

Homotopies et applications en topologie

Des transformations de chemins continus en topologie algébrique

GINESTIERE Romain, *15803*

2025

1 Introduction

2 Homotopies, généralités

- Quelques définitions
- Groupe fondamental

3 Utilisation des homotopies et du groupe fondamental

- Théorème de Borsuk-Ulam
- Théorème du Point Fixe de Brouwer

4 Conclusion

5 Annexes

- En ce qui concerne le groupe fondamental
- Listings Python

- Concept d'homotopie imaginé et développé par Henri Poincaré & Luitzen Egbertus Jan Brouwer
- "Déformation, transformation continue" d'un chemin
- Utilisations multiples : relation d'équivalence, groupe fondamental...

On se place dans $(\mathbb{R}^n, \langle, \rangle)$ euclidien, $n \in \mathbb{N}^*$

- $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1\}$
- $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}, \|x\| = 1\}$
- $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$
- X et Y désigneront des parties de $\mathbb{R}^n$.

- 1 Introduction
- 2 Homotopies, généralités
 - Quelques définitions
 - Groupe fondamental
- 3 Utilisation des homotopies et du groupe fondamental
 - Théorème de Borsuk-Ulam
 - Théorème du Point Fixe de Brouwer
- 4 Conclusion
- 5 Annexes
 - En ce qui concerne le groupe fondamental
 - Listings Python

1 Introduction

2 Homotopies, généralités

- Quelques définitions
- Groupe fondamental

3 Utilisation des homotopies et du groupe fondamental

- Théorème de Borsuk-Ulam
- Théorème du Point Fixe de Brouwer

4 Conclusion

5 Annexes

- En ce qui concerne le groupe fondamental
- Listings Python

Définition

Un **chemin continu** de X est une application continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$, on dit alors que $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$ sont les extrémités de ce chemin.

Définition

Un chemin continu γ de X est appelé **lacet** si ses extrémités sont confondues, *i.e.* si $\gamma(0) = \gamma(1)$.



Figure: Illustration d'un chemin continu dans $\mathbb{R}^2$ d'extrémités A et B

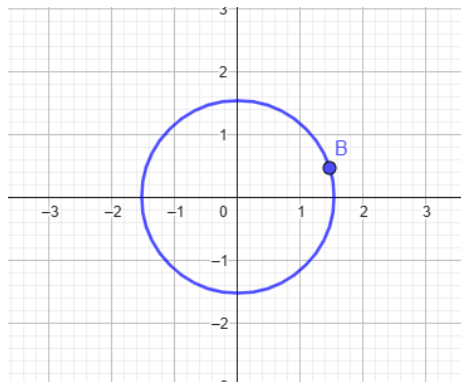


Figure: Lacet à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ d'extrémité B

Définition

Chemins continus γ_1 et γ_2 de X **homotopes** : $H : [0, 1]^2 \rightarrow X$ continue telle que :

- $\forall t \in [0, 1], H(t, 0) = \gamma_0(t)$
- $\forall t \in [0, 1], H(t, 1) = \gamma_1(t)$

Définition

Si si $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ et $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$, on dit que les deux chemins sont **homotopes strictement** si les extrémités sont fixées.

Propriété

Relation "est homotope" : relation d'équivalence

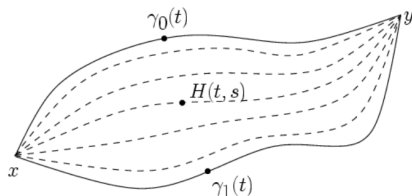


Figure: Illustration d'une homotopie stricte de γ_0 vers γ_1
(source : site du département de mathématiques et applications de l'École Normale Supérieure de Paris)

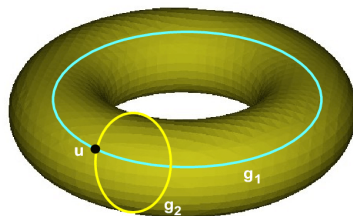


Figure: Ici, les deux lacets g_1 et g_2 d'extrémité u , à valeurs dans un tore de $\mathbb{R}^3$, ne sont pas homotopes
(source : Frédéric Elie sur researchgate.net)

(X, p) est pointé.

