

Attention: Le rapport doit être réalisé par l'étudiant(e).

Si le rapport résulte d'une collaboration, elle doit être clairement annoncée.

NOM : GINESTIERE	Prénoms : Romain
Classe : MP*	
Lycée : Lycée Henri IV	Numéro de candidat : 15803
Ville : Paris	

Concours auxquels vous êtes admissible (les indiquer par une croix) :

Banque MP

ENS Paris-Saclay	MP - Option MP	☒
	MP - Option MI	☐
ENS de Lyon	Math - Option M-MP	☒
	Math - Option M-MI	☐
	Informatique	☐
ENS Rennes	MP - Option MP	☒
	MP - Option MI	☐
ENS Paris	MP - Option P	☐
	MP - Option I	☐

Banque MPI

ENS Paris-Saclay	Option Math	☐
	Option Info	☐
ENS de Lyon	Math MPI	☐
	Info MPI	☐
ENS Rennes	Info MPI	☐
ENS Paris	Option Math	☐
	Option Info	☐

Matière dominante du TIPE (la sélectionner d'une croix inscrite dans la case correspondante) :

Informatique	☐	Mathématiques	☒	Physique	☐
--------------	--------------------------	---------------	-------------------------------------	----------	--------------------------

Titre du TIPE :

Homotopies et applications en topologie

Nombre de pages (à indiquer dans les cases ci-dessous) :

Texte	9	Illustration	1	Bibliographie	1
-------	----------	--------------	----------	---------------	----------

Attention, les illustrations doivent figurer dans le corps du texte et non en fin du document !

Résumé ou descriptif succinct du TIPE (6 lignes, maximum) :

Ce travail cherche à introduire les notions d'homotopie et de groupe fondamental, puis de s'en servir pour établir des théorèmes fondamentaux de topologie algébrique.

A **Paris**Le **04/06/2025**

Signature du (de la) candidat(s)

R. Ginestiere

Signature du professeur responsable de la classe préparatoire dans la discipline

E. Toul
Emmanuelle Toul
Professeur de maths

Cachet de l'établissement

LYCÉE HENRI IV
23, Rue Clovis
75231 PARIS Cedex 05
Tél. 01 44 41 21 21
Fax 01 43 29 95 21

La signature du professeur responsable et le tampon de l'établissement ne sont pas indispensables pour les candidats libres (hors CPGE)

Homotopies et applications en topologie

GINESTIERE Romain, 15803

2025

Table des matières

1	Introduction	1
2	Homotopies, généralités	2
2.1	Définitions	2
2.2	Premières propriétés	3
2.3	Groupe fondamental (ou groupe de Poincaré)	4
2.3.1	Définition	4
2.3.2	Invariance topologique	5
3	Utilisation des homotopies et du groupe fondamental	5
3.1	Théorème de d'Alembert-Gauss	5
3.2	Théorème de Borsuk-Ulam	7
3.2.1	Cas $n = 1$	7
3.2.2	Cas $n = 2$	7
3.3	Théorème du Point Fixe de Brouwer	8
3.3.1	Cas $n = 1$	8
3.3.2	Cas $n = 2$	8
3.3.3	Cas général : du théorème de Borsuk-Ulam vers le théorème du Point Fixe de Brouwer	10
	Annexes	11
A	Théorème du relèvement	11
B	Structure de groupe du groupe fondamental	11

1 Introduction

Le concept d'homotopie a vu le jour au début du XXe siècle, grâce à des mathématiciens tels que Henri Poincaré, considéré comme le fondateur de la topologie algébrique, et Luitzen Egbertus Jan Brouwer. Une homotopie correspond à une déformation continue d'un chemin d'un espace topologique à un autre. Ici, nous nous intéressons notamment au cas des chemins dont les deux extrémités sont identiques, appelés lacets. Malgré une définition liée aux chemins continus, nous utilisons l'homotopie essentiellement pour les outils qu'elle permet de définir, à savoir la relation d'équivalence et le groupe fondamental, ou groupe de Poincaré.

Notations utilisées :

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1\}$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$, est la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}, \|x\| = 1\}$ est la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$, appelée n -sphère.

2 Homotopies, généralités

2.1 Définitions

Soit X une partie de $\mathbb{R}^n$, avec $n \geq 1$.

Définition 1. Un **chemin continu** de X est une application $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ continue, on dit alors que $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$ sont les extrémités de ce chemin.

Définition 2. Un chemin continu γ de X est appelé **lacet** si ses extrémités sont confondues, i.e. si $\gamma(0) = \gamma(1)$.

On peut voir visuellement une telle application $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ comme un chemin qui se promène, en allant de $\gamma(0)$ à $\gamma(1)$, dans l'espace X , d'où le nom.

