3 TMD face à la non linéarité
- 4 Conclusion

Modèle simplifié



Bilan des forces

Forces sur la tour (masse m) :

- Extérieure : $\vec{f}_0(t) = f_0(t)\vec{e}_x$
- Rappel élastique : $\vec{f}_{elas} = -k\vec{x}$
- Frottement : $\vec{\varphi} = -h\dot{\vec{x}}$

Forces sur le TMD (masse m_1) :

- Rappel élastique : $\vec{f}_1 = -k_1\vec{u}$
- Frottement : $\vec{\varphi}_1 = -h_1\dot{\vec{u}}$

Systèmes d'équations

Système original [A] ($h = 0$) :

$$\begin{cases} m\ddot{x} + m_1(\ddot{x} + \ddot{u}) = -kx + f_0(t) & [A1] \\ m_1(\ddot{x} + \ddot{u}) = -k_1 u - h_1 \dot{u} & [A2] \end{cases}$$

Système transformé [B] :

$$\begin{cases} (1 + \alpha)\ddot{x} + \alpha\ddot{u} + \omega_0^2 x = a_0(t) & [B1] \\ \ddot{x} + \ddot{u} + 2\eta_1\omega_1\dot{u} + \omega_1^2 u = 0 & [B2] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{m_1}{m} & \omega_0^2 &= \frac{k}{m} & \beta &= \frac{\omega_1}{\omega_0} \\ \omega_1^2 &= \frac{k_1}{m_1} & \eta_1 &= \frac{h_1}{2\sqrt{k_1 m_1}} & a_0(t) &= \frac{f_0(t)}{m} \end{aligned}$$

Comparaison des équations de mouvement

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = a_0(t)$$

sans TMD

$$\begin{cases} (1 + \alpha)\ddot{x} + \alpha\ddot{u} + \omega_0^2 x = a_0(t) \\ \ddot{x} + \ddot{u} + 2\eta_1\omega_1\dot{u} + \omega_1^2 u = 0 \end{cases}$$

avec TMD

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{m_1}{m} & \omega_0^2 &= \frac{k}{m} & \beta &= \frac{\omega_1}{\omega_0} \\ \omega_1^2 &= \frac{k_1}{m_1} & \eta_1 &= \frac{h_1}{2\sqrt{k_1 m_1}} & a_0(t) &= \frac{f_0(t)}{m} \end{aligned}$$

Réponse temporelle de la tour soumise à une excitation sinusoïdale ($\omega = \omega_0 = 1.22$ rad/s)

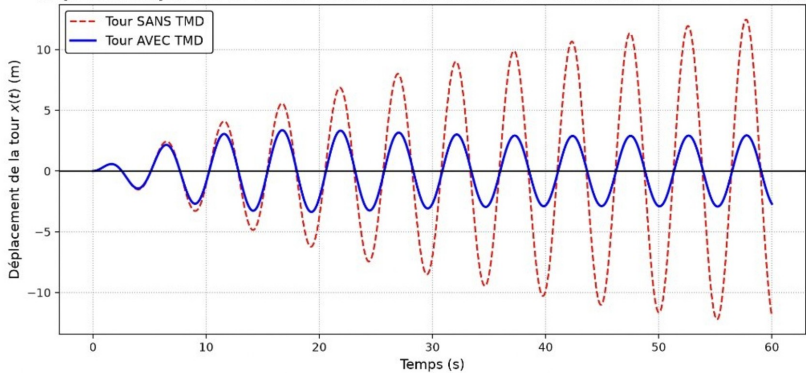


Figure – Influence du TMD

Plan

- 1 Modélisation théorique
- 2 Optimisation du TMD**
- 3 TMD face à la non linéarité
- 4 Conclusion

Fonctions de transfert

Expressions des fonctions de transfert :

$$\underline{H_1}(z) = \frac{\underline{U}}{\underline{X}} = \frac{z^2}{-z^2 + 2i\eta_1\beta z + \beta^2}$$

$$\underline{H_2}(z) = \frac{\underline{B}}{\underline{A_0}} = \frac{z^2}{(1 + \alpha + \alpha H_1)z^2 - 1}$$

