

Filières MP/MPI - ENS de Paris-Saclay, Lyon, Rennes et Paris - Session 2025
Page de garde du rapport de TIPE

Attention: Le rapport doit être réalisé par l'étudiant(e).
 Si le rapport résulte d'une collaboration, elle doit être clairement annoncée.

NOM : AMRANI	Prénoms : TAMA
Classe : NPI*	
Lycée : Lycée Hoche	Numéro de candidat : 35198
Ville : VERSAILLES	

Concours auxquels vous êtes admissible (les indiquer par une croix) :

Banque MP		Banque MPI		
ENS Paris-Saclay	MP - Option MP			
	MP - Option MI			
ENS de Lyon	Math - Option M-MP			
	Math - Option M-MI			
	Informatique			
ENS Rennes	MP - Option MP			
	MP - Option MI			
ENS Paris	MP - Option P			
	MP - Option I			
		ENS Paris-Saclay	Option Math	
			Option Info	☒
		ENS de Lyon	Math MPI	
			Info MPI	☒
		ENS Rennes	Info MPI	☒
		ENS Paris	Option Math	
			Option Info	

Matière dominante du TIPE (la sélectionner d'une croix inscrite dans la case correspondante) :

Informatique		Mathématiques		Physique	☒
--------------	--	---------------	--	----------	-------------------------------------

Titre du TIPE :

Créer un moment cinétique avec du son grâce aux résonateurs de Helmholtz

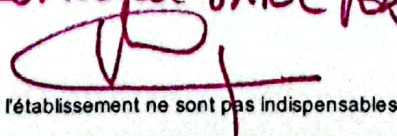
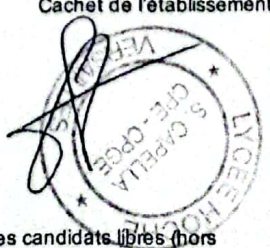
Nombre de pages (à indiquer dans les cases ci-dessous) :

Texte	5	Illustration	5	Bibliographie	1
-------	----------	--------------	----------	---------------	----------

Attention, les illustrations doivent figurer dans le corps du texte et non en fin du document !

Résumé ou descriptif succinct du TIPE (6 lignes, maximum) :

L'étude consiste à
 - établir les propriétés théoriques des résonateurs de Helmholtz
 - vérifier celles-ci et les exploiter par l'adaptation personnelle d'une expérience visant à alimenter un moulin avec des supersoniques.

A Versailles Le 4 juin 2025 Signature du (de la) candidat(e) 	Signature du professeur responsable de la classe préparatoire dans la discipline Renaud KRZYWY 	Cachet de l'établissement 
---	--	--

La signature du professeur responsable et le tampon de l'établissement ne sont pas indispensables pour les candidats libres (hors CPGE).

Créer un moment cinétique avec du son grâce aux résonateurs de Helmholtz

Rapport de TIPE

AMRANI Taha - 35198

2024-2025

Table des matières

1	Introduction	1
2	Étude théorique des résonateurs de Helmholtz	2
2.1	Hypothèses du modèle	2
2.2	Mouvement de la masse d'air dans le col	2
2.2.1	Conséquences en analyse fréquentielle	3
2.2.2	Conséquences sur le mouvement du résonateur tout entier	3
2.3	"Moulin acoustique"	4
2.4	Bilan des forces	5
2.5	Obtention d'une équation mécanique	5
3	Mise en oeuvre expérimentale	5
3.1	Mesure de pulsation propre	6
3.2	Adaptation de l'expérience avec les moyens du bord	6
3.2.1	Pertinence du module CSRT	7
3.2.2	Utilisation d'un tableur	7
3.2.3	Difficultés rencontrées	8
3.3	Exploitation des résultats	8
3.4	Cas $\Delta < 0$	8
3.5	Cas $\Delta > 0$	9
3.6	Conclusion	10
4	Bibliographie	10

1 Introduction

Notre démarche part du constat suivant : lorsque l'on souffle sur l'embouchure d'une bouteille, celle-ci laisse entendre un son. En outre, la production sonore s'accompagne de fortes vibrations de la bouteille (cf référence [5]).

Dans le contexte actuel, où la pollution sonore dans nos villes ne cesse de s'aggraver, nous avons trouvé pertinent d'essayer d'exploiter ce phénomène pour produire de l'énergie exploitable à l'échelle macroscopique.

Pour mener à bien notre étude, nous nous sommes intéressés aux résonateurs de Helmholtz. Il s'agit de cavités munies d'un goulot ; la masse d'air dans le goulot effectue un mouvement oscillant lorsqu'excitée par la propagation d'une onde sonore. On constate en outre que plus la fréquence de l'onde sonore est proche d'une certaine fréquence propre aux résonateur considéré, plus l'amplitude des oscillations est importante. De surcroît, ladite fréquence propre ne dépend, dans l'air, que des dimensions du résonateur.