Définition 3. On dit que 2 chemins continus γ_0 et γ_1 de X sont **homotopes** s'il existe une application $H : [0, 1]^2 \rightarrow X$ telle que :

- $\forall t \in [0, 1], H(t, 0) = \gamma_0(t)$
- $\forall t \in [0, 1], H(t, 1) = \gamma_1(t)$

On dit alors que H est une **homotopie** de γ_0 vers γ_1 .

Si γ_0 et γ_1 ont mêmes extrémités, i.e. si $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ et $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$, on dit que les deux chemins sont **homotopes strictement** si on a de plus

$\forall s \in [0, 1], H(0, s) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ et $H(1, s) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$.

L'homotopie est donc la déformation continue d'un chemin continu vers un autre, que l'on peut facilement se représenter visuellement.

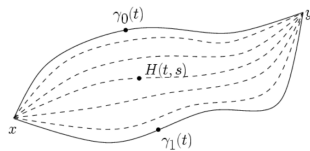


FIGURE 1 – Illustration d'une homotopie stricte de γ_0 vers γ_1
(source : site du département de mathématiques et applications de l'École Normale Supérieure de Paris)

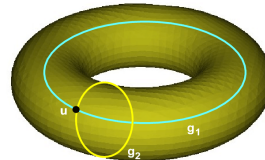


FIGURE 2 – Ici, les deux lacets g_1 et g_2 d'extrémité u , à valeurs dans un tore de $\mathbb{R}^3$, ne sont pas homotopes
(source : Frédéric Elie sur [researchgate.net](https://www.researchgate.net))

On peut généraliser cette définition :

Définition 4. Si X et Y sont respectivement une partie de $\mathbb{R}^n$ et une partie de $\mathbb{R}^m$ et $f, g : X \rightarrow Y$ deux applications continues, on dit que f et g sont **homotopes** s'il existe une application continue $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ telle que :

- $\forall x \in X, H(x, 0) = f(x)$
- $\forall x \in X, H(x, 1) = g(x)$

2.2 Premières propriétés

Proposition 1. Les relations "être homotopes" et "être homotopes strictement" sur les chemins continus de X (respectivement sur les applications continues de X dans Y) sont des relations d'équivalence.

En considérant, pour un chemin continu γ , l'application $H : (t, s) \in [0, 1]^2 \mapsto \gamma(t)$, on a la réflexion.

La symétrie se montre en considérant, si H est une homotopie de γ_1 vers γ_2 , $\tilde{H} : (t, s) \mapsto H(t, 1-s)$. Enfin, si H_1 est une homotopie de γ_1 vers γ_2 et H_2 une homotopie de γ_2 vers γ_3 , alors en posant, pour $(t, s) \in [0, 1]^2$, $H_0(t, s) = H_1(t, 2s)$ si $s \in [0, \frac{1}{2}]$ et $H_0(t, s) = H_2(t, 2s-1)$ sinon, H_0 est une homotopie de γ_1 vers γ_3 , d'où la transitivité.

Proposition 2. Deux lacets homotopes strictement à valeurs dans $\mathbb{S}^1$, identifié à l'ensemble $\mathbb{U}$ des complexes de module 1, effectuent le même nombre de tours autour du cercle unité.

Démonstration :

Si γ est un lacet parcourant $\mathbb{U}$, on note $\gamma(0) = e^{i\theta}$, avec $\theta \in [0, 2\pi[$.

Alors, d'après le **théorème du relèvement**¹, il existe une unique application continue $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\varphi(0) = 0$$

$$\forall t \in [0, 1], \gamma(t) = e^{i(\theta + 2\pi\varphi(t))}.$$

On a alors $\varphi(1) \in \mathbb{Z}$ et $\varphi(1)$ est le nombre de tours, comptés algébriquement, qu'effectue le lacet γ dans le sens trigonométrique autour du cercle unité.

Si γ_1 et γ_2 sont deux lacets homotopes strictement d'homotopie H , alors pour $s \in [0, 1]$, $t \mapsto H(t, s)$ est un lacet, on a donc l'existence de $\Phi(s)$ continue et $\theta_0 \in [0, 2\pi[$ telles que $\forall t \in [0, 1], H(t, s) = e^{i(\theta_0 + 2\pi\Phi(s)(t))}$.

Alors Φ est continue pour la convergence simple.

Si $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ est telle que $s_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} s$, alors pour $t \in [0, 1]$, $H(t, s_n) = e^{i(\theta_0 + 2\pi\Phi(s_n)(t))} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{i(\theta_0 + 2\pi\Phi(s)(t))}$, donc $(\Phi(s_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers un relèvement de $t \mapsto H(t, s)$ valant θ_0 en 0, i.e.

