Amélioration des performances acoustiques d'un mur combinant des résonateurs de Helmholtz

Souleiman SBAI

Rapport de TIPE

Juin 2023

1 Introduction

L'isolation acoustique pose un défi majeur dans l'architecture urbaine, tant au niveau du choix de la méthode d'isolation qu'au niveau de son application et de son optimisation. L'une des façons d'atténuer la propagation des nuisances sonores au travers des murs est de modifier la géométrie -interne ou externe- des surfaces d'isolation.

Notre attention sera portée dans ce travail aux résonateurs de Helmholtz: des cavités creuses débouchant sur un col étroit dans lequel une masse d'air réalise un mouvement oscillant lorsqu'elle est excitée par la propagation d'une onde sonore. La théorie montre que l'amplitude de ce mouvement est d'autant plus grande lorsque la fréquence du son incident est proche de certaines valeurs bien précises, dépendant dans notre étude uniquement de la géométrie: on dit que la cavité possède des modes propres de résonance.

Pouvoir choisir librement les fréquences de résonance des cavités de Helmholtz et accroître le gain en terme d'atténuation de l'intensité sonore est pourtant crucial pour pouvoir adapter la géométrie des murs selon le besoin. On se heurte néanmoins avec le choix de cavités simples à une limitation importante: ces cavités ne sont performantes qu'en basses fréquences (inférieures à 600Hz) et le mode de résonance s'efforce d'être unique.

Nous prenons l'initiative de mener à priori une étude théorique du phénomène de la résonance de Helmholtz puis de chercher à optimiser les dispositions en série des cavités résonances pour avoir plusieurs fréquences de résonance. On tentera aussi de voir si insérer des plaques perforées à l'intérieur des cavités pourrait améliorer la réponse de l'isolateur à une excitation sonore jugée indésirable.

2 Étude théorique de la résonance de Helmholtz

On considère que la cavité de Helmholtz prend la forme de la figure 1 ci-dessous:



Figure 1: Modèle de la cavité

La masse d'air se trouvant dans le col subit des oscillations lorsqu'une une perturbation sonore, ici modélisée par une force \vec{F} , représentant une succession de surpressions et de dépressions y est appliquée. Pour étudier les oscillations de la masse d'air dans le col, nous proposons de prendre compte des aspects ondulatoire et mécaniques de l'onde acoustique pour décrire la variation de la pression acoustique dans le col de la cavité.

2.1 Détermination de la fréquence propre de la cavité

Notons V le volume du résonateur représenté en figure 1, $p_0(t)$ la variation de la pression à l'extérieur du col et $p_i(t)$ la variation de la pression au niveau du volume V. Trouver la fréquence de résonance du mouvement de la masse d'air revient donc à trouver la fréquence qui minimise $p_0(t)$. Le col résonant devient un ventre et il n'y a quasiment pas de variation de pression dans la région qui est un ventre.

Notons Q la variation de la masse par unité de temps qui modifie la masse volumique ρ à l'intérieur de V. On peut écrire: $Q = V \frac{\partial \rho}{\partial t}$.

Plaçons nous aussi dans le cas d'une onde harmonique, ceci implique que la variation de ρ sera elle aussi harmonique. On peut donc écrire en notation complexe: $\rho = \rho_0 + \rho' \exp^{j\omega t}$. D'où:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{Q \exp^{j\omega t}}{V} = j\omega \rho' \exp^{j\omega t}$$

La variation de la pression dans le volume V qui s'en suit est:

$$p_i = c^2 \rho' = \frac{c^2 Q}{j\omega V} \tag{1}$$

Où c est la célérité de l'onde sachant que par définition: $c = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S}$ La seconde loi de Newton appliquée à la masse d'air dans la cavité donne:

$$\rho_0 SL \frac{\partial u}{\partial t} = S(p_0 - p_i) = j\omega LQ \tag{2}$$

Où L est la longueur du col et u est la vitesse de la masse d'air se trouvant dans ce dernier. De (5) et (6):

$$p_0 = \left[\frac{c^2}{Vj\omega} + \frac{j\omega L}{S}\right]Q = \left[\omega^2 - \frac{c^2 S}{LV}\right]\frac{jLQ}{\omega S}$$
(3)