Pour γ lacet d'extrémité p , $[\gamma]$ est la classe d'équivalence pour l'homotopie stricte.

Définition du groupe fondamental

$$\pi_1(X, p) = \{[\gamma], \gamma \text{ lacet d'extrémité } p\}$$

$$f * g : t \in [0, 1] \mapsto \begin{cases} f(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2t - 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$[f] * [g] = [f][g] = [f * g]$$

Proposition

Si X est connexe par arcs, $\pi_1(X, p)$ et $\pi_1(X, q)$ sont isomorphes.

Proposition

Si f est une application continue de X dans $f(X)$, alors $f_* : [\gamma] \in \pi_1(X, p) \mapsto [f \circ \gamma]$ est un morphisme de $\pi_1(X, p)$ dans $\pi_1(f(X), f(p))$.

Propriété : invariance topologique

Si X et Y sont connexes par arcs et homéomorphes, alors leurs groupes fondamentaux sont isomorphes.

- 1 Introduction
- 2 Homotopies, généralités
 - Quelques définitions
 - Groupe fondamental
- 3 Utilisation des homotopies et du groupe fondamental
 - Théorème de Borsuk-Ulam
 - Théorème du Point Fixe de Brouwer
- 4 Conclusion
- 5 Annexes
 - En ce qui concerne le groupe fondamental
 - Listings Python

Théorème de Borsuk-Ulam

Si $f : \mathbb{S}^n \rightarrow E$ est continue, où E est euclidien de dimension n , alors il existe $x \in \mathbb{S}^n$ tel que $f(x) = f(-x)$.

$$\begin{aligned} g : \mathbb{S}^1 &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) - f(-x) \end{aligned}$$

$g(\mathbb{S}^1)$ connexe, donc un intervalle

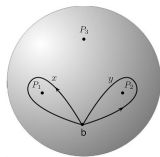
g impaire, donc $g(\mathbb{S}^1)$ centré en 0

$0 \in g(\mathbb{S}^1)$

$$g : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$$

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}$$

$\pi_1(\mathbb{S}^2)$ est le groupe trivial



$g_*(\pi_1(\mathbb{S}^2))$ est le groupe trivial

Or, avec

$$\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^2$$

$$x \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0) ,$$

$g_*(\alpha)$ n'est pas homotope à un point

Voir le théorème de Borsuk-Ulam algorithmiquement : dimension 1

cpge-paradise.com

Fonction `affichage_Borsuk_Ulam_dim1(f,R)`, prenant en entrée une fonction Python `f` et le rayon `R` de la sphère

Renvoie le cercle avec un code couleur

Plus c'est rouge, plus $|f(x) - f(-x)|$ est petit

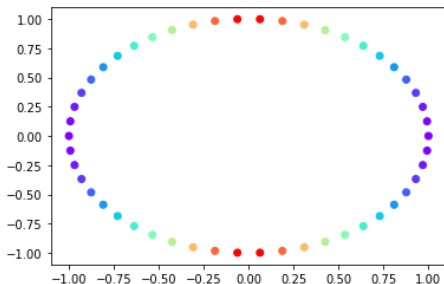


Figure: Exemple avec $f : (x, y) \in \mathbb{S}^1 \mapsto x$ et $R = 1$

Voir le théorème de Borsuk-Ulam algorithmiquement : dimension 1

cpge-paradise.com

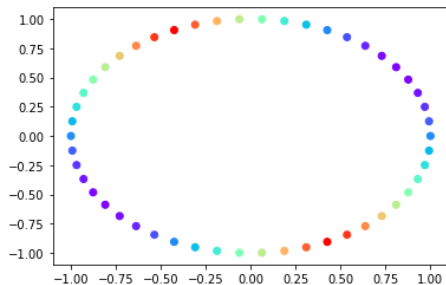


Figure: Figure obtenue avec
 $f : (x, y) \mapsto 9 \sin(x) + 5 \sin(y)$ et $R = 1$