$\Phi(s)$, d'où la continuité de Φ .

$s \mapsto \Phi(s)(1)$ est donc continue et à valeurs dans $\mathbb{Z}$, donc constante.

$$\text{Donc } \Phi(0)(1) = \Phi(1)(1)$$

Or $\Phi(0)(1)$ (respectivement $\Phi(1)(1)$) est le nombre de tours autour du cercle unité effectué par le lacet γ_1 (respectivement γ_2).

Donc γ_1 et γ_2 effectuent le même nombre de tours autour du cercle unité.

1. Une preuve de ce théorème est donnée en **Annexe A**.

2.3 Groupe fondamental (ou groupe de Poincaré)

2.3.1 Définition

Soit (X, p) une partie de $\mathbb{R}^n$ pointée, c'est-à-dire une partie X de $\mathbb{R}^n$ dont on a choisi un point $p \in X$ comme *point de base*.

Avec la **Proposition 1**, on sait que l'homotopie stricte est une relation d'équivalence sur l'ensemble des lacets d'extrémité p .

On va donc s'intéresser aux classes d'équivalence : si γ est un lacet d'extrémité p , on note $[\gamma]$ sa classe d'équivalence, et on note $\pi_1(X, p)$ l'ensemble des classes d'équivalence.

Si f et g sont deux lacets d'extrémité p , on note $f * g$, ou plus simplement fg , le lacet parcourant f puis g , en allant "2 fois plus vite".

$$\text{Ainsi, } f * g : t \in [0, 1] \mapsto \begin{cases} f(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2t - 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

On notera alors $[f] * [g] = [f][g] = [f * g]$.

Alors $(\pi_1(X, p), *)$ est un groupe², appelé **groupe fondamental**, ou **groupe de Poincaré** de X basé en p .

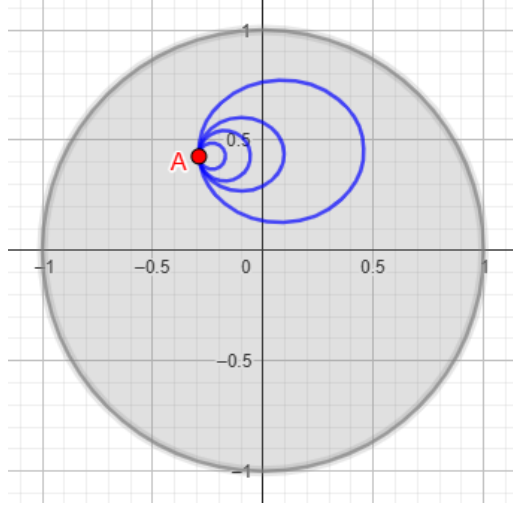


FIGURE 3 – Exemple : on voit que tout lacet de $\mathbb{B}^2$ est strictement homotope à un point, donc $\pi_1(\mathbb{B}^2)$ est le groupe trivial (ce qui sera démontré plus formellement en **3.3.2**)

Proposition 3. *Si X est connexe par arcs, alors pour $p, q \in X$ avec $p \neq q$, les groupes $\pi_1(X, p)$ et $\pi_1(X, q)$ sont isomorphes.*

En posant γ un chemin continu allant de p à q , alors

$$\begin{aligned} \pi_1(X, p) &\rightarrow \pi_1(X, q) \\ \alpha &\mapsto [\gamma][\alpha][\gamma]^{-1} \end{aligned}$$

2. Une preuve de la structure de groupe de $\pi_1(X, p)$ est donnée en **Annexe B**.

est un isomorphisme de $\pi_1(X, p)$ sur $\pi_1(X, q)$.

Dans le cas où X est connexe par arcs, on pourra alors parler simplement de groupe fondamental de X (à isomorphisme près), que l'on notera $\pi_1(X)$.

2.3.2 Invariance topologique

L'intérêt du groupe fondamental vient notamment de la propriété suivante :

Proposition 4. *Si X et Y sont deux espaces topologiques connexes par arcs et homéomorphes, alors leurs groupes fondamentaux sont isomorphes.*

*Autrement dit, le groupe fondamental est un **invariant topologique**.*

Démonstration :

Soit f une application continue de X dans $f(X)$

X est connexe par arcs, donc $f(X)$ l'est également.

f étant continue, si γ est un lacet de X , alors $f \circ \gamma$ est un lacet de $f(X)$, que l'on note $f_*(\gamma)$.

On dispose alors d'une application f_* de l'ensemble des lacets de X dans celui des lacets de $f(X)$.

Cette application est compatible avec l'homotopie stricte et avec la loi $*$:

Si γ_1 et γ_2 sont deux lacets homotopes strictement d'homotopie H , alors $f \circ H$ est une homotopie stricte entre $f_*(\gamma_1)$ et $f_*(\gamma_2)$.