Il vient alors que p_0 devient minimale lorsque la quantité entre crochets s'annule, ce qui fournit une fréquence propre de résonance de la cavité égale à:

$$f_0 = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{S}{VL}}$$

2.2 Analyse de l'efficacité acoustique d'une cavité résonante

On introduit pour calculer le gain d'un système servant à réduire le niveau de bruit une fonction de gain appellée *Transmission Loss* **TL**, défini par:

$$TL = 10\log_{10}\frac{W_{int}}{W_{ext}} = 10\log_{10}\frac{||p_{int}||}{||p_{ext}||}$$

Où W_{int} est l'énergie de l'onde acoustique à l'intérieur du résonateur et W_{ext} son énergie à l'extérieur. En effet I (l'intensité sonore) vérifie $I = \frac{p^2}{2\rho c}$ et donc $W = IS = \frac{p^2}{2\rho c}S$

On prendra pour simplifier $p_{ext} = 1$ bar

Allure de la courbe $TL(\omega)$

On considère le paramétrage suivant:

$S m^2$	$L \mathrm{mm}$	V	$c \text{ m.s}^-1$	$\rho~{\rm Kg.m^-3}$	f_0 Hz
$3, 14.10^{-4}$	30	$7,85.10^{-5}$	340	1.292	624.83



Figure 2: Allure du Transmission Loss (dB) pour une cavité simple

2.3 Effets de la variation des paramètres géométriques sur la réponse de la cavité à une perturbation harmonique

On considère que tous les paramètres géométriques sont définis par défaut par le tableau suivant:

R (mm)	H (mm)	r (mm)	L (mm)	$c \text{ m.s}^-1$	$\rho~{\rm Kg.m^-3}$	
50	10	10	30	340	1.292	624.83



Figure 3: (a): effet de variation de L; (b): effet de variation de h

2.4 Conclusion de l'étude théorique

Jusqu'à présent notre mur d'isolation comprend des cavités résonantes disposées régulièrement dans tout son volume. Chaque cavité est principalement caractérisée par sa forme géométrique qui détermine la fréquence de résonance de l'onde sonore en son sein.

On a pu élaborer une fonction qui indique que théoriquement, la cavité résonante s'oppose à la propagation des ondes acoustiques dont la fréquence est proche de sa fréquence propre.

Pour approfondir notre étude, on cherche à élargir le domaine de fréquences pouvant être atténuées par un mur résonant. Pour cela, on étudie quelques variantes de cavités de Helmholtz en terme de géométrie et de disposition.

3 Étude de la mise en série de résonateurs de Helmholtz

On essaie dans cette partie de voir jusqu'à quel point la mise en série de résonateurs de Helmholtz pourrait agrandir la bande de fréquences de résonance. On commence pour cela par l'étude du cas simple de deux cavités en série pour passer au cas de n unités.

3.1 Mise en série de deux cavités résonantes



Figure 4: (a): Modèle de deux résonateurs identiques en série; (b): Modèle mécanique équivalent de ces résonateurs

Bilan des forces

Pour la masse m_1 :

- $\vec{F}(t) = -F(t)\vec{i}$: Force excitatrice qui modélise le son
- $-k(x_1 x_2)\vec{i}$: force du ressort R_1

Pour la masse m_2 :

•

- $k(x_1 x_2)\vec{i}$: force du ressort R_1
- $-kx_2\vec{i}$: force du ressort R_2

On applique le principe fondamental de la dynamique aux masses m_1 et m_2 :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x_1} = -F - k(x_1 - x_2) \\ m_2 \ddot{x_2} = k(x_1 - x_2) - kx_2 \end{cases}$$