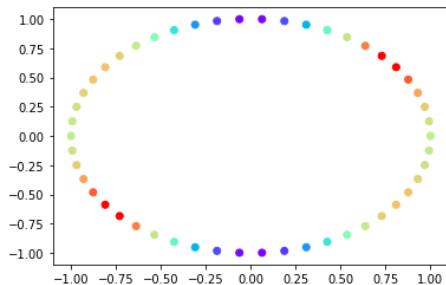


Figure: Figure obtenue avec
 $f : (x, y) \mapsto 9e^{4x} - 8e^{5y}$ et $R = 1$

Voir le théorème de Borsuk-Ulam algorithmiquement : dimension 2

cpge-paradise.com

matplotlib ne permet pas d'afficher de figures en 3 dimensions
Utilisons les coordonnées sphériques

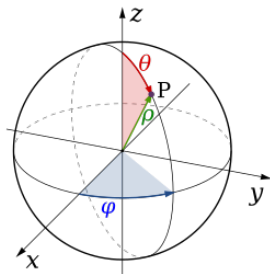


Figure: Paramétrage en coordonnées sphériques d'un point P de $\mathbb{R}^3$:

$\theta_{(x,y,z)} \in [0, \pi]$ est la colatitude et $\varphi_{(x,y,z)} \in [0, 2\pi[$ est la longitude

Ici, $\rho_{(x,y,z)}$ est fixé à $\rho_{(x,y,z)} = R$

Les directions x , y et z correspondent aux directions des vecteurs dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$

Voir le théorème de Borsuk-Ulam algorithmiquement : dimension 2

cpge-paradise.com

Fonction `affichage_Borsuk_Ulam_dim2(f,R)`, prenant en entrée une fonction Python `f` et le rayon `R` de la sphère
Renvoie une figure représentant les valeurs de $(\theta_{(x,y,z)}, \varphi_{(x,y,z)})$ avec un code couleur
Plus c'est rouge, plus $\|f(x,y,z) - f(-(x,y,z))\|$ est petit

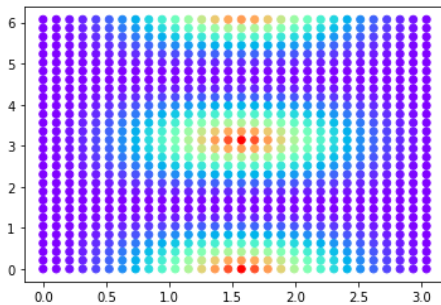


Figure: Exemple avec $f : (x,y,z) \in \mathbb{S}^2 \mapsto (y,z)$ et $R = 1$

Voir le théorème de Borsuk-Ulam algorithmiquement : dimension 2

cpge-paradise.com

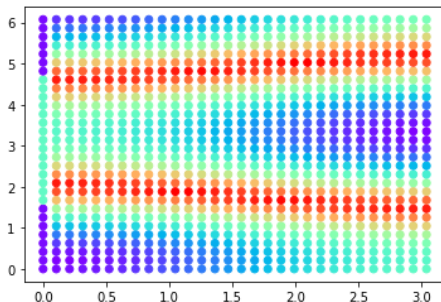


Figure: Figure obtenue avec

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta_{(x,y,z)}) + 3 \sin(\theta_{(x,y,z)}) + 2 \cos(\varphi_{(x,y,z)}) \\ 4 \cos(\theta_{(x,y,z)}) + 2 \sin(\theta_{(x,y,z)}) + 15 \cos(\varphi_{(x,y,z)}) + 3 \sin(\varphi_{(x,y,z)}) \end{pmatrix} \text{ et } R = 1$$