Si γ_1 et γ_2 sont 2 lacets de X , on a bien $(f_*(\gamma_1)) * (f_*(\gamma_2)) = f_*(\gamma_1 * \gamma_2)$.

On note ainsi f_* le morphisme de $\pi_1(X, p)$ dans $\pi_1(f(X), f(p))$ qui à $[\gamma] \in \pi_1(X, p)$ associe $[f_*(\gamma)] = [f \circ \gamma]$.

On l'appelle **morphisme induit par f** .

On remarque que si $f : X \rightarrow f(X)$ est continue et $g : f(X) \rightarrow g(f(X))$ est continue, alors $g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$.

Ainsi, en remarquant que $(id_X)_* = id_{\pi_1(X, p)}$, on obtient finalement que si f est un homéomorphisme de X dans Y , alors f_* est un isomorphisme de $\pi_1(X, p)$ dans $\pi_1(Y, f(p))$, car $(f^{-1})_* \circ f_* = (f^{-1} \circ f)_* = (id_X)_* = id_{\pi_1(X, p)}$ et ainsi f_* est bijectif.

$\pi_1(X, p)$ et $\pi_1(Y, f(p))$ sont donc isomorphes.

3 Utilisation des homotopies et du groupe fondamental

3.1 Théorème de d'Alembert-Gauss

Cette démonstration est un usage célèbre des homotopies.

Théorème 1 (de d'Alembert-Gauss). *$\mathbb{C}$ est algébriquement clos, i.e. tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1 admet une racine dans $\mathbb{C}$.*

Démonstration :

Il suffit de montrer que tout polynôme complexe de degré supérieur ou égal à 1 admet au moins une racine, donc que tout polynôme qui s'annule nulle part sur $\mathbb{C}$ est de degré nul. Soit donc $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ tel que P n'admette aucune racine dans $\mathbb{C}$, soit $n = \deg(P)$. On veut donc montrer que $n = 0$.

Pour $r \in \mathbb{R}^+$, on définit le lacet $\alpha_r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{U}$ par :

$$\forall t \in [0, 1], \alpha_r(t) = \frac{P(r \exp(2i\pi t))/P(r)}{|P(r \exp(2i\pi t))/P(r)|}.$$

P n'admet aucune racine, donc α_r est bien défini et continu, pour $r \in \mathbb{R}^+$.

On remarque que $(r, t) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 1] \mapsto \alpha_r(t)$ est continue.

Donc pour $r, q \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} H : [0, 1]^2 &\rightarrow \mathbb{U} \\ (t, s) &\mapsto \alpha_{sq+(1-s)r}(t) \end{aligned}$$

est continue ; c'est donc une homotopie, et α_r et α_q sont homotopes strictement.

Ainsi, les α_r , pour $r \in \mathbb{R}^+$, sont 2 à 2 homotopes strictement.

En particulier, tous ces lacets sont homotopes strictement à α_0 , qui est un lacet constant (égal à 1), donc tous ces lacets sont **homotopes strictement à un point**.

Quitte à diviser P par son coefficient dominant, on le suppose unitaire.

On note donc

$$P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$$

Soit $\rho \in \mathbb{R}$ tel que $\rho > \max(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|)$

Si $z \in \mathbb{C}$ est de module ρ , on a :

$$\begin{aligned} |a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1}| &\leq |a_0| + |a_1| \rho + \dots + |a_{n-1}| \rho^{n-1} \\ &\leq (|a_0| + \dots + |a_{n-1}|) \rho^{n-1} \\ &\leq \rho^n \\ &\leq |z^n| \end{aligned}$$

Pour $s \in \mathbb{C}$, on pose $P_s = s(a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1}) + X^n$.

L'inégalité précédente montre que si $|s| \leq 1$, P_s n'admet pas de racine de module ρ et on peut alors poser, pour $t \in [0, 1]$:

$$\beta_s(t) = \frac{P_s(\rho \exp(2i\pi t))/P_s(\rho)}{|P_s(\rho \exp(2i\pi t))/P_s(\rho)|}$$

De manière analogue à précédemment, les β_s pour $s \in \mathbb{C}$ avec $|s| \leq 1$, sont 2 à 2 homotopes strictement.

Donc β_0 et β_1 sont homotopes strictement.

Or $\forall t \in [0, 1], \beta_0(t) = \frac{\rho^n \exp(2i\pi n t)}{|\rho^n \exp(2i\pi n t)|} = \exp(2i\pi n t)$, donc β_0 fait n tours autour du cercle unité, et donc β_1 aussi, d'après la **Proposition 2**.

