

Atténuation sonore par un mur grâce aux résonateurs de Helmholtz

Souleiman SBAI

N°SCEI 19388

Positionnement thématique

Physique (*Physique ondulatoire*)

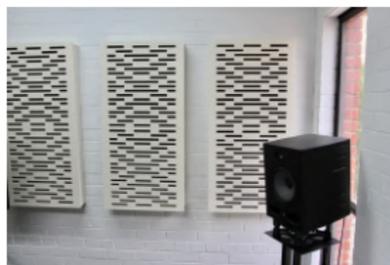
Informatique (*Informatique pratique*)

2022-2023

- 1 Introduction
- 2 Étude théorique
- 3 Études des cavités en série
- 4 Étude des cavités perforées
- 5 Expériences et modélisations
- 6 Conclusion et discussion



(a) Guitare acoustique



(b) Panneau acoustique



(c) Isolation en studio

Figure 1: Exemples du phénomène de résonance acoustique



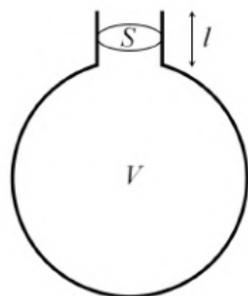
(a) Échappement de voiture



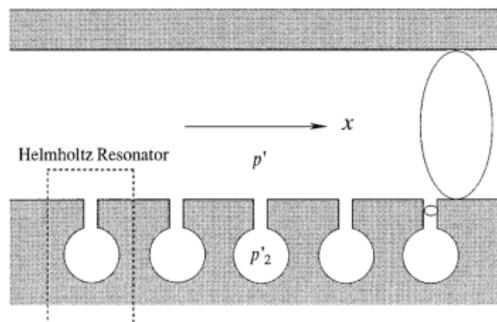
(b) Auditorium

Figure 2: Exemples du phénomène de résonance acoustique

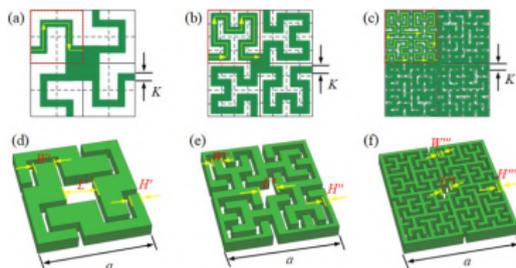
Variantes des résonateurs de Helmholtz



(a) Cavité simple



(b) Résonateurs en série



(c) Fractale de Hilbert

Figure 3: Diverses dispositions des résonateurs de Helmholtz

Problématique

Comment manipuler les paramètres géométriques des résonateurs de Helmholtz pour contourner leurs limitations de fréquences et de gain, et ainsi permettre une meilleure atténuation des nuisances sonores en milieu urbain ?

- 1 Introduction
- 2 Étude théorique**
- 3 Études des cavités en série
- 4 Étude des cavités perforées
- 5 Expériences et modélisations
- 6 Conclusion et discussion

Explication théorique du phénomène de la résonance de Helmholtz

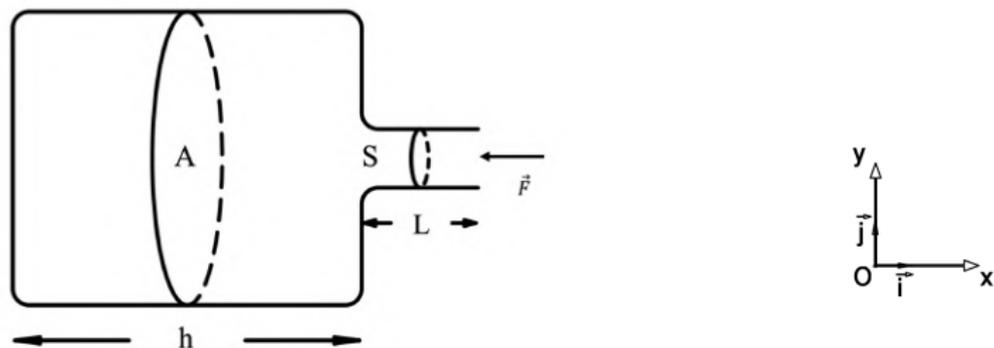


Figure 4: Modèle de la cavité

On s'intéresse à la vibration de la surface virtuelle S présente dans le col de la cavité.

Détermination de la fréquence propre de la cavité

Notations:

- V : Volume du cylindre intérieur
- $p_0(t)$: Pression à l'extérieur du col
- $p_i(t)$: Pression au niveau du volume V
- Q : Variation de la masse par unité de temps qui modifie la masse volumique de l'air dans la cavité de volume V ; $Q = V \frac{\partial \rho}{\partial t}$

On trouve:

$$p_0 = \left[\frac{c^2}{Vj\omega} + \frac{j\omega L}{S} \right] Q = \left[\omega^2 - \frac{c^2 S}{LV} \right] \frac{jLQ}{\omega S}$$

Démonstration en annexe

Détermination de la fréquence propre de la cavité

Il vient alors que p_0 devient minimale lorsque la quantité entre crochets s'annule, ce qui fournit une fréquence propre de la cavité égale à:

Fréquence propre

$$f_0 = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{S}{VL}}$$

Définition

$$TL = 10 \log_{10} \frac{W_{int}}{W_{ext}}$$

Où W_{int} est l'énergie de l'onde acoustique à l'intérieur du résonateur et W_{ext} son énergie à l'extérieur.