Voir le théorème de Borsuk-Ulam algorithmiquement : dimension 2

cpge-paradise.com

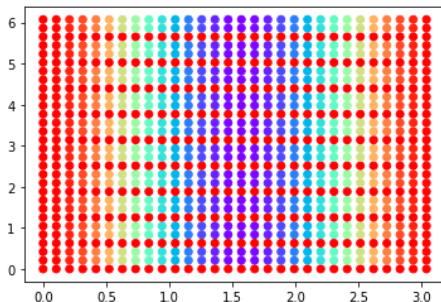


Figure: Figure obtenue avec

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 30 - 50\mathbb{S}^2(\theta_{(x,y,z)}) + 10 \sin(25\varphi_{(x,y,z)}) \sin^2(\theta_{(x,y,z)}) \\ 101325(1 - 0.1\mathbb{S}^2(\theta_{(x,y,z)}))(1 + 0.05 \cos(30\varphi_{(x,y,z)}) \sin^2(\theta_{(x,y,z)})) \end{pmatrix} \text{ et } R = 6378$$

Donne le vecteur $\begin{pmatrix} T \\ P \end{pmatrix}$, où T est la température en $^{\circ}\text{C}$ et P la pression en Pa

Théorème du Point Fixe de Brouwer

Si $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$ est continue, alors il existe $x \in \mathbb{B}^n$ tel que $f(x) = x$.

On suppose : $\forall x \in \mathbb{B}^2, f(x) \neq x$

$g(x)$: intersection de $\mathbb{S}^1$ avec la demi-droite allant de $f(x)$ à x

H homotopie stricte sur $\mathbb{B}^2$ de γ à un point

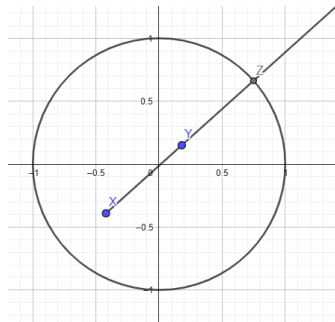


Figure: Illustration de la fonction g : ici, $Y = f(X)$, $Z = g(X)$

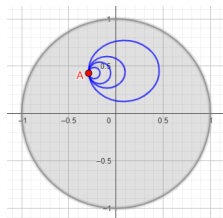


Figure: On voit que $\pi_1(\mathbb{B}^2)$ est le groupe trivial, d'où l'existence de H

Alors $g \circ H$ homotopie stricte sur $\mathbb{S}^1$ de γ à un point

Donc $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ est le groupe trivial, absurde

Voir le théorème du Point Fixe de Brouwer algorithmiquement en dimension 2

cpge-paradise.com

Fonction `affichage_point_fixe_de_Brouwer(f)`, prenant en entrée une fonction Python `f`

Renvoie le disque unité avec un code couleur

Plus c'est rouge, plus $\|f(x) - x\|$ est petit

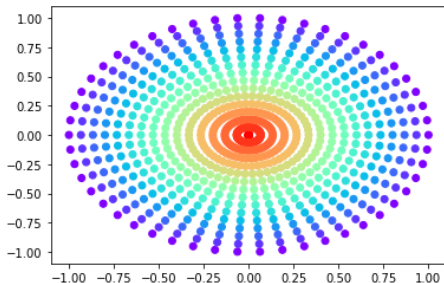


Figure: Exemple avec une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$

Voir le théorème du Point Fixe de Brouwer cpge-paradise.com algorithmiquement en dimension 2 : fonction de Möbius

Fonction de Möbius : $f : z \in \overline{\mathbb{D}} \mapsto e^{i\alpha} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$