$\underline{X}$

Déplacement complexe de la tour

$\underline{U}$

Déplacement relatif du TMD

$\underline{A_0}$

Amplitude complexe de l'excitation

$\underline{B} = -\omega^2 \underline{X}$

Accélération complexe de la tour

$z = \omega/\omega_0$

Fréquence réduite

Gain normalisé

Expression du gain normalisé G_2

$$G_2 = |H_2| = \frac{z^2}{\sqrt{[(1 + \alpha)z^2 - 1]^2 + \frac{4\alpha^2 z^2}{\eta_1^2 \beta^2}}}$$

Paramètres :

$$\alpha = \frac{m_1}{m} \quad \beta = \frac{\omega_1}{\omega_0}$$

$$\eta_1 = \frac{h_1}{2\sqrt{k_1 m_1}} \quad z = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Visualisation 2D

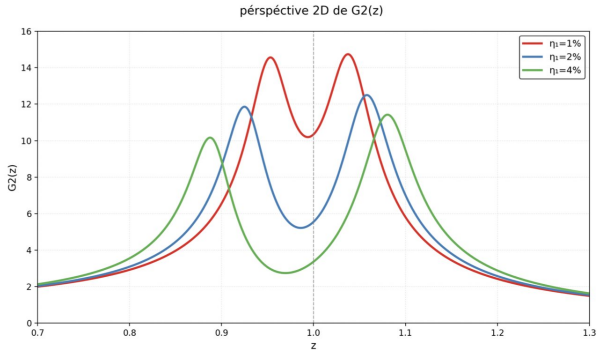


Figure – Perspective 2D de $G_2(z)$

Valeurs utilisées : $\alpha = 0.1$; $\beta \approx 0.95$

Critères d'optimisation : Principe du minmax

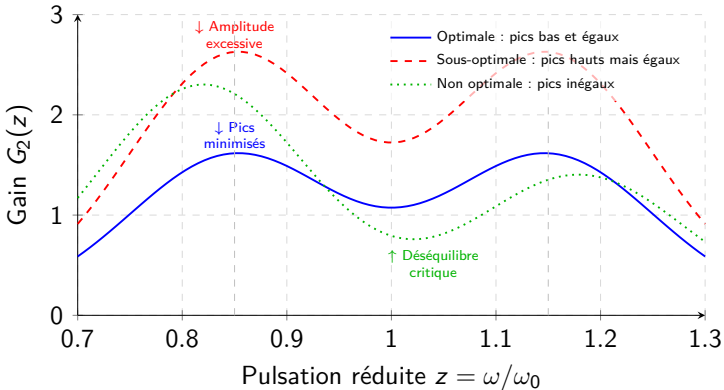
Objectif de l'optimisation

Dans le meilleur cas possible, il faut que :

- Les deux pics soient les plus bas possibles.
- Leur amplitude soit égalisée pour éviter qu'un pic domine l'autre (ce qui créerait un point faible dans la plage fréquentielle critique).

Réponse fréquentielle

Exemple d'une réponse fréquentielle pour différents réglages



- ❶ **Points fixes** : Les courbes $|H_2(z)|$ passent par deux points fixes indépendants de η_1 , solutions de :

$$\frac{dG_2}{dz} = 0$$

Ces points vérifient $\left(1 + \frac{1}{\beta^2}\right) z^4 - 4z^2 + 2\beta^2 = 0$.

- ❷ **Égalisation des pics** : En choisissant $\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}$ (pour accorder le TMD), et en égalisant les amplitudes aux points fixes, on obtient l'équation :

$$\eta_1^2 = \frac{3\alpha}{8(1+\alpha)}$$

Résultat optimal

La valeur optimale de l'amortissement
(Relation d'HARTOG) est donc :

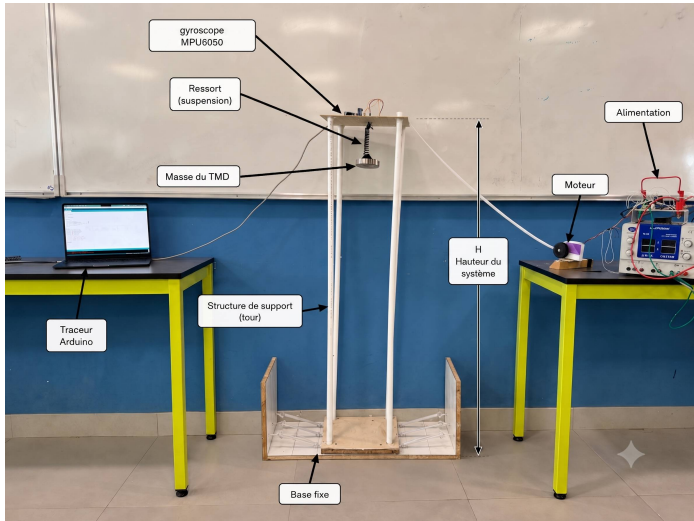
$$\eta_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{3\alpha}{8(1+\alpha)}}$$