On passe à la notation complexe et on pose $m_1 = m_2$ et $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ pour trouver:

$$X_{2} = \frac{-\frac{F}{k}}{1 - 3(\frac{\omega}{\omega_{0}})^{2} + (\frac{\omega}{\omega_{0}})^{4}}$$

Le dénominateur de cette équation s'annule en:

$$\begin{cases} \omega_{01} = \omega_0 \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \\ \omega_{02} = \omega_0 \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \end{cases}$$

On trace grâce à Python la courbe $abs(X_2) = f(w)$, on trouve:



Figure 5: Deux fréquences de résonance sont mises en évidence

3.2 Mise en série de *n* cavités résonantes



Figure 6: Modèle mécanique équivalent des cavités en série

Notons que les masses m_i et les constantes de raideur k_i dans ce modèle sont en fonction des géométries des cavités mises en série.

On applique la seconde loi de Newton à chaque masse m_i du système **Pour** m_1

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1(x_1 - x_2)$$

Pour m_k avec $2 \le k \le n$

$$m_k \ddot{x}_k = -k_k (x_k - x_{k+1}) + k_{k-1} (x_{k-1} - x_k)$$

Pour trouver les $x_k(t)$ on résoud les équations différentielles précédentes, pour cela on pose le vecteur colonne Y(t) défini par:

$$\begin{cases} Y_i(t) = x_i(t) \text{ si } i \le n \\ Y_i(t) = \dot{x}_i(t) \text{ sinon} \end{cases}$$

Résolution du système différentiel

Le système différentiel peut se réecrire sous la forme suivante:

$$\dot{Y}(t) = GY(t)$$

Où

$$G = \begin{bmatrix} \mathbf{0} I_n \\ A \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{k_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{k_1}{m_2} & -\left(\frac{k_2}{m_2} + \frac{k_1}{m_2}\right) & \frac{k_2}{m_2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_2}{m_3} & -\left(\frac{k_3}{m_3} + \frac{k_2}{m_3}\right) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{k_{n-2}}{m_{n-1}} & -\left(\frac{k_{n-1}}{m_{n-1}} + \frac{k_{n-2}}{m_{n-1}}\right) & \frac{k_{n-1}}{m_{n-1}} \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{k_{n-2}}{m_n} & -\left(\frac{k_{n-1}}{m_n} + \frac{k_{n-1}}{m_n}\right) \end{pmatrix}$$

Pour faciliter l'étude théorique, on se restreint au cas où:

$$\begin{cases} k_i = k \ \forall 1 \le i \le n \\ m_i = m \ \forall 1 \le i \le n \end{cases}$$

`

A devient:

$$A = -\frac{k}{m} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On prend $\frac{k}{m}=10^6~({\rm SI})$ ce qui donne $f_0=159,54{\rm Hz}$

Résolution avec Python: cas de 3 résonateurs en série



Figure 7: Réponse des résonateurs en série à l'excitation $10.sin(2\pi 150)$

3.3 Déductions de l'étude de la mise en série de cavités résonantes

Pour une disposition de n résonateurs en série, les masses d'air dans chaque col ont n fréquences propres communes. Ce résultat est retrouvé par constat à partir des essais réalisés sur Python.

Remarque

On pourrait remarquer sur la figure 11 un quatrième pic d'amplitude négligeable devant celles des trois pics ayant précédé. Cette remarque se produit toujours pour n résonateurs dans la simulation, même pour le cas de n = 2traité dans la partie précédente. On pourrait expliquer cela par le fait que les fonctions fft et fftfreq du module numpy.fft donnent ce quatrième pic en vue d'erreurs relatives à l'échantillonnage du signal source (signal de bruit généré pour l'addition de plusieurs harmoniques).

4 Étude de l'ajout d'une plaque perforée à l'intérieur de la cavité

L'article [6] présente une approche simple du calcul de la fréquence propre d'une cavité avec une plaque perforée à l'intérieur en considérant une disposition de ressorts en parallèle.

Notre étude portera plutôt sur la simulation de la réponse des cavités à MPP -Micro Perforated Plates- pour voir jusqu'à quel point le pourcentage de la surface perforée est-il important.