En notant I l'intensité sonore qui vérifie $I = \frac{p^2}{2\rho c}$, on peut écrire:

$$W = IS = \frac{p^2}{2\rho c} S$$

Autrement

$$TL = 10 \log_{10} \frac{\| p_{int} \|}{\| p_{ext} \|}$$

On prendra pour simplifier $p_{ext} = 1 \text{ bar}$

Allure de la courbe $TL(\omega)$

On considère le paramétrage suivant:

S m ²	L mm	V	c m.s ⁻¹	ρ Kg.m ⁻³	f_0 Hz
$3,14 \cdot 10^{-4}$	30	$7,85 \cdot 10^{-5}$	340	1.292	624.83

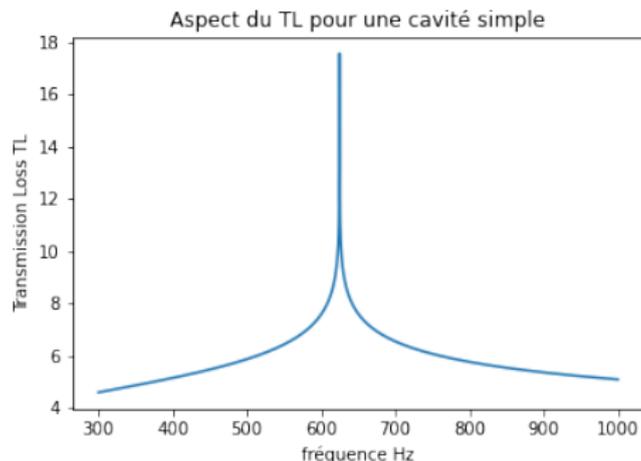
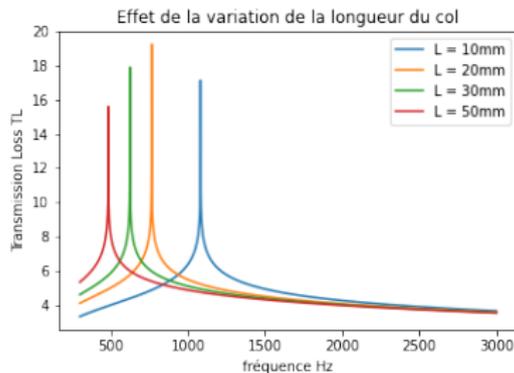


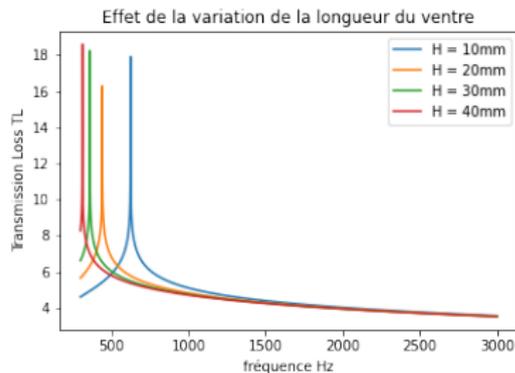
Figure 5: Allure du Transmission Loss (dB) pour une cavité simple

Effets de la variation des paramètres géométriques sur la réponse de la cavité

R (mm)	H (mm)	r (mm)	L (mm)	c m.s ⁻¹	ρ Kg.m ⁻³	
50	10	10	30	340	1.292	624.83



(a)



(b)

Figure 6: (a): effet de variation de L ; (b): effet de variation de h

On constate que:

- Lorsque L diminue, f_0 augmente
- Lorsque H diminue, f_0 augmente

Ceci engendre des difficultés pratiques et industrielles lorsqu'on cherche à produire des cavités de fréquence propres élevées, ou encore des cavités ayant plusieurs fréquences propres.

- 1 Introduction
- 2 Étude théorique
- 3 Études des cavités en série**
- 4 Étude des cavités perforées
- 5 Expériences et modélisations
- 6 Conclusion et discussion

Couplage de deux résonateurs de Helmholtz

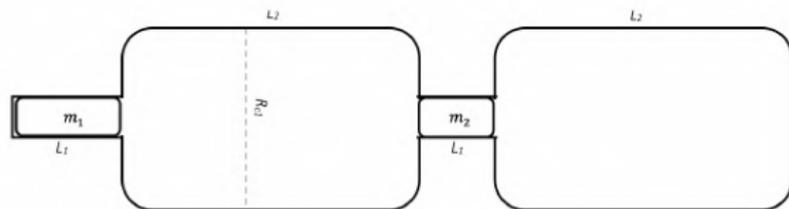


Figure 7: Modèle de deux résonateurs identiques en série

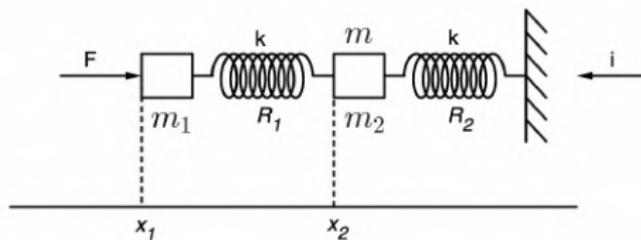


Figure 8: Modèle mécanique équivalent de ce résonateur

Fréquences propres du système

Bilan des forces

Pour la masse m_1 :

