

Homotopies et applications en topologie

J'ai choisi ce sujet car les homotopies, classes d'homotopies et ce qu'elles permettent de définir constituent d'après moi des outils mathématiques très élégants et permettant de nombreuses applications en géométrie et en topologie.

Ce sujet étudie donc les homotopies, que l'on peut voir comme des transformations continues d'un chemin (ou d'une application) vers un(e) autre.

Positionnement thématique (ÉTAPE 1) :

- *MATHEMATIQUES (Géométrie)*
- *MATHEMATIQUES (Mathématiques Appliquées)*
- *INFORMATIQUE (Informatique pratique)*

Mots-clés (ÉTAPE 1) :

Mots-clés (en français)	Mots-clés (en anglais)
<i>Homotopies</i>	<i>Homotopies</i>
<i>Groupe fondamental</i>	<i>Fundamental group</i>
<i>Théorèmes topologiques</i>	<i>Topological theorems</i>
<i>Lacets</i>	<i>Loops</i>
<i>Connexité, connexité par arcs</i>	<i>Connectedness, path connectedness</i>

Bibliographie commentée

Le concept d'homotopie a vu le jour au début du XXe siècle, grâce à des mathématiciens tels que Henri Poincaré, considéré comme le fondateur de la topologie algébrique, et Luitzen Egbertus Jan Brouwer. Une homotopie correspond à une déformation continue d'un chemin d'un espace topologique à un autre. Ici, nous nous intéressons notamment au cas des chemins dont les 2 extrémités sont identiques, appelés lacets. Malgré une définition liée aux chemins continus, nous utilisons l'homotopie essentiellement pour les outils qu'elle permet de définir, à savoir la relation d'équivalence [1] et le groupe fondamental, ou groupe de Poincaré [2],[3].

Le groupe fondamental est particulièrement utile en topologie algébrique car il s'agit d'un invariant topologique. Il est en effet possible de construire, à partir d'une application continue d'un espace topologique dans un autre, un morphisme entre leurs groupes fondamentaux

respectifs, et lorsque l'application est de plus un homéomorphisme, ce morphisme de groupes est alors bijectif.[4]

Ces propriétés font de la théorie de l'homotopie un outil puissant des mathématiques, qui est source de nombreuses preuves de théorèmes topologiques.[6],[7] Nous pouvons notamment penser, entre autres, au théorème de d'Alembert-Gauss, au théorème de Borsuk-Ulam, qui énonce que toute application continue de la sphère de dimension n dans $\mathbb{R}^n$ admet 2 points antipodaux ayant la même image, ou au théorème du Point Fixe de Brouwer, énonçant que toute application continue de la boule fermée unité de $\mathbb{R}^n$ dans elle-même admet un point fixe. Ce dernier peut être déduit du théorème de Borsuk-Ulam [5], mais peut également être vu de manière homotopique [7].

Problématique retenue

Comment peut-on utiliser l'homotopie, le groupe fondamental et son invariance topologique en topologie algébrique ? Quels résultats ces outils permettent-ils d'obtenir ?

Objectifs du TIPE du candidat

- Introduire les objets mathématiques relatifs à la théorie homotopique et leurs principales propriétés
- Présenter et expliquer certains théorèmes de topologie algébrique qu'ils permettent d'obtenir et comment on peut les comprendre avec ces outils
- Donner des éléments de preuves homotopiques de ces résultats
- Illustrer ces résultats, en particulier s'intéresser à des manières de les voir algorithmiquement

Références bibliographiques (ÉTAPE 1)

- [1] LAETITIA BOREL, PIERRE WEISS : Une première approche de l'homotopie dans le cadre continu : <https://perso.crans.org/lborel/projet/continu1.htm>
- [2] MICHÈLE AUDIN : Topologie: Revêtements et groupe fondamental : <https://www.math.univ-toulouse.fr/~gavrilov/enseignement/TopoAlg/courstopalgMAudin.pdf>
- [3] PIERRE DOLBEAULT : Analyse complexe : *Chapitre 5.5, édition Masson, 1990, ISSN 0339-879X, pages 120 à 122*
- [4] NICOLAS BERGERON : Groupe fondamental et revêtements : <https://www.math.univ-paris13.fr/~ginot/RGF/GpFund&Revt.pdf>
- [5] NADIA LAFRENIÈRE : Les applications du théorème de Borsuk-Ulam en combinatoire : <https://dermenjian.com/uqam/ete/presentations/notes/2015/1-Nadia.pdf>

- [6] BIANCA BARUCCHIERI : Autour d'un théorème de topologie algébrique :
<https://culturemath.ens.fr/breves/autour-d-un-theoreme-de-topologie-algebrique>
- [7] ALLEN HATCHER : Algebraic Topology : *Chapitre 1.1*, éditeur *Cambridge University Press*, 2001, ISBN 978-0521795401, pages 31 à 33