On remarque que $\beta_1 = \alpha_\rho$, donc α_ρ effectue n tours autour du cercle unité.

Or on a vu que α_ρ est homotope à un point, donc effectue 0 tour autour du cercle unité, d'après la **Proposition 2**.

Il en vient donc que $n = 0$, donc que $\deg(P) = 0$.

3.2 Théorème de Borsuk-Ulam

Le théorème de Borsuk-Ulam est un résultat célèbre de topologie algébrique, qui est lié aux homotopies.

Théorème 2 (de Borsuk-Ulam). *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, si f est une application continue de $\mathbb{S}^n$ dans un espace euclidien de dimension n (par exemple $\mathbb{R}^n$), alors f admet 2 points antipodaux ayant même image, c'est-à-dire il existe $x \in \mathbb{S}^n$ tel que $f(x) = f(-x)$.*

Sans perte de généralité, il suffit de montrer ce résultat avec $\mathbb{R}^n$ comme espace euclidien de dimension n , muni du produit scalaire canonique.

3.2.1 Cas $n = 1$

La preuve pour $n = 1$ est très rapide.

Soit $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ continue, avec $\mathbb{S}^1 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2, a^2 + b^2 = 1\}$.

On définit

$$\begin{aligned} g : \mathbb{S}^1 &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) - f(-x) \end{aligned}$$

Il s'agit de montrer que g s'annule sur le cercle.

$\mathbb{S}^1$ est connexe donc $g(\mathbb{S}^1)$ l'est également, c'est donc un intervalle, qui est de plus centré en 0 car g est impaire ; donc $0 \in g(\mathbb{S}^1)$.

3.2.2 Cas $n = 2$

Pour le cas $n = 2$, on raisonne par l'absurde en utilisant le groupe fondamental.

On suppose qu'il existe $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ continue telle que $\forall x \in \mathbb{S}^2, f(x) \neq f(-x)$.

Soit

$$\begin{aligned} g : \mathbb{S}^2 &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ x &\mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|} \end{aligned}$$

g est bien définie par hypothèse.

On note g_* le morphisme induit par g de $\pi_1(\mathbb{S}^2)$ dans $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ (les notations sont acceptables car $\mathbb{S}^2$ et $\mathbb{S}^1$ sont connexes par arcs).

On remarque que si γ est un lacet de $\mathbb{S}^2$ d'extrémité $x_0 \in \mathbb{S}^2$, alors avec

$$\begin{aligned} H : [0, 1]^2 &\rightarrow \mathbb{S}^2 \\ (t, s) &\mapsto \frac{\gamma(t)(1-s) + sx_0}{\|\gamma(t)(1-s) + sx_0\|}, \end{aligned}$$

on a H continue avec $\forall t \in [0, 1], H(t, 0) = \gamma(t)$, $\forall t \in [0, 1], H(t, 1) = x_0$ et $\forall s \in [0, 1], H(0, s) = H(1, s) = x_0$.

Ainsi γ est strictement homotope à un point.

Ainsi il n'y a qu'une seule classe d'équivalence et **le groupe fondamental de $\mathbb{S}^2$ est le groupe trivial**, i.e. réduit à l'élément neutre.

Donc $g_*(\pi_1(\mathbb{S}^2))$ ne peut contenir que la classe d'équivalence des lacets de $\mathbb{S}^1$ homotopes à un point.

Posons

$$\begin{aligned} \alpha : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{S}^2 \\ x &\mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0) \end{aligned}$$

α est un lacet de $\mathbb{S}^2$.

Pour $t \in [0, 1]$, on note $g(\alpha(t)) = (\cos(2\pi p(t) + \varphi), \sin(2\pi p(t) + \varphi))$.

On a alors $p : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et on choisit φ tel que $p(0) = 0$, i.e. $g(\alpha(0)) = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$. g est impaire donc $\forall t \in [0, 1], g(\alpha(t + \frac{1}{2})) = g(-\alpha(t)) = -g(\alpha(t))$.

$$\text{Donc } \forall t \in [0, 1], \begin{cases} \cos(2\pi p(t + \frac{1}{2}) + \varphi) = -\cos(2\pi p(t) + \varphi) \\ \sin(2\pi p(t + \frac{1}{2}) + \varphi) = -\sin(2\pi p(t) + \varphi) \end{cases}$$

Donc, pour $t \in [0, 1]$, $2(p(t + \frac{1}{2}) - p(t))$ est un entier impair.

Donc $t \mapsto p(t + \frac{1}{2}) - p(t)$ est continue, à valeurs dans $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$, qui est discret, donc est constante, de valeur $\frac{k}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ impair.

Donc $p(1) = p(\frac{1}{2}) + \frac{k}{2} = p(0) + \frac{k}{2} + \frac{k}{2} = k$.