- $\vec{F}(t) = -F(t)\vec{i}$: Force excitatrice qui modélise le son
- $-k(x_1 - x_2)\vec{i}$: force du ressort R_1

Pour la masse m_2 :

- $k(x_1 - x_2)\vec{i}$: force du ressort R_1
- $-kx_2\vec{i}$: force du ressort R_2

On applique le principe fondamental de la dynamique aux masses m_1 et m_2 :

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = -F - k(x_1 - x_2) \\ m_2\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) - kx_2 \end{cases}$$

Fréquences propres du système

On pose $m_1 = m_2$ et $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ on trouve:

$$X_2 = \frac{-\frac{F}{k}}{1 - 3\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4}$$

Le dénominateur de cette équation s'annule en:

$$\begin{cases} \omega_{01} = \omega_0 \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \\ \omega_{02} = \omega_0 \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \end{cases}$$

Modélisation avec Python

On trace grâce à Python

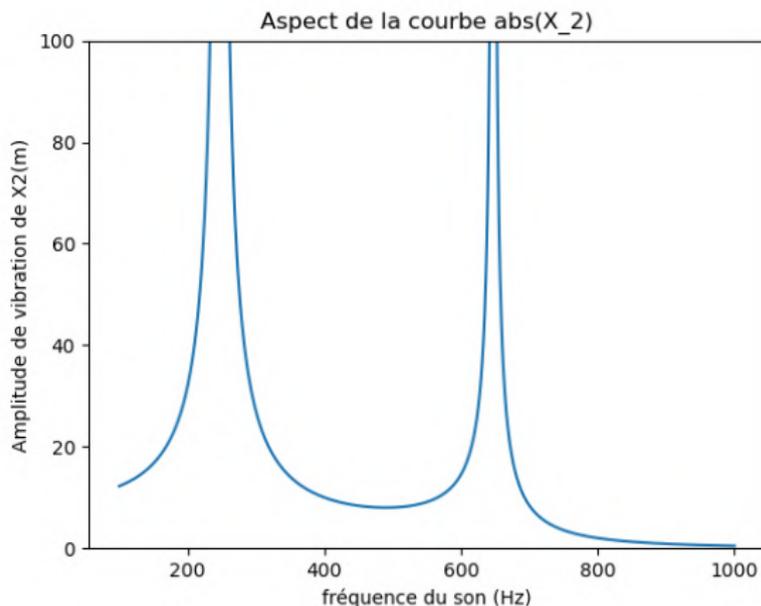


Figure 9: $\text{abs}(X_2) = f(w)$

Généralisation au cas de n résonateurs

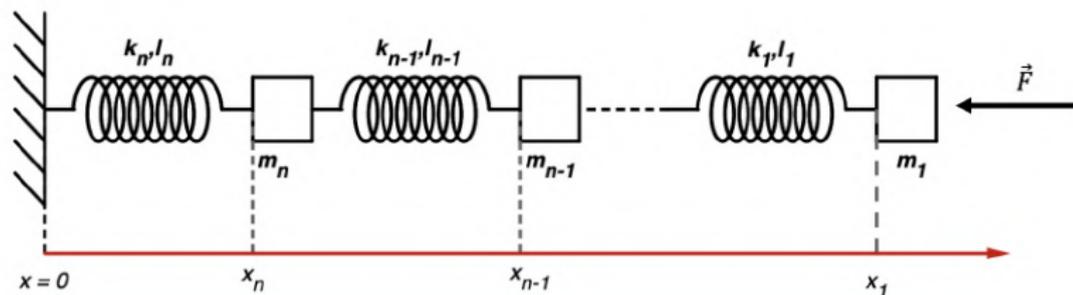


Figure 10: Modèle mécanique équivalent des cavités en série

Notons que les masses m_i et les constantes de raideur k_i dans ce modèle sont en fonction des géométries des cavités mises en série.