Notre étude consistera donc à :

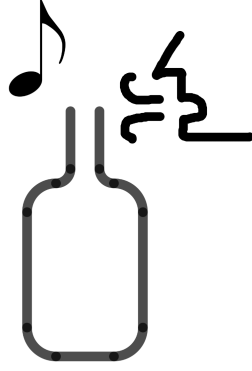


FIGURE 1 – Souffler sur une bouteille laisse entendre un son

- Établir les propriétés théoriques des résonateurs de Helmholtz
- Vérifier celles-ci et les exploiter par l'adaptation personnelle d'une expérience du physicien Vinko Dvorak

2 Étude théorique des résonateurs de Helmholtz

2.1 Hypothèses du modèle

Nous modélisons les résonateurs de Helmholtz (références [3] et [7]) comme une cavité de volume V , surplombée d'un col de longueur L et de section S

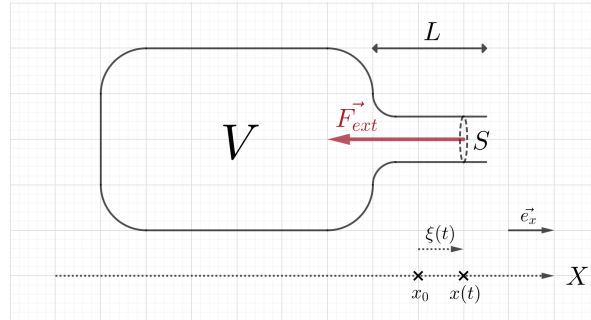


FIGURE 2 – On considère une surface virtuelle S dans le col, dont on note x_0 la position d'équilibre, $x(t)$ la position à l'instant t , et $\xi(t) \triangleq x(t) - x_0$. S subit l'action d'une force extérieure $\vec{F}_{ext}$

On suppose en outre que (références [3] et [7]) :

1. $L \ll \lambda$, où λ est la longueur de l'onde sonore qui agit sur le résonateur considéré
2. L'air est assimilé à un **gaz parfait**
3. Les transformations thermodynamiques sont supposées être assez rapides pour que les parois soient supposée **calorifugées**
4. Les frottements de l'air sur les parois sont ignorées

2.2 Mouvement de la masse d'air dans le col

Sous l'effet d'une perturbation extérieure, il apparaît un petit déplacement de la colonne d'air à l'intérieur du col. Le volume correspondant d'air déplacé dans la bouteille est donc :

$$dv = S\xi$$

Les hypothèses 2 (l'air est un gaz parfait) et 3 (transformation isentropique) garantissent alors par loi de Laplace que

$$dp = -\frac{\gamma p}{V} dv$$

avec γ le coefficient adiabatique de l'air, et p la pression atmosphérique. Cette variation de pression engendre une force de rappel sur la colonne d'air, donnée par :

$$dF = -\frac{\gamma p S^2}{V} \xi$$

Une application de la deuxième loi de Newton donne alors :

$$\rho S L \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \frac{\gamma p S^2}{V} \xi = F_{ext}$$

avec ρ la masse volumique de l'air, et F_{ext} la composante selon $\vec{e}_x$ de la force $\vec{F}_{ext}$, ce que l'on peut réécrire :

$$\boxed{\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \omega_0^2 \xi = \frac{F_{ext}}{\rho S L} \quad \text{où } \omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma p S}{\rho V L}}}$$

2.2.1 Conséquences en analyse fréquentielle

Étudions le cas où F_{ext} est de la forme $F_{ext}(t) = A \cos(\omega t + \phi)$: c'est notamment le cas lors de la propagation d'une onde sonore monochromatique.

On constate alors que le résonateur de Helmholtz agit comme un filtre passe-bande, d'entrée $F_{ext}(t)$ et de sortie $\xi(t)$, et de pulsation propre ω_0 .

En effet, dans le domaine complexe, l'équation du mouvement devient :

$$\underline{\xi} = \frac{F_{ext}}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

En notant $H(\omega) := \frac{\underline{\xi}}{\underline{F}}$ la fonction de transfert associée, on obtient le gain :

$$G(\omega) := |H(\omega)| = \frac{1}{|\omega_0^2 - \omega^2|}$$

Et donc le gain décibel :

$$\boxed{G_{dB}(\omega) = -20 \cdot \log(|\omega_0^2 - \omega^2|)}$$

Ce constat sera pertinent pour une éventuelle mesure de ω_0 .

2.2.2 Conséquences sur le mouvement du résonateur tout entier

On constate que les mouvements d'éjection et d'aspiration de l'air alentours sont asymétriques (cf référence [1]). En effet, l'air rejeté l'est selon l'axe dirigé par $\vec{e}_x$ tandis que l'air aspiré l'est selon toutes les directions.

Cela entraîne, par conservation de la quantité de mouvement du système {cavité + air dans le col}, le déplacement de la cavité dans la sens opposé à celui de l'éjection, à la manière d'une fusée.