On identifie $\mathbb{B}^2$ à $\overline{\mathbb{D}}$

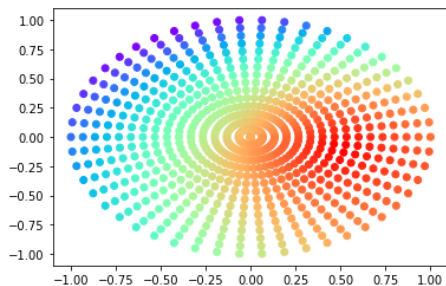


Figure: Figure obtenue pour $\alpha = 1$ et $a = \frac{1}{4} + \frac{3i}{10}$

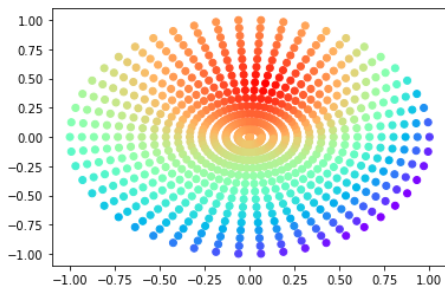


Figure: Figure obtenue pour $\alpha = 5$ et $a = \frac{2}{5} + \frac{i}{5}$

Voir le théorème du Point Fixe de Brouwer algorithmiquement en dimension 2 : application continue générée aléatoirement

cpge-paradise.com

`application_aleatoire()` permet de générer aléatoirement une application continue.

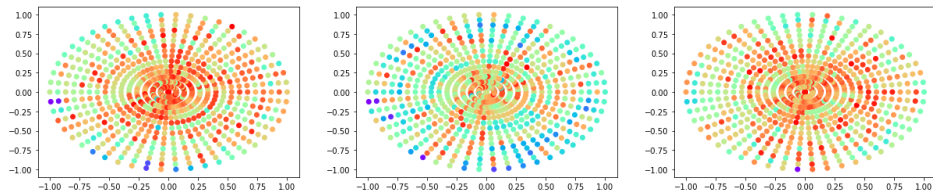


Figure: Différentes figures obtenues avec :
`affichage_point_fixe_de_Brouwer(application_aleatoire())`

- 1 Introduction
- 2 Homotopies, généralités
 - Quelques définitions
 - Groupe fondamental
- 3 Utilisation des homotopies et du groupe fondamental
 - Théorème de Borsuk-Ulam
 - Théorème du Point Fixe de Brouwer
- 4 Conclusion
- 5 Annexes
 - En ce qui concerne le groupe fondamental
 - Listings Python

- Homotopies : transformations continues permettent la construction d'objets mathématiques dont un invariant topologique
- Outils puissants permettant plusieurs démonstrations
- Théorèmes fondamentaux de topologie algébrique



LAETITIA BOREL, PIERRE WEISS, *Une première approche de l'homotopie dans le cadre continu*,

<https://perso.crans.org/lborel/projet/continu1.htm>



MICHELLE AUDIN *Topologie: Revêtements et groupe fondamental*,

<https://www.math.univ-toulouse.fr/~gavrilov/enseignement/TopoAlg/courstopalgMAudin.pdf>



PIERRE DOLBEAULT *Analyse complexe*, Chapitre 5.5, édition Masson, 1990, ISSN 0339-879X



NICOLAS BERGERON *Groupe fondamental et revêtements*, <https://www.math.univparis13.fr/~ginot/RGF/GpFund&Revt.pdf>



NADIA LAFRENIÈRE *Les applications du théorème de Borsuk-Ulam en combinatoire*, <https://dermenjian.com/uqam/ete/presentations/notes/2015/1-Nadia.pdf>



BIANCA BARUCCHIERI *Autour d'un théorème de topologie algébrique*, <https://culturemath.ens.fr/breves/autour-d-un-theoreme-de-topologie-algebrique>



ALLEN HATCHER *Algebraic Topology*, Chapitre 1.1, éditeur Cambridge University Press, 2001, ISBN 978-0521795401