Vérification expérimentale de l'influence du TMD



Figure – Réalisation de l'expérience

Materiels utilisés



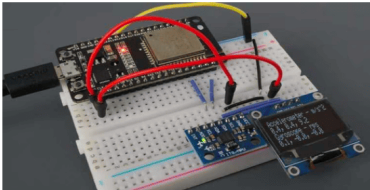
Matériels utilisés



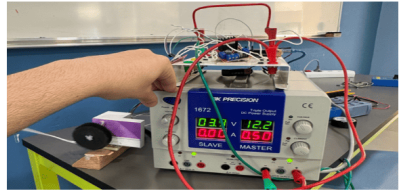
TMD utilisé



Traceur de courbe

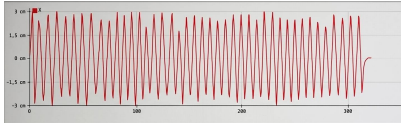


Gyroscope utilisé

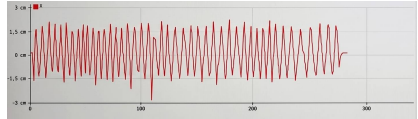


Alimentation (pour exciter la tour)

influence du TMD



Sans TMD



Avec TMD quelconque

verification de l'optimalité du choix de η_{opt}

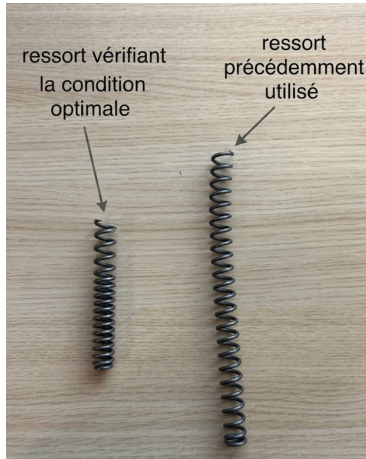


Figure – ressorts utilisés

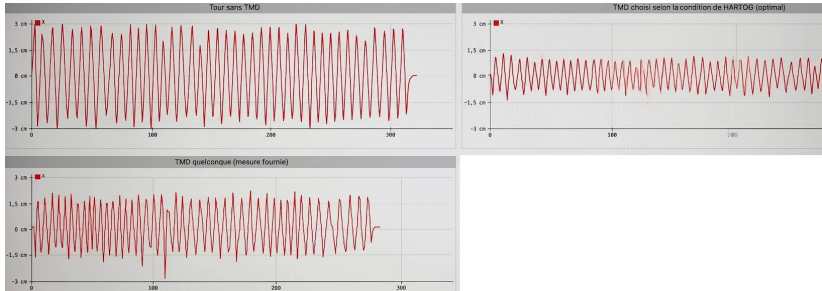


Figure – Tour sans TMD-avec TMD quelconque-avec TMD optimisé

Plan

- 1 Modélisation théorique
- 2 Optimisation du TMD
- 3 TMD face à la non linéarité
- 4 Conclusion

Introduction de la non linéarité

A grande échelle les ressorts sont caractérisés par une non-linéaire (type Duffing) :

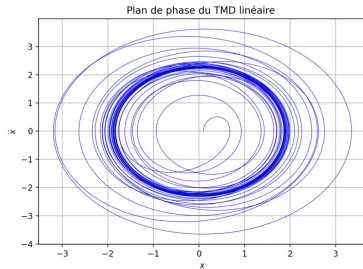
$$kx \longrightarrow kx + \alpha x^3$$

On obtient alors un système non linéaire couplé :