Donc le lacet $g_*(\alpha)$ de $\mathbb{S}^1$ effectue k tours autour du cercle unité, avec k impair, donc non nul, et $g_*(\alpha)$ n'est donc clairement pas homotope à un point, d'après la Proposition 2.

On a donc une absurdité.

Donc une telle fonction f ne peut pas exister.

3.3 Théorème du Point Fixe de Brouwer

Il s'agit d'un autre résultat célèbre de topologie algébrique, qui peut être vu de manière homotopique, ou bien déduit du théorème de Borsuk-Ulam (**Théorème 2**).

Théorème 3 (du Point Fixe de Brouwer). *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, si f est une fonction continue de $\mathbb{B}^n$ dans $\mathbb{B}^n$, alors f admet un point fixe, i.e. il existe $x \in \mathbb{B}^n$ tel que $f(x) = x$.*

3.3.1 Cas $n = 1$

Dans le cas où $n = 1$, il s'agit simplement d'une application du théorème des valeurs intermédiaires appliquée à la fonction $x \mapsto f(x) - x$, dont l'image de -1 (respectivement l'image de 1) est positive (respectivement négative).

3.3.2 Cas $n = 2$

Pour le cas $n = 2$, on utilise les homotopies.

Soit $f : \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{B}^2$ continue, on suppose que $\forall x \in \mathbb{B}^2, f(x) \neq x$.

Soit $g : \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ telle que, pour $x \in \mathbb{B}^2$, $g(x)$ soit l'intersection de $\mathbb{S}^1$ avec la demi-droite allant de $f(x)$ à x .

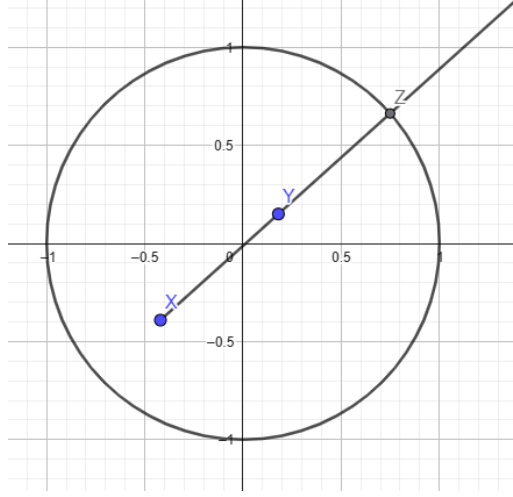


FIGURE 4 – Illustration de la fonction g : ici, $Y = f(X)$, $Z = g(X)$

Pour $x \in \mathbb{B}^2$, la demi-droite allant de $f(x)$ à x est $\{f(x) + t(x - f(x)), t \in \mathbb{R}^+\}$.

Donc $g(x) = f(x) + t_0(x - f(x))$, avec $t_0 \in \mathbb{R}^+$ tel que $\|f(x) + t_0(x - f(x))\|^2 = 1$.
Donc $\|x - f(x)\|^2 t_0^2 + 2\langle f(x), x - f(x) \rangle t_0 + \|f(x)\|^2 - 1 = 0$.

Le produit des racines du polynôme $\|x - f(x)\|^2 X^2 + 2\langle f(x), x - f(x) \rangle X + \|f(x)\|^2 - 1$ vaut $\frac{\|f(x)\|^2 - 1}{\|x - f(x)\|^2}$, qui est négatif, il y a donc une racine positive et une racine négative.

Donc $t_0 = -\frac{\langle f(x), x - f(x) \rangle}{\|x - f(x)\|^2} + \frac{\sqrt{\langle f(x), x - f(x) \rangle^2 + \|x - f(x)\|^2(1 - \|f(x)\|^2)}}{\|x - f(x)\|^2}$.

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{B}^2, g(x) = f(x) + \frac{\left(\sqrt{\langle f(x), x - f(x) \rangle^2 + \|x - f(x)\|^2(1 - \|f(x)\|^2)} - \langle f(x), x - f(x) \rangle \right)}{\|x - f(x)\|^2} (x - f(x)).$$

g est donc continue.

De plus, $g|_{\mathbb{S}^1} = id_{\mathbb{S}^1}$.

Soit γ_0 un lacet de $\mathbb{S}^1$ (c'est donc également un lacet de $\mathbb{B}^2$) d'extrémité $x_0 \in \mathbb{S}^1$.

Avec :

$$H : \begin{array}{ccc} [0, 1]^2 & \rightarrow & \mathbb{B}^2 \\ (s, t) & \mapsto & (1 - t)\gamma_0(s) + tx_0 \end{array},$$

H est une homotopie stricte de γ_0 en tant que lacet de $\mathbb{B}^2$ à un lacet constant.