- 1 Introduction
- 2 Homotopies, généralités
 - Quelques définitions
 - Groupe fondamental
- 3 Utilisation des homotopies et du groupe fondamental
 - Théorème de Borsuk-Ulam
 - Théorème du Point Fixe de Brouwer
- 4 Conclusion
- 5 Annexes
 - En ce qui concerne le groupe fondamental
 - Listings Python

$$f * g : t \in [0, 1] \mapsto \begin{cases} f(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2t - 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$[f] * [g] = [f][g] = [f * g]$$

$$f * g : t \in [0, 1] \mapsto \begin{cases} f(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2t - 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$[f] * [g] = [f][g] = [f * g]$$

- **Associativité :**

$(fg)h$ et $f(gh)$ sont homotopes, donc $([f][g])[h] = [f]([g][h])$.

$$f * g : t \in [0, 1] \mapsto \begin{cases} f(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2t - 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$[f] * [g] = [f][g] = [f * g]$$

- **Associativité :**

$(fg)h$ et $f(gh)$ sont homotopes, donc $([f][g])[h] = [f]([g][h])$.

- **Élément neutre :**

On note $\tilde{p} : t \in [0, 1] \mapsto p$.

$f\tilde{p}$ et f sont homotopes.

$[\tilde{p}]$ est l'élément neutre.

$$f * g : t \in [0, 1] \mapsto \begin{cases} f(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2t - 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$[f] * [g] = [f][g] = [f * g]$$

- **Associativité :**

$(fg)h$ et $f(gh)$ sont homotopes, donc $([f][g])[h] = [f]([g][h])$.

- **Élément neutre :**

On note $\tilde{p} : t \in [0, 1] \mapsto p$.

$f\tilde{p}$ et f sont homotopes.

$[\tilde{p}]$ est l'élément neutre.

- **Inverse :**

Avec $g : t \in [0, 1] \mapsto f(1 - t)$, fg et $\tilde{p}$ sont homotopes.

$[g] = [f]^{-1}$

Proposition

Si X est connexe par arcs, $\pi_1(X, p)$ et $\pi_1(X, q)$ sont isomorphes.

$\gamma : [0, 1]$ chemin continu de p à q

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, p) & \rightarrow & \pi_1(X, q) \\ [\alpha] & \mapsto & [\gamma][\alpha][\gamma]^{-1} \end{array}$$

C'est un isomorphisme.

Propriété

Si X et Y sont connexes par arcs et homéomorphes, alors leurs groupes fondamentaux sont isomorphes.

Si $f : X \rightarrow f(X)$ continue, pour γ lacet d'extrémité p , $f_*(\gamma) = f \circ \gamma$ est un lacet d'extrémité $f(p)$.

f_* compatible avec l'homotopie stricte et avec $*$.

f_* définit un morphisme de $\pi_1(X, p)$ dans $\pi_1(f(X), f(p))$.

Si f est un homéomorphisme,

$(f^{-1})_* \circ f_* = (f^{-1} \circ f)_* = (id_X)_* = id_{\pi_1(X, p)}$, donc f_* est une isomorphisme.

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3 import math
4 import random
```

```
1 def premiere_coordonnee(X):
2     return X[0]
3
4 def deuxieme_coordonnee(X):
5     return X[1]
6
7 def produit_des_coordonnees(X):
8     return X[0]*X[1]
9
10 def polynome_second_degre(a1,b1,a2,b2,c):
11     def fonction(X):
12         x = X[0]
13         y = X[1]
14         return a1*(x**2)+b1*x+a2*(y**2)+b2*y+c
15     return fonction
16
17 def fonction_trigonometrique(a,b):
18     def fonction(X):
19         x = X[0]
20         y = X[1]
21         return a*math.sin(x) + b*math.sin(y)
22     return fonction
23
24 def fonction_exponentielle(a,b,alpha,beta):
25     def fonction(X):
26         x = X[0]
27         y = X[1]
28         return a*math.exp(alpha*x) + b*math.exp(beta*y)
29     return fonction
```