Généralisation au cas de n résonateurs

On applique la seconde loi de Newton à chaque masse m_i du système

Pour m_1

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1(x_1 - x_2)$$

Pour m_k avec $2 \leq k \leq n$

$$m_k \ddot{x}_k = -k_k(x_k - x_{k+1}) + k_{k-1}(x_{k-1} - x_k)$$

Pour trouver les $x_k(t)$ on résoud les équations différentielles précédentes, pour cela on pose le vecteur colonne $Y(t)$ défini par:

$$\begin{cases} Y_i(t) = x_i(t) & \text{si } i \leq n \\ Y_i(t) = \dot{x}_i(t) & \text{sinon} \end{cases}$$

Résolution du système différentiel

Le système différentiel peut se réécrire sous la forme suivante:

$$\dot{Y}(t) = GY(t)$$

Où

$$G = \begin{bmatrix} \mathbf{0} I_n \\ A \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$A = -\frac{k}{m} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On prend $\frac{k}{m} = 10^6$ (SI) ce qui donne $f_0 = 159,54\text{Hz}$

Résolution avec Python: cas de 3 résonateurs en série

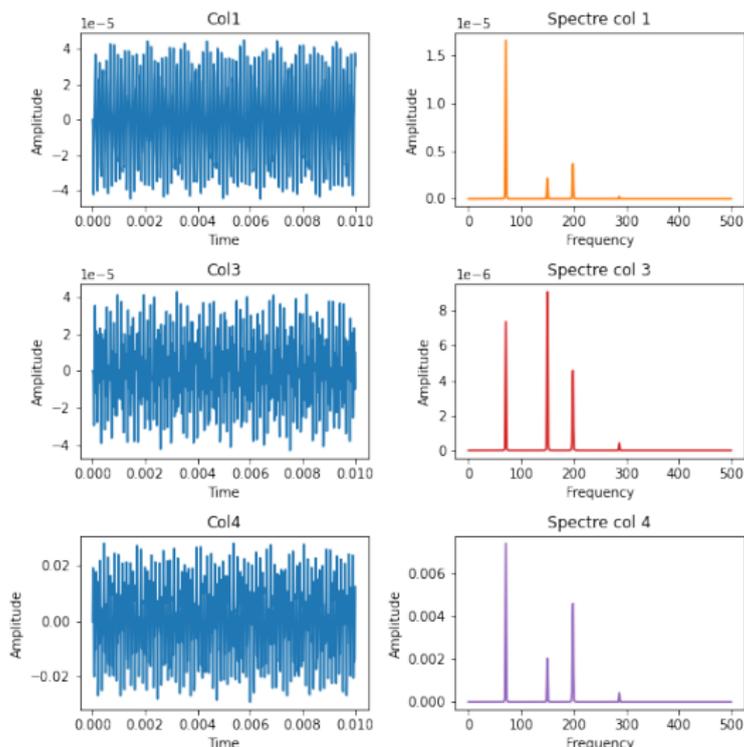
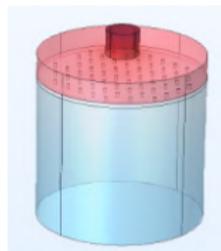


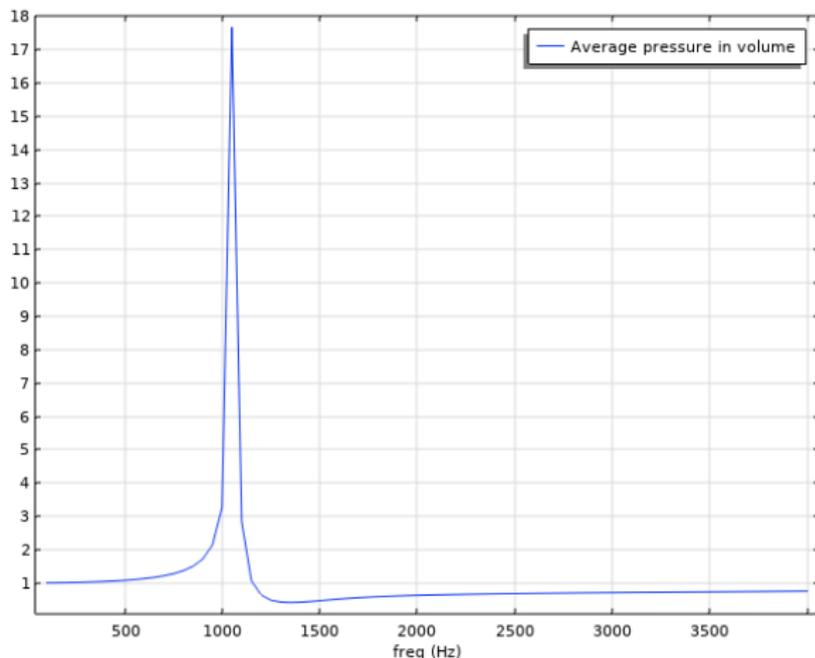
Figure 11: Réponse des résonateurs en série à l'excitation $10 \cdot \sin(2\pi 150)$

- 1 Introduction
- 2 Étude théorique
- 3 Études des cavités en série
- 4 Étude des cavités perforées**
- 5 Expériences et modélisations
- 6 Conclusion et discussion

Résultats pour deux cavités en série



(a)



(b)

Figure 12: (a): Modèle de la cavité; (b): Transmission Loss en fonction de fréquence

Rôle de la porosité

Perforation %	f_0 Hz	Perforation %	f_0 Hz
20	353.12	30	462.12
60	885.43	70	1053.65

On trouve que plus le pourcentage de la surface perforée est grand plus la fréquence propre de résonance est aussi grande.