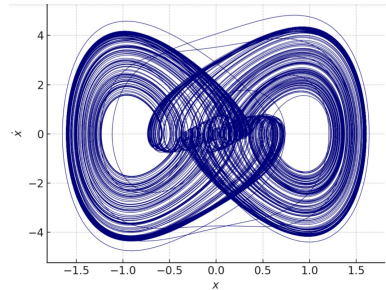
$$\begin{cases} m\ddot{x} + h\dot{x} + kx + \alpha x^3 + h_1(\dot{x} + \dot{u}) + k_1(x + u) = F_0 \cos(\omega t) \\ m_1\ddot{u} + h_1(\dot{u} + \dot{x}) + k_1(u + x) = 0 \end{cases}$$

avec :

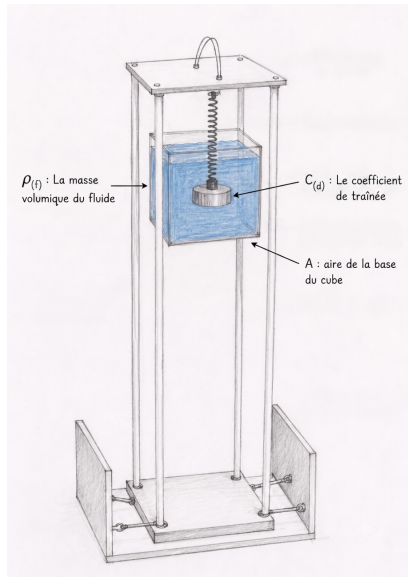
- $x(t)$: déplacement de la tour,
- $u(t)$: déplacement du TMD relatif à la structure,
- αx^3 : non-linéarité de type Duffing.



Portrait de phase du TMD
linéaire



Portrait de phase du TMD
non-linéaire



TMD dans l'air

Dans l'air, le frottement est modélisé comme visqueux et linéaire :

$$F_{lin} = h_1 \dot{u}$$

L'énergie dissipée sur un cycle d'oscillation T s'obtient par l'intégrale du travail de cette force :

$$E_{diss,sec} = \int_0^T F_{lin} \dot{u} dt = h_1 \int_0^T \dot{u}^2 dt$$

En injectant l'expression de la vitesse pour un mouvement harmonique $\dot{u} = U_0 \omega \cos(\omega t)$, l'intégration donne le résultat exact :

$$E_{diss,sec} = \pi h_1 \omega U_0^2$$

TMD immergé

Dans un liquide, l'amortissement est régi par la traînée hydrodynamique de Navier-Stokes. La force est proportionnelle au carré de la vitesse :

$$F_{\text{fluide}} = \frac{1}{2} \rho_f C_d A \dot{u} |\dot{u}|$$

L'intégrale du travail mécanique devient alors :

$$E_{\text{diss,immerge}} = \int_0^T F_{\text{fluide}} \dot{u} dt = \frac{1}{2} \rho_f C_d A \int_0^T |\dot{u}|^3 dt$$

Après intégration de la valeur absolue au cube sur une période T , on obtient :

$$E_{\text{diss,immerge}} = \frac{4}{3} \rho_f C_d A \omega^2 U_0^3$$

Comparaison des lois de dissipation

Dans l'air (Amortissement linéaire) :

$$E_{diss,sec} = \pi h_1 \omega \boxed{U_0^2}$$

Dans l'eau (Amortissement quadratique) :

$$E_{diss,immerge} = \frac{4}{3} \rho_f C_d A \omega^2 \boxed{U_0^3}$$

Conclusion sur l'efficacité dynamique

L'énergie dissipée croît de manière **quadratique** dans l'air, mais de manière **cubique** dans le liquide.

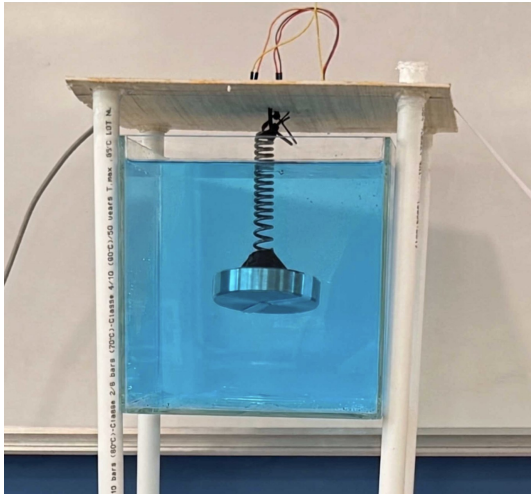
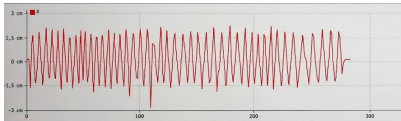
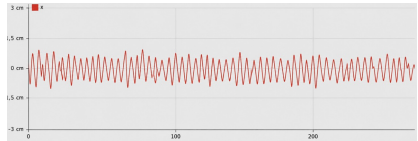