```
1 def affichage_Borsuk_Ulam_dim1(f,R):
2     x = []
3     y = []
4     d_values=[]
5     for j in range(50):
6         x.append(R*math.cos((j*math.pi)/25))
7         y.append(R*math.sin((j*math.pi)/25))
8
9     for k in range(len(x)):
10        X = (x[k],y[k])
11        Y = (-x[k],-y[k])
12        d = abs(f(X)-f(Y))
13        d_values.append(d)
14
15    plt.scatter(x, y, c=d_values, cmap='rainbow_r')
16    plt.show()
```

```
1 def enleve_premiere_coordonnee(X):
2     return (X[1],X[2])
3
4 def enleve_deuxieme_coordonnee(X):
5     return (X[0],X[2])
6
7 def enleve_troisieme_coordonnee(X):
8     return (X[0],X[1])
9
10 def temperature_pression(X):
11     x = X[0]
12     y = X[1]
13     z = X[2]
14     theta = math.acos(z/math.sqrt(x**2+y**2+z**2))
15     phi = math.atan2(y, x)
16     T = 30 - 50*math.cos(theta)**2 + 10*math.sin(25*phi)*math.sin(theta)**2
17     P = 101325*(1-0.1*math.cos(theta)**2)*(1+0.05*math.cos(30*phi)*math.sin(theta)**2)
18     return (T,P)
19
20 def fonction_trigonometrique_2(a,b,c,d,e,f,g,h):
21     def fonction(X):
22         x = X[0]
23         y = X[1]
24         z = X[2]
25         theta = math.acos(z/math.sqrt(x**2+y**2+z**2))
26         phi = math.atan2(y, x)
27
28         x_image = a*math.cos(theta)+b*math.sin(theta)+c*math.cos(phi)+d*math.sin(phi)
29         y_image = e*math.cos(theta)+f*math.sin(theta)+g*math.cos(phi)+h*math.sin(phi)
30         return (x_image,y_image)
```

```
1 def affichage_Borsuk_Ulam_dim2(f,R):
2     theta = []
3     phi = []
4     d_values=[]
5     for i in range(30):
6         for j in range(30):
7             theta.append((i * math.pi)/30)
8             phi.append((j * math.pi)/15)
9
10    for k in range(len(theta)):
11        x = R*math.sin(theta[k])*math.cos(phi[k])
12        y = R*math.sin(theta[k])*math.sin(phi[k])
13        z = R*math.cos(theta[k])
14        X = (x,y,z)
15        Y = (-x,-y,-z)
16        d = math.sqrt((f(X)[0]-f(Y)[0])**2+(f(X)[1]-f(Y)[1])**2)
17        d_values.append(d)
18
19    plt.scatter(theta, phi, c=d_values, cmap='rainbow_r')
20    plt.show()
```

```
1 def rotation(theta):
2     def rot(X):
3         x = X[0]
4         y = X[1]
5         return (x*math.cos(theta)-y*math.sin(theta), y*math.cos(theta)+x*math.sin(theta))
6     return rot
7
8 def identite(X):
9     return X
10
11 def conjugue(X):
12     x = X[0]
13     y = X[1]
14     return (x,-y)
15
16 def ecrasement_a_droite(X):
17     x = X[0]
18     y = X[1]
19     return (x+(np.sqrt(1-y**2)-x)/2,y)
20
21 def compose(f,g):
22     def fonction(X):
23         Y = (g(X)[0], g(X)[1])
24         return f(Y)
25     return fonction
```

```
1 def Mobius(alpha,a):
2     a_compl = complex(a[0],a[1])
3     assert(abs(a_compl)<1)
4
5     def fonction(X):
6         z = complex(X[0],X[1])
7
8         A = (math.cos(alpha) + math.sin(alpha)*1j)*(z-a_compl)/(1-a_compl.conjugate()*z)
9         return (A.real, A.imag)
10
11     return fonction
```

Génération aléatoire d'une application continue de $\mathbb{B}^2$ dans $\mathbb{B}^2$ (1/3)

cpge-paradise.com