Néanmoins, pour une cavité simple de fréquence $f_0 = 350\text{Hz}$, le gain **TL** maximal est plus important que dans le cas d'une cavité avec MPP.

Plan

- 1 Introduction
- 2 Étude théorique
- 3 Études des cavités en série
- 4 Étude des cavités perforées
- 5 Expériences et modélisations**
- 6 Conclusion et discussion

Schéma du montage expérimental

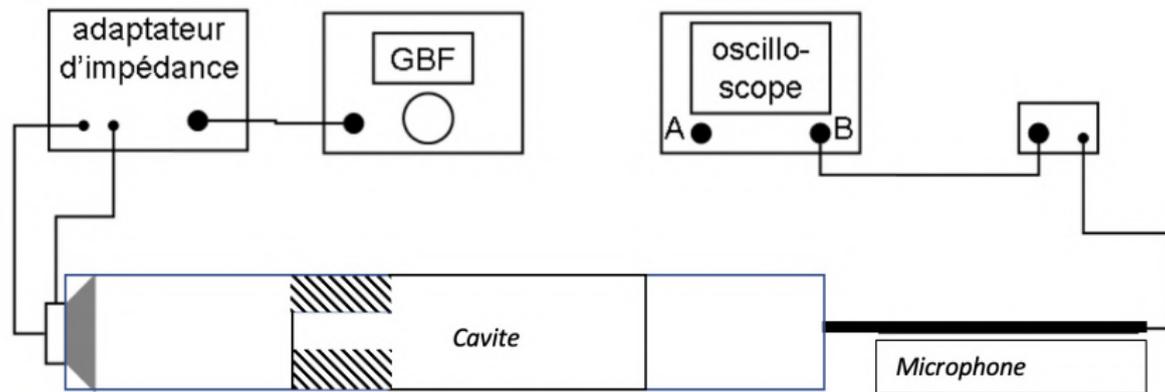


Figure 13: Schéma du montage basique

Matériel et montage expérimental



Figure 14: Montage N°1: Tube à impédance (7cm)

Matériel et montage expérimental



Figure 15: Montage N°2: Tube à impédance (25cm)

Matériel et montage expérimental



(a)



(b)



(c)

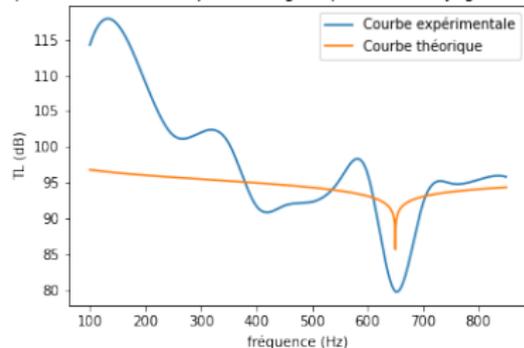
Figure 16: Résonateurs en bois pour l'expérience

Nom	R (mm)	H (mm)	r (mm)	L (mm)
α	50	10	10	30
β	50	10	10	30

Paramétrages des cavités d'expérience

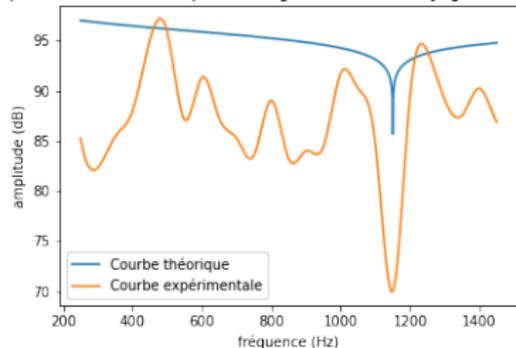
Résultats expérimentaux

réponse de la cavité de paramétrage: alpha à un balayage de fréquence



(a)

réponse de la cavité de paramétrage: beta à un balayage de fréquence



(b)

Figure 17: Variation de l'amplitude sonore expérimentale pour la cavité: (a) α ; (b): β