Alors $g \circ H$ est une homotopie stricte allant de $g \circ \gamma_0$ au point $g(x_0)$.

Or $g|_{\mathbb{S}^1} = id_{\mathbb{S}^1}$, donc $g(x_0) = x_0$ et $g \circ \gamma_0 = \gamma_0$.

$g \circ H$ est à valeurs dans $\mathbb{S}^1$, donc γ_0 et le lacet constant valant x_0 sont homotopes strictement en tant que lacets de $\mathbb{S}^1$, d'homotopie stricte $g \circ H$.

Donc **tout lacet de $\mathbb{S}^1$ est homotope strictement à un point**, il n'y a donc qu'une seule classe d'équivalence et $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ **est un groupe trivial**.

Ceci est **absurde** car en réalité il y a une infinité de classes d'équivalences (si deux lacets ne font pas le même nombre de tours autour du cercle unité, ils ne sont pas homotopes).

Une telle fonction f ne peut donc pas exister.

3.3.3 Cas général : du théorème de Borsuk-Ulam vers le théorème du Point Fixe de Brouwer

Dans le cas général, on peut démontrer le théorème du Point Fixe de Brouwer à l'aide du théorème de Borsuk-Ulam.

Lemme 1. *Pour $n \geq 2$, il n'existe pas de fonction continue $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ telle que $\forall x \in \mathbb{S}^n, f(-x) = -f(x)$.*

Démonstration :

Si on suppose qu'une telle fonction f existe, alors f est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, puisque $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

Donc d'après le théorème de Borsuk-Ulam, il existe $x_0 \in \mathbb{S}^n$ tel que $f(x_0) = f(-x_0)$.

Or $f(-x_0) = -f(x_0)$ par hypothèse, donc $f(x_0) = -f(x_0)$ et $f(x_0) = 0$.

Ceci est impossible car $f(x_0) \in \mathbb{S}^{n-1}$.

On en déduit donc :

Lemme 2. *Pour $n \geq 2$, il n'existe pas de fonction continue $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ telle que $\forall x \in \mathbb{S}^{n-1}, f(-x) = -f(x)$.*

Démonstration :

Si on suppose qu'une telle fonction existe, soit $g : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ définie par :

$$g : (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \begin{cases} f(x_1, \dots, x_n) & \text{si } x_{n+1} \geq 0 \\ -f(-x_1, \dots, -x_n) & \text{si } x_{n+1} < 0 \end{cases}$$

Alors g est continue sur $\{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n, x_{n+1} \neq 0\}$

Comme $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{S}^{n-1}, f(x) = -f(-x)$, g est continue aux points $(x_1, \dots, x_{n+1})$ de $\mathbb{S}^n$ tels que $x_{n+1} = 0$

Finalement, g est continue sur $\mathbb{S}^n$ tout entier

On a alors que g est une application continue de $\mathbb{S}^n$ dans $\mathbb{S}^{n-1}$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{S}^n, g(-x) = -g(x)$, ce qui est impossible d'après le **Lemme 1**.

Ainsi, on peut démontrer le théorème du Point Fixe de Brouwer.

En effet, si $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$ est continue mais n'admet pas de point fixe, soit $g : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ telle que, pour $x \in \mathbb{B}^n$, $g(x)$ soit l'intersection entre $\mathbb{S}^{n-1}$ et la demi-droite allant de $f(x)$ à x .

Alors g est continue (cela se montre de la même manière que dans le cas $n = 2$, traité en partie **3.3.2**) et $g|_{\mathbb{S}^{n-1}} = id_{\mathbb{S}^{n-1}}$.

Donc $\forall x \in \mathbb{S}^{n-1}, f(-x) = -f(x)$, ce qui contredit le **Lemme 2**.

Donc f **admet nécessairement un point fixe** et ceci prouve le théorème du Point Fixe de Brouwer.

Annexes

A Théorème du relèvement

Théorème 4 (du relèvement). *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{U}$ une application continue, $t_0 \in I$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(t_0) = e^{i\theta_0}$, alors il existe une unique application continue $\Theta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall t \in I, f(t) = e^{i\Theta(t)}$ (on dit que Θ est un relèvement de f) et $\Theta(t_0) = \theta_0$.*

Démonstration :

Si $t \in I$, pour $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $f(t) = e^{i\theta}$, il existe un relèvement local de f défini et continu sur un voisinage de t dans I prenant en t la valeur θ . Il suffit de prendre un voisinage de t sur lequel f n'atteint pas la valeur $-f(t)$; $x \mapsto e^{ix}$ est alors un homéomorphisme de $] \theta - \pi, \theta + \pi[$ dans $\mathbb{U} \setminus \{-f(t)\}$, d'où l'existence et l'unicité de ce relèvement local.