Figure – TMD immergé



TMD optimal dans l'air



TMD optimal immergé

Plan

- 1 Modélisation théorique
- 2 Optimisation du TMD
- 3 TMD face à la non linéarité
- 4 Conclusion

Conclusion

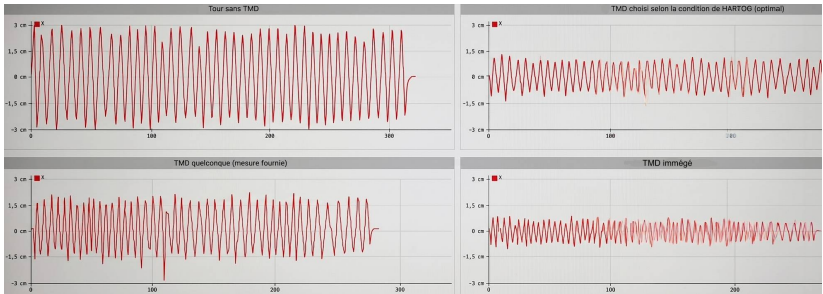


Figure – Les 4 résultats obtenus

-  H. Frahm, *Device for Damping Vibrations of Bodies*, US Patent 989,958, 1909.
-  Encyclopædia Britannica, *Taipei 101*,
<https://www.britannica.com/topic/Taipei-101>.
-  J. P. Den Hartog, *Mechanical Vibrations*, McGraw-Hill, 1940.
-  O. Gendelman, *Targeted Energy Transfer in Nonlinear Systems*, Journal of Sound and Vibration, 2001.
-  L. I. Vakakis et al., *Nonlinear Targeted Energy Transfer in Mechanical and Structural Systems*, Springer, 2008.
-  *Nonlinear Tuned Mass Dampers*, Applied Sciences, MDPI, 2020.

Merci pour votre attention

Annexe : valeurs utilisé et conditions de l'expérience

Paramètre	Valeur	Interprétation
m	5Kg	Masse de la structure principale
m_1	0.5Kg	Masse du TMD (très légère)
h	0.00N.s/m	Amortissement sur la tour
h_1	0.05N.s/m	Amortissement du TMD
k	14N/m	Raideur de la tour
k_1	1.16N/m - 2N/m	Raideur du ressort du TMD

Conditions initiales :

$$x(0) = 0.1, \dot{x}(0) = u(0) = \dot{u}(0) = 0$$

Annexe : Détermination de la valeur de k_{optimal}

$$k_{\text{optimal}} = k \cdot \frac{\alpha}{(1 + \alpha)^2} \quad (1)$$

Application numérique avec $m = 5 \text{ kg}$, $m_1 = 0,5 \text{ kg}$ et $k = 14 \text{ N/m}$:

- Rapport des masses :

$$\alpha = \frac{m_1}{m} = \frac{0,5}{5} = 0,1 \quad (2)$$

- Raideur optimale :

$$k_{\text{optimal}} = 14 \cdot \frac{0,1}{(1 + 0,1)^2} = \frac{1,4}{1,21} \approx \mathbf{1,16 \text{ N/m}} \quad (3)$$

Annexe : conception d'une tour avec un TMD immérgé



Figure – Conception d'une tour avec un TMD immérgé

Annexe

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint

# =====
# 1. PARAMÈTRES DU SYSTÈME
# =====
# Tour (Système principal)
m = 1000.0 # Masse de la tour (kg)
k = 1500.0 # Raideur de la tour (N/m)
h = 50.0 # Amortissement intrinsèque (N.s/m) - très faible pour favoriser la résonance