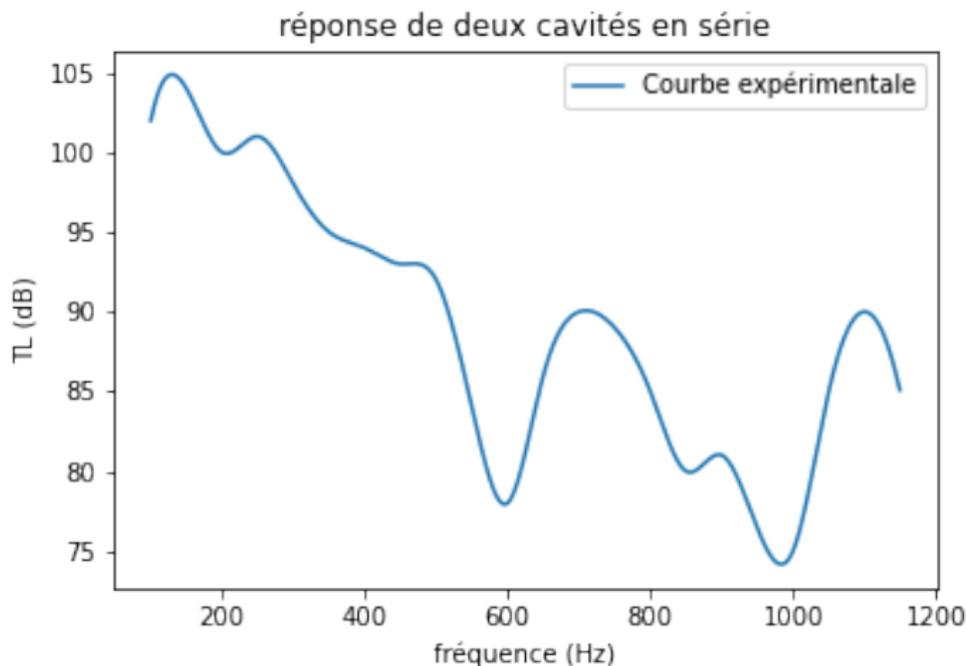


Figure 18: Résultat de deux cavités en série

Modélisation avec COMSOL MULTIPHYSICS

Paramétrage:

Paramètres

Label: Paramètres 1

Paramètres

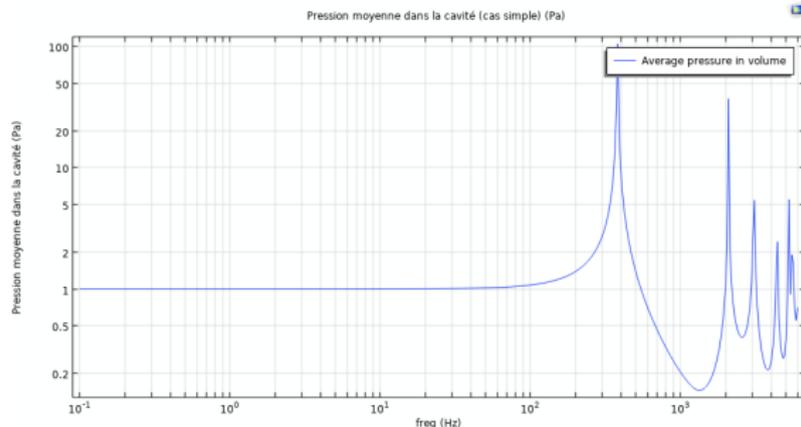
Nom	Expression	Valeur	Description
a	0.02[m]	0.02 m	Rayon du col
L	0.05[m]	0.05 m	Longueur du col
Rv	0.05[m]	0.05 m	Rayon de la cavité
c_air	343[m/s]	343 m/s	Célérité du son
gamma	0.82	0.82	facteur de correction
f_theo	$c_air/(2*\pi)*\sqrt{a^2/((L+gamma*a)^4/3*Rv^3)}$	328.2 1/s	paramètre de résonance
fmax	6000	6000	freq max de balayage
fmin	0.1	0.1	freq min de balayage
rho_air	1.2[kg/m^3]	1.2 kg/m ³	densité de l'air
l1	0.04[m]	0.04 m	
l2	0.08[m]	0.08 m	

Figure 19: Paramètres utilisés pour la modélisation COMSOL

Résultats cavité simple



(a)



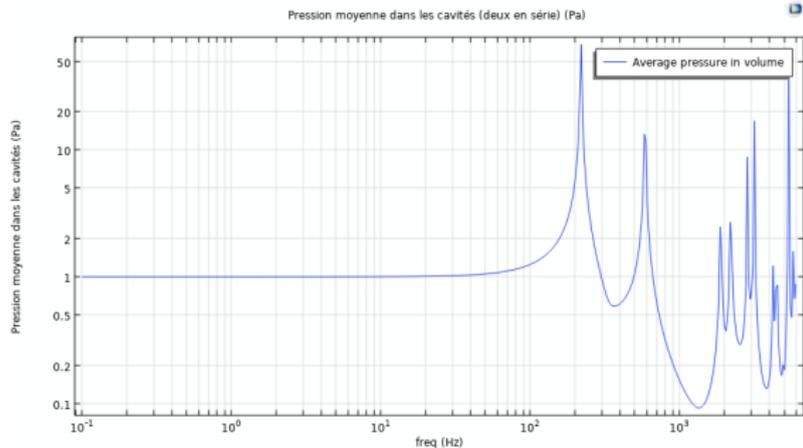
(b)

Figure 20: Résultats COMSOL: (a) modèle de la cavité (b) résultats théorique

Résultats pour deux cavités en série



(a)



(b)

Figure 21: Résultats COMSOL: (a) modèle de la cavité (b) résultats théorique

- 1 Introduction
- 2 Étude théorique
- 3 Études des cavités en série
- 4 Étude des cavités perforées
- 5 Expériences et modélisations
- 6 Conclusion et discussion**

Conclusion

Le trafic routier crée des nuisances sonores de fréquence autour de 600Hz et de niveau sonore 75dB (référence limite d'écoute à 0dB).