Par ailleurs, si deux relèvements locaux Θ_1 et Θ_2 définis sur deux sous-intervalles J_1 et J_2 de I coïncident en un point $t \in J_1 \cap J_2$, alors $\Theta_2 - \Theta_1$ est nulle sur tout $J_1 \cup J_2$, puisqu'elle est continue et à valeurs dans $2\pi\mathbb{Z}$, qui est discret.

Ainsi, l'ensemble J des $x \in I$ pour lesquels f admet un relèvement Θ sur $[t_0, x]$ vérifiant $\Theta(t_0) = \theta_0$ est un sous-intervalle de I contenant t_0 , et f admet sur ce sous-intervalle J un unique relèvement Θ vérifiant $\Theta(t_0) = \theta_0$.

Il reste à montrer que $J = I$.

Soit $a = \sup J$.

Soit Θ' un relèvement local de f sur un voisinage J' de a dans I .

En ajoutant un multiple idoine de 2π à Θ' , on obtient que Θ et Θ' coïncident sur $J \cap J'$, qui est non vide car a est adhérent à J .

On peut donc étendre Θ à un relèvement $\tilde{\Theta}$ défini sur $J \cup J'$.

Donc $J' \subset J$.

Donc J est un voisinage dans I de $a = \sup J$, donc $\sup J = a = \sup I$.

De même, $\inf J = \inf I$.

Si $\inf I \in I$ (respectivement $\sup I \in I$), on a par continuité que $\inf J \in J$ (respectivement $\sup J \in J$).

Finalement, $J = I$ et on a bien un unique relèvement Θ défini sur I vérifiant $\Theta(t_0) = \theta_0$.

B Structure de groupe du groupe fondamental

Montrons que $\pi_1(X, p)$ muni de la loi $*$, où (X, p) est pointé, est un groupe. Si f, g, h sont des lacets d'extrémités p , on a alors :

$$(fg)h : t \in [0, 1] \mapsto \begin{cases} f(4t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{4}] \\ g(4t - 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ h(2t - 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$f(gh) : t \in [0, 1] \mapsto \begin{cases} f(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(4t - 2) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ h(4t - 3) & \text{si } t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

Donc $(fg)h$ et $f(gh)$ sont homotopes, en considérant :

$$H : (t, s) \in [0, 1]^2 \mapsto \begin{cases} f((2+2s)t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2+2s}] \\ g(4t - \frac{2}{1+s}) & \text{si } t \in [\frac{1}{2+2s}, \frac{3+s}{4+4s}] \\ h(\frac{4+4s}{1+3s}(t-1) + 1) & \text{si } t \in [\frac{3+s}{4+4s}, 1] \end{cases}$$

Donc $[(fg)h] = [f(gh)]$ et $([f][g])[h] = [f]([g][h])$.

La loi $*$ est donc associative.

L'élément neutre pour cette loi est $[\tilde{p}]$, où $\tilde{p} : t \in [0, 1] \mapsto p$.

L'inverse d'un lacet f est $g : t \mapsto f(1-t)$.

En effet, en considérant :

$$H : (t, s) \mapsto \begin{cases} f(2st) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ f(2s - 2st) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases},$$

on a une homotopie de $\tilde{p}$ vers fg , donc $[f][g] = [\tilde{p}]$.

Références

- [1] LAETITIA BOREL, PIERRE WEISS, *Une première approche de l'homotopie dans le cadre continu*, <https://perso.crans.org/lborel/projet/continu1.htm>
- [2] MICHELLE AUDIN *Topologie : Revêtements et groupe fondamental*, <https://www.math.univ-toulouse.fr/~gavrilov/enseignement/TopoAlg/courstopalgMAudin.pdf>
- [3] PIERRE DOLBEAULT *Analyse complexe*, Chapitre 5.5, édition Masson, 1990, ISSN 0339-879X
- [4] NICOLAS BERGERON *Groupe fondamental et revêtements*, <https://www.math.univparis13.fr/~ginot/RGF/GpFund&Revt.pdf>
- [5] NADIA LAFRENIÈRE *Les applications du théorème de Borsuk-Ulam en combinatoire*, <https://dermenjian.com/uqam/ete/presentations/notes/2015/1-Nadia.pdf>
- [6] BIANCA BARUCCHIERI *Autour d'un théorème de topologie algébrique*, <https://culturemath.ens.fr/breves/autour-d-un-theoreme-de-topologie-algebrique>
- [7] ALLEN HATCHER *Algebraic Topology*, Chapitre 1.1, éditeur Cambridge University Press, 2001, ISBN 978-0521795401