```
1 def application_aleatoire():
2     Liste_r = []
3     Liste_theta = []
4     for i in range(16):
5         Liste_r.append(i/15)
6     for j in range(50):
7         Liste_theta.append((j*math.pi)/25)
8     d = {}
9     for r in Liste_r:
10        if r==0:
11            r0=random.random()
12            theta0=2*math.pi*random.random()
13            d[(0,0)] = (r0*math.cos(theta0),r0*math.sin(theta0))
14        else:
15            for theta in Liste_theta:
16                r0=random.random()
17                theta0=2*math.pi*random.random()
18                d[(r*math.cos(theta),r*math.sin(theta))] = (r0*math.cos(theta0),r0*math.
19                    sin(theta0))
20
21 def fonction(X):
22     x = X[0]
23     y = X[1]
24     r = math.sqrt(x**2+y**2)
25     if r==0:
26         return d[(0,0)]
```

Génération aléatoire d'une application continue de $\mathbb{B}^2$ dans $\mathbb{B}^2$ (2/3)

cpge-paradise.com

```
1  else:
2      def th(a,b):
3          if a==0:
4              if b>=0:
5                  return math.pi/2
6              else:
7                  return -math.pi/2
8          else:
9              return math.atan(b/a)
10  theta = th(x,y)
11  i=0
12  while Liste_r[i]<r:
13      i=i+1
14  j=0
15  while Liste_theta[j]<theta and j<len(Liste_theta)-1:
16      j=j+1
17  r0=Liste_r[i]
18  theta0=Liste_theta[j]
19  if i==len(Liste_r)-1:
20      ttheta=(theta-theta0)/(Liste_theta[j+1]-theta0)
21      f0=d[(r0*math.cos(theta0),r0*math.sin(theta0))]
22      f1=d[(r0*math.cos(Liste_theta[j+1]),r0*math.sin(Liste_theta[j+1]))]
23      return (ttheta*f1[0]+(1-ttheta)*f0[0],ttheta*f1[1]+(1-ttheta)*f0[1])
```

Génération aléatoire d'une application continue de $\mathbb{B}^2$ dans $\mathbb{B}^2$ (3/3)

cpge-paradise.com

```
1     else:
2         ttheta=(theta-theta0)/(Liste_theta[j+1]-theta0)
3         tr = (r-r0)/(Liste_r[i+1]-r0)
4         f0=d[(r0*math.cos(theta0),r0*math.sin(theta0))]
5         f1=d[(Liste_r[i+1]*math.cos(Liste_theta[j+1]),Liste_r[i+1]*math.sin(
6             Liste_theta[j+1]))]
7
8         r_im=tr*math.sqrt(f1[0]**2+f1[1]**2)+(1-tr)*math.sqrt(f0[0]**2+f0[1]**2)
9         theta_im = ttheta*th(f1[0],f1[1])+(1-ttheta)*th(f0[0],f0[1])
10        return (r_im*math.cos(theta_im),r_im*math.sin(theta_im))
11
12    return fonction
```



```
1 def affichage_point_fixe_de_Brouwer(f):
2     x = []
3     y = []
4     d_values=[]
5     for i in range(16):
6         for j in range(50):
7             x.append((i/15)*math.cos((j*math.pi)/25))
8             y.append((i/15)*math.sin((j*math.pi)/25))
9
10    for k in range(len(x)):
11        X = (x[k],y[k])
12        d = math.sqrt((f(X)[0]-x[k])**2+(f(X)[1]-y[k])**2)
13        d_values.append(d)
14
15    plt.scatter(x, y, c=d_values, cmap='rainbow_r')
16    plt.show()
```