Une solution proposée à cette situation est un mur à cavités avec la géométrie suivante:

$S \text{ m}^2$	$L \text{ mm}$	V	$c \text{ m.s}^{-1}$	$\rho \text{ Kg.m}^{-3}$	$f_0 \text{ Hz}$
$3,14 \cdot 10^{-4}$	30	$7,85 \cdot 10^{-5}$	340	1.292	624.83

Si on habite près d'un aéroport et qu'on veut aussi isoler la voix des voisins, on peut associer deux cavités en séries avec le paramétrage ci-dessus: ceci nous donne deux fréquences propres de résonance:

$$f_1 = 1009.53\text{Hz} \text{ et } f_2 = 385.53\text{Hz}$$

Merci de votre attention

Annexe 1- Détermination de la fréquence propre de la cavité

En notation complexe: $\rho = \rho_0 + \rho' \exp^{j\omega t}$.

D'où:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{Q \exp^{j\omega t}}{V} = j\omega \rho' \exp^{j\omega t}$$

La variation de la pression dans le volume V qui s'en suit est:

$$p_i = c^2 \rho' = \frac{c^2 Q}{j\omega V} \quad (1)$$

Où c est la célérité de l'onde sachant que par définition: $c = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S}$

Annexe 1 - Détermination de la fréquence propre de la cavité

La seconde loi de Newton appliquée à la masse d'air dans la cavité donne:

$$\rho_0 S L \frac{\partial u}{\partial t} = S(p_0 - p_i) = j\omega L Q \quad (2)$$

Où u est la vitesse de la masse d'air se trouvant dans ce dernier.
De (1) et (2):

$$p_0 = \left[\frac{c^2}{V j\omega} + \frac{j\omega L}{S} \right] Q = \left[\omega^2 - \frac{c^2 S}{LV} \right] \frac{jLQ}{\omega S} \quad (3)$$

Annexe 2 - Forme générale de la matrice A définie p.27

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{k_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{k_1}{m_2} & -\left(\frac{k_2}{m_2} + \frac{k_1}{m_2}\right) & \frac{k_2}{m_2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_2}{m_3} & -\left(\frac{k_3}{m_3} + \frac{k_2}{m_3}\right) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{k_{n-2}}{m_{n-1}} & -\left(\frac{k_{n-1}}{m_{n-1}} + \frac{k_{n-2}}{m_{n-1}}\right) & \frac{k_{n-1}}{m_{n-1}} \\ 0 & 0 & \dots & \frac{k_{n-1}}{m_n} & -\left(\frac{k_n}{m_n} + \frac{k_{n-1}}{m_n}\right) & -\left(\frac{k_n}{m_n} + \frac{k_{n-1}}{m_n}\right) \end{pmatrix}$$

Résultats pour la cavité α

$f_0 = [100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 550, 600, 650, 700, 750, 800, 850]$

$\Delta\text{dB} = [114.28, 117.12, 109.04, 101.65, 102.04, 100.54, 91.73, 91.78, 92.31, 95.4, 96.3, 79.8, 92.1, 94.9, 95.42, 95.82]$

Résultats pour la cavité β

$f_0 = [250, 300, 350, 400, 450, 500, 550, 600, 650, 700, 750, 800, 850, 900, 950, 1000, 1050, 1100, 1150, 1200, 1250, 1300, 1350, 1400, 1450, 1500]$

$\Delta\text{dB} = [85.27, 82.33, 85.43, 87.99, 95.04, 95.85, 87.12, 91.33, 87.22, 85.26, 83.56, 89.02, 83.22, 84.01, 84.41, 91.75, 90.23, 84.66, 70.01, 89.55, 93.91, 89.07, 87.56, 90.23, 86.86, 91.58]$

Code Python 1

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

c = 340
rho = 1.292
V = 0.00007854
L1,L2,L3,L4=0.01,0.02,0.03,0.05
S = 0.00031416
def f0(S,V,L):
    return np.sqrt(S/(V*L))*c/(2*np.pi)
def TL(w,S,V,L):
    return -np.log(abs(w**2-f0(S,V,L)**2)/(w*1e5))

W = np.linspace(300,3000,10000)

Sol = TL(W,S,V,L1)
plt.plot(W,Sol,label="L = 10mm")

Sol = TL(W,S,V,L2)
plt.plot(W,Sol,label="L = 20mm")

Sol = TL(W,S,V,L3)
plt.plot(W,Sol,label="L = 30mm")

Sol = TL(W,S,V,L4)
plt.plot(W,Sol,label="L = 50mm")

plt.xlabel("fréquence Hz")
plt.ylabel("Transmission Loss TL")
plt.legend()
plt.title("Effet de la variation de la longueur du col")
#plt.savefig('python1.png')
plt.show()
```

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy import interpolate

f1 = [250+50*i for i in range(26)]
amp = [85.27, 82.33, 85.43, 87.99, 95.04, 95.85, 87.12, 91.33,
       87.22, 85.26, 83.56, 89.02, 83.22, 84.01, 84.41, 91.75,
       90.23, 84.66, 70.01, 89.55, 93.91, 89.07, 87.56, 90.23, 86.86, 91.58]

def TL(w,S,V,L):
    f00 = 1150
    return 100+np.log(abs(w**2-f00**2)/(w*1e5))

W = np.linspace(250,1450,10000)

f = interpolate.interpld(f1, amp, kind='cubic')
fnew = np.arange(250, 1450, 0.5)
ampnew = f(fnew)
Sol = TL(W,S,V,L1)
plt.plot(W,Sol,label="Courbe théorique")
plt.plot(fnew,ampnew, label= "Courbe expérimentale")
plt.xlabel("fréquence (Hz)")
plt.ylabel("amplitude (dB)")
plt.legend()
plt.title('réponse de la cavité de paramétrage: beta à un balayage de fréquence')
plt.savefig('exp_beta.png')
plt.show()
```