4.1 Modèle COMSOL



Figure 8: (a): Modèle de la cavité; (b): Transmission Loss en fonction de fréquence

Le schéma à gauche donne idée sur la forme de la cavité perforée simulée et celui à droite donne la réponse de celle-ci à un balayage de fréquence.

4.2 Rôle du pourcentage de la surface perforée

: En gardant les même paramètres géométriques que ceux définis en page 6 on trouve:

Perforation %	f_0 Hz	Perforation $\%$	f_0 Hz
20	353.12	30	462.12
60	885.43	70	1053.65

Conclusion Plus le pourcentage de la surface perforée est grand plus la fréquence propre de résonance est aussi grande.

Néanmoins, pour une cavité simple de fréquence $f_0 = 350$ Hz, le gain **TL** maximal est plus important que dans le cas d'une cavité avec MPP.

5 Expérimentation et modélisations informatiques

5.1 matériel et montage expérimental

Matériel utilisé:

- Sonomètre
- Haut-parleur précis: on devra être capable de modifier la fréquence sonore qu'il émet
- Un tube d'essai Voir plus bas.
 Note: Ce tube doit être un bon isolant acoustique pour garantir l'obtention de résultats fiables
- Cavités en bois: le tableau ci dessous regroupe les dimensions de ces cavités



Figure 9: (a): Disques à cavités de 25cm de diamètre; (b): deux cavités simples mises en série

Protocole expérimental

On réalise une cavité en plastique qu'on place dans un tube à impédance *(Tube de Kundt)*. Ce dernier empêche les ondes parasitaires d'influencer sur les résultats de l'acquisition.

On émet grâce à un haut-parleur , placé à l'intérieur du tube de Kundt, une perturbation sonore d'incidence normale sur la cavité. De l'autre côté de la cavité dans le tube de Kundt sera placé un microphone, ce dernier sera relié à un appareil d'acquisition. Le but de cette manipulation en fin de compte est de mesurer l'intensité sonore d'une onde de fréquence donnée après qu'elle soit propagée à travers la cavité.

Il est précisé que la réalisation de ce montage expérimental est elle-même délicate puisque les ondes stationnaires se formant à l'intérieur du tube créent pour chaque fréquence des ventres et des noeuds statiques qui ont une influence sur la mesure du niveau snore en amont et en aval du résonateur. Pour la conception de ce tube à impédance on s'est basé sur le doc 8. Le montage ressemble ainsi à celui dessiné dans la figure ci-dessous:



Figure 10: Schéma du montage basique

5.2 Résultats de l'expérience

Dimensions géométriques des cavités utilisées

Nom	R (mm)	H (mm)	r (mm)	L (mm)
α	50	10	10	30
β	50	10	10	30

Résultats pour la cavité α

 $f_0 = [100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 550, 600, 650, 700, 750, 800, 850]$

 $\Delta dB = [114.28, 117.12, 109.04, 101.65, 102.04, 100.54, 91.73, 91.78, 92.31, 95.4, 96.3, 79.8, 92.1, 94.9, 95.42, 95.82]$

Résultats pour la cavité β

1050, 1100, 1150, 1200, 1250, 1300, 1350, 1400, 1450, 1500

 $\Delta dB = [85.27, 82.33, 85.43, 87.99, 95.04, 95.85, 87.12, 91.33, 87.22, 85.26, 83.56, 89.02, 83.22, 84.01, 84.41, 91.75, 91.83, 87.92, 85.26, 83.56, 89.02, 83.22, 84.01, 84.41, 91.75, 91.83, 85.26, 83.56, 89.02, 83.22, 84.01, 84.41, 91.75, 91.83, 91.84,$

90.23, 84.66, 70.01, 89.55, 93.91, 89.07, 87.56, 90.23, 86.86, 91.58



Figure 11: Variation de l'amplitude sonore expérimentale pour la cavité: (a) α ; (b): β

Remarque

L'écart entre les courbes théoriques et expérimentales peut s'expliquer par les raisons suivantes:

- Utilisation d'un tube à impédance avec les moyens du bord (tube en PVC, terminaison anéchoïque avec une éponge, microphones non polarisables/calibrables manuellement)
- Non utilisation de logiciels dédiés à l'analyse acoustique tel que Pulse LabShop (coût élevé)

C'est pour cela qu'on a choisi de réaliser des simulations avec le logiciel COMSOL MULTYPHYSICS pour mieux comprendre le comportement des cavités résonantes selon leurs géométries.