# Pulsation propre de la tour
omega_0 = np.sqrt(k / m) # Environ 3.16 rad/s

# TMD (Pendule accordé)
alpha = 0.05 # Rapport de masse (5%)
m1 = alpha * m # Masse du TMD (50 kg)

# Application de tes formules d'optimisation (Slide 11)
beta = 1.0 / np.sqrt(1 + alpha) # Accord de fréquence
omega_1 = beta * omega_0 # Pulsation du TMD
k1 = m1 * (omega_1 ** 2) # Raideur du TMD

eta_opt = np.sqrt((3 * alpha) / (8 * (1 + alpha))) # Amortissement optimal
h1 = 2 * eta_opt * np.sqrt(k1 * m1) # Coefficient de frottement visqueux du TMD

# Excitation extérieure (Séisme ou vent)
F0 = 1000.0 # Amplitude de la force (N)
omega = omega_0 # On se place EXACTEMENT à la résonance (le pire cas pour la tour)
```

Annexe

```
def tour_seule(Y, t): 1 usage
    """ Système à 1 DDL (Tour sans TMD) """
    x, dx = Y
    force = F0 * np.cos(omega * t)
    ddx = (force - k * x - h * dx) / m
    return [dx, ddx]

def tour_avec_tmd(Y, t): 1 usage
    """ Système à 2 DDL couplés (Tour + TMD) """
    x, dx, u, du = Y
    force = F0 * np.cos(omega * t)

    # Équation de la tour déduite du système couplé
    ddx = (force - k * x - h * dx + k1 * u + h1 * du) / m
    # Équation du TMD relative à la tour
    ddu = -ddx - (k1 * u + h1 * du) / m1

    return [dx, ddx, du, ddu]

# =====
# 3. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE
# =====
# Temps de simulation (de 0 à 60 secondes, 2000 points)
t = np.linspace( start: 0, stop: 60, num: 2000)
```

```
sol_seule = odeint(tour_seule, Y0_seule, t)
sol_tmd = odeint(tour_avec_tmd, Y0_tmd, t)

x_seule = sol_seule[:, 0]
x_tmd = sol_tmd[:, 0]

# *****
# 4. AFFICHAGE DES RÉSULTATS (Tracé professionnel)
# *****

plt.figure(figsize=(10, 5))

# Tracé des deux courbes
plt.plot('args: t, x_seule, color='red', linestyle='--', linewidth=1.5, label='Tour SANS TMD')
plt.plot('args: t, x_tmd, color='blue', linewidth=2, label='Tour AVEC TMD')

# Annotations et mise en forme
plt.title(label: f"Réponse temporelle de la tour soumise à une excitation sinusoïdale ( $\omega = \omega_0 = \{omega_0:2f\}$  rad/s)",
          fontweight='bold')
plt.xlabel(xlabel: "Temps (s)", fontsize=12)
plt.ylabel(ylabel: "Déplacement de la tour  $x(t)$  (m)", fontsize=12)

# Graduation personnalisée
plt.grid(visible=True, which='both', linestyle=':', color='gray', alpha=0.7)
plt.axhline(y=0, color='black', linewidth=1)

# Légende
plt.legend(loc='upper left', fontsize=11, framealpha=0.9, edgecolor='black')

# Affichage
plt.tight_layout()
plt.show()
```

Code arduino de la MPU6050

```
sketch_nov20a
#include <Wire.h>
#include <MPU6050.h>

MPU6050 mpu;

void setup() {
  Serial.begin(9600);
  Wire.begin();

  mpu.initialize();

  if (mpu.testConnection()) {
    Serial.println("MPU6050 fonctionne !");
    Serial.println("Donnees accelereometre et gyroscope:");
  } else {
    Serial.println("MPU6050 non trouve !");
    while(1);
  }
}

void loop() {
  int16_t ax = mpu.getAccelerationX();
  int16_t ay = mpu.getAccelerationY();
  int16_t az = mpu.getAccelerationZ();
  int16_t gx = mpu.getRotationX();
  int16_t gy = mpu.getRotationY();
  int16_t gz = mpu.getRotationZ();

  Serial.print("Accel X:"); Serial.print(ax);
  Serial.print(" Y:"); Serial.print(ay);
  Serial.print(" Z:"); Serial.print(az);
  Serial.print(" | Gyro X:"); Serial.print(gx);
  Serial.print(" Y:"); Serial.print(gy);
  Serial.print(" Z:"); Serial.println(gz);

  delay(1000);
}
```