Figure 23: Code python ayant servi à produire la figure 17(b)

Code Python 3

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import scipy.integrate as sp
from numpy.fft import fft, fftfreq

# Nombre de cavités
n = 3

k,m = 1.35,10.16*1e-6
f0 = np.sqrt(1000000)/(2*np.pi)

# Intervalle de temps 0-T
T = 1]

# Définition de la matrice du système différentiel
A = np.diag(np.array([2.]*n))
F = -1*np.eye(len(A),k=1)
G = -1*np.eye(len(A),k=1)
A += F+G
A[0,0] -= 1
A+= 1000000
G = np.block([[np.zeros((n,n)),-np.eye(n)],[A, -np.zeros((n,n))]])

def pert(t):
    return 20*np.sin(2*np.pi*150*t)

def F(Y,t):
    return G.dot(Y) + np.array([0,0,0,pert(t),0,0])

t = np.linspace(0,T,1000)
Y_sol = sp.odeint(F, [0]*2*n, t)

dt = t[2]-t[1] # durée d'échantillonnage
Fs = 1/ dt # fréquence d'échantillonnage

# the signals
Y_1=Y_sol[:,0]
Y_2=Y_sol[:,1]
Y_3=Y_sol[:,2]
Y_4=Y_sol[:,3]

ref = np.sin(2*np.pi*0.5*t)
t = t/100
fig, axs = plt.subplots(nrows=3, ncols=2, figsize=(8, 8))
```

```
ref = np.sin(2*np.pi*0.5*t)
t = t/100
fig, axs = plt.subplots(nrows=3, ncols=2, figsize=(8, 8))

# plot signal 1:
axs[0, 0].set_title("Col1")
axs[0, 0].plot(t, Y_1, color='C0')
axs[0, 0].set_xlabel("Time")
axs[0, 0].set_ylabel("Amplitude")

axs[0, 1].set_title("Spectre col 1")
axs[0, 1].magnitude_spectrum(Y_1, Fs=Fs, color='C1')
axs[0, 1].set_ylabel("Amplitude")

# plot signal 2:
axs[1, 0].set_title("Col3")
axs[1, 0].plot(t, Y_3, color='C0')
axs[1, 0].set_xlabel("Time")
axs[1, 0].set_ylabel("Amplitude")

axs[1, 1].set_title("Spectre col 3")
axs[1, 1].magnitude_spectrum(Y_3, Fs=Fs, color='C3')
axs[1, 1].set_ylabel("Amplitude")

# plot signal 3:
axs[2, 0].set_title("Col4")
axs[2, 0].plot(t, Y_4, color='C0')
axs[2, 0].set_xlabel("Time")
axs[2, 0].set_ylabel("Amplitude")

axs[2, 1].set_title("Spectre col 4")
axs[2, 1].magnitude_spectrum(Y_4, Fs=Fs, color='C4')
axs[2, 1].set_ylabel("Amplitude")

fig.tight_layout()
#plt.savefig('3_EN_SERIE.png')
plt.show()
```



Marcus P. VITRUVIUS

The Complete Works of Marcus Vitruvius Pollio

ISBN: 978 1 78877 973 9 - Edition: Delphi Classics, 2019.



John W. RAYLEIGH

The theory of the Helmholtz resonator

Journal: Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character.



Hao TANG

Helmholtz resonators

MIT CSAIL <https://people.csail.mit.edu/haotang/notes/helmholtz-resonators.html>.



J. BOSSARD, C. SALMON, C. TARTENSON, D. TURCAN

Résonateur de Helmholtz

INSA ROUEN Projet de Physique P6 STPI/P6/2020-38.

-  **Frédéric BERNARDOT, Janine BRUNEAUX, Jean MATRICON**
Un archétype d'oscillateur : le résonateur acoustique de Helmholtz
Bulletin de l'Union des Physiciens (1055) Vol.96 Juin 2002.
-  **T. MASAHIRO, M. RUI LIN, T. DAIJI**
Relationship between Helmholtz-resonance absorption and panel-type absorption in finite flexible microperforated-panel absorbers
Applied Acoustics 2010, 71(4): 315-320 url
:<http://hdl.handle.net/2433/95081>.
-  **SAKAGAMI, Kimihiro, KOBATAKE, Seiji, KANO, Kenichi, Et Al**
Sound absorption characteristics of a single microperforated panel absorber backed by a porous absorbent layer
Acoustics Australia, 2011, vol. 39, no 3.