5.3 Simulation avec COMSOL MULTYPHYSICS

Paramétrage

Paramètre	S		
Nom	Expression	Valeur	Description
а	0.02[m]	0.02 m	Rayon du col
L	0.05[m]	0.05 m	Longueur du col
Rv	0.05[m]	0.05 m	Rayon de la cavité
c_air	343[m/s]	343 m/s	Célérité du son
gamma	0.82	0.82	facteur de correction
f_theo	c_air/(2*pi)*sqrt(a^2/((L+gamma*a)*4/3*Rv^3))	328.2 1/s	paramètre de resonance
fmax	6000	6000	freq max de balayage
fmin	0.1	0.1	freq min de balayage
rho_air	1.2[kg/m^3]	1.2 kg/m ³	densité de l'air
11	0.04[m]	0.04 m	
12	0.08[m]	0.08 m	

Figure 12: Paramètres utilisés pour la modélisation COMSOL

Réponse d'une cavité simple



Figure 13: Courbe générée numériquement - cavité simple

Réponse de deux cavités en série

On considère que leur paramétrage est identique à la précédente



Figure 14: Courbe générée numériquement - deux cavités en série

Remarque

En modélisant pour n cavités en série la pression moyenne dans les cavité grâce à COMSOL, on affirme que le nombre de pics de résonance est le nombre de cavités mises en jeu.

Ce résultat permet ainsi de concevoir des combinaisons de résonateurs en série pour avoir le contrôle sur le choix des fréquences de résonance selon le besoin.

6 Conclusion

Prenons le cas du trafic routier qui crée des nuisances sonores de fréquence autour de 600Hz et de niveau sonore 75dB (référence limite d'écoute à 0dB).

Une solution proposée à cette situation est un mur à cavités avec la géométrie suivante:

$S \text{ m}^2$	$L \mathrm{mm}$	V	$c \text{ m.s}^-1$	$ ho~{\rm Kg.m^-3}$	f_0 Hz
$3, 14.10^{-4}$	30	$7,85.10^{-5}$	340	1.292	624.83

Si on veut en plus que le mur isole aussi d'autres fréquences, on n'a qu'à considérer une mise en série de résonateurs, et si la fréquence ciblée dépasse le 1Khz, on peut envisager l'ajout de cavité perforées à l'intérieur.

Annexes et références bibliographiques

Annexes

Codes Python

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3 import scipy.integrate as sp
4 from numpy.fft import fft, fftfreq
6 # Nombre de cavites
7 n = 3
8
9 k,m = 1.35,18.16*1e-6
10 f0= np.sqrt(1000000)/(2*np.pi)
12 # Intervalle de temps 0-T
13 T = 1
14
15 # Definition de la matrice du systeme differentiel
16 A = np.diag(np.array([2.]*n))
17 F = -1*np.eye(len(A), k=1)
18 G = -1*np.eye(len(A), k=-1)
19 A += F+G
20 A[0,0] -= 1
21 A*= 1000000
22 G = np.block([[np.zeros((n,n)),-np.eye(n)],[A, -np.zeros((n,n))]])
23
24 def pert(t):
     return 20*np.sin(2*np.pi*150*t)
25
26
27 def F(Y,t):
      return G.dot(Y) + np.array([0,0,0,pert(t),0,0])
28
29
30
31 t = np.linspace(0,T,1000)
32 Y_sol = sp.odeint(F, [0]*2*n, t)
33
34 dt = t[2]-t[1] # duree d'echantillonage
35 Fs = 1/ dt # frequence d'echantillonage
36
37 # the signals
38 Y_1=Y_sol[:,0]
39 Y_2=Y_sol[:,1]
```

```
40 Y_3=Y_sol[:,2]
41 Y_4=Y_sol[:,3]
42
43 ref = np.sin(2*np.pi*0.5*t)
44 t = t/100
45 fig, axs = plt.subplots(nrows=3, ncols=2, figsize=(8, 8))
46
47 # plot signal 1:
48 axs[0, 0].set_title("Col1")
49 axs[0, 0].plot(t, Y_1, color='C0')
50 axs[0, 0].set_xlabel("Time")
51 axs[0, 0].set_ylabel("Amplitude")
52
53 axs[0, 1].set_title("Spectre col 1")
54 axs[0, 1].magnitude_spectrum(Y_1, Fs=Fs, color='C1')
55 axs[0, 1].set_ylabel("Amplitude")
56
57 # plot signal 2:
58 axs[1, 0].set_title("Col3")
59 axs[1, 0].plot(t, Y_3, color='C0')
60 axs[1, 0].set_xlabel("Time")
61 axs[1, 0].set_ylabel("Amplitude")
62
63 axs[1, 1].set_title("Spectre col 3")
64 axs[1, 1].magnitude_spectrum(Y_3, Fs=Fs, color='C3')
65 axs[1, 1].set_ylabel("Amplitude")
66
67 # plot signal 3:
68 axs[2, 0].set_title("Col4")
69 axs[2, 0].plot(t, Y_4, color='C0')
70 axs[2, 0].set_xlabel("Time")
71 axs[2, 0].set_ylabel("Amplitude")
72
73 axs[2, 1].set_title("Spectre col 4")
74 axs[2, 1].magnitude_spectrum(Y_4, Fs=Fs, color='C4')
75 axs[2, 1].set_ylabel("Amplitude")
76
77 fig.tight_layout()
78 #plt.savefig('3_EN_SERIE.png')
79 plt.show()
```



Bibliographie

- 1. Haÿne LECOCQ CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DU COMPORTEMENT ACOUSTIQUE DE MATÉRIAUX PRÉSENTANT DES CAVITÉS DÉBOUCHANTES – Thèse de doctorat N°2006 ENSAM ParisTech
- 2. John W. RAYLEIGH The theory of sounds Edition Cambridge ISBN 9781139058087
- 3. Hao TANG Helmholtz resonators MIT CSAIL https://people.csail.mit.edu/haotang/notes/helmholtz-resonators.html
- 4. J. BOSSARD, C. SALMON, C. TARTENSON, D. TURCAN Résonateur de Helmholtz INSA ROUEN Projet de Physique P6 STPI/P6/2020-38

- 5. Toyoda, Masahiro ... [et al]. Relationship between Helmholtz-resonance absorption and panel-type absorption in finite flexible microperforated-panel absorbers. Applied Acoustics 2010, 71(4): 315-320
- 6. S. S. Patil, M. Chavan, R. Borude, T. Borate, N. Giram INVESTIGATION OF DIVIDED HELMHOLTZ RESONATOR BY PERFORATED PLATE – International Journal of Advance Research in Science and Engineering Volume No: 07 April 2018
- C.H. Lee, M. Jae Han, and T. Won Park A Comparative Study on the Transmission Loss of Helmholtz Resonator and Quarter, Half, Conical Half-Wave Resonator Using Acoustic Analysis Model - International Journal of Mechanical Engineering and Robotics Research Vol. 9, No. 1, January 2020
- Mr. Satyajeet P Deshpande, Kolano and Saha Engineers, Inc. Dr. Mohan D. Rao, Tennessee Technological University - DEVELOPMENT OF A LOW COST IMPEDANCE TUBE TO MEASURE ACOUSTIC AB-SORPTION AND TRANSMISSION LOSS OF MATERI- ALS - Paper ID 8776 - ASEE Annual Conference & Exposition June 2014