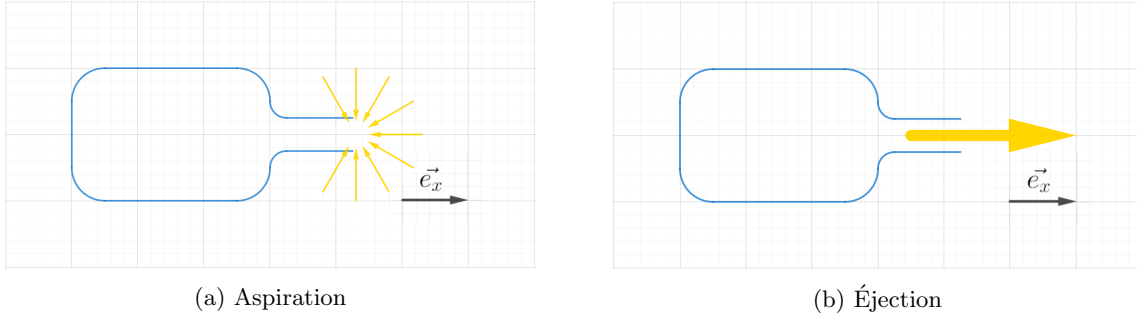


FIGURE 3 – Illustration du processus

En conclusion, on peut modéliser l'action d'une onde sonore sur le résonateur comme une force $\vec{F}_{son}$ dirigée selon $-\vec{e}_x$, dans l'axe de son col.

Ce constat permet de justifier les résultats de l'expérience centrale de ce TIPE, introduite dans la section qui suit.

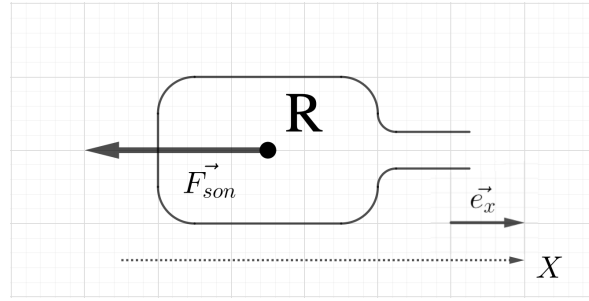


FIGURE 4 – Modélisation

2.3 ”Moulin acoustique”

Il reste désormais à obtenir un ordre de grandeur sur la norme F_{son} de ladite force.

Pour effectuer cela, nous nous inspirons d’une expérience développée indépendamment par les physiciens Vinko Dvorak et Alfred Mayer en 1878 (cf référence [4]). Celle-ci est d’autant plus pertinente qu’elle permet également d’exploiter ladite force, à la manière d’un moulin.

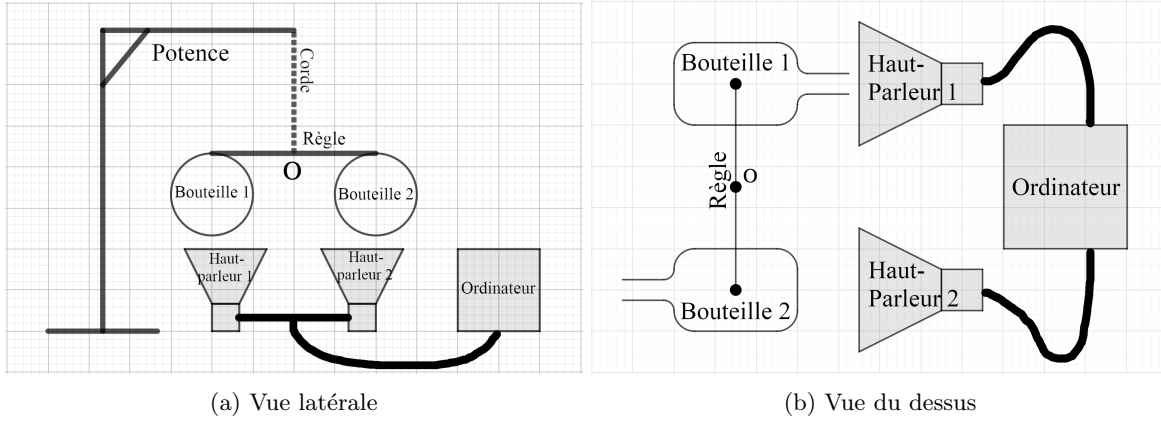


FIGURE 5 – Schéma du montage expérimental à mettre en oeuvre. Dans la suite, on note ω_0 la pulsation propre des deux bouteilles (de même dimensions)

L’expérience consiste à faire propager une onde sonore monochromatique de pulsation ω_0 sur les bouteilles grâce au haut-parleurs. Alors, celles-ci doivent, comme prévu en partie 2.2.2, faire tourner le dispositif comme ci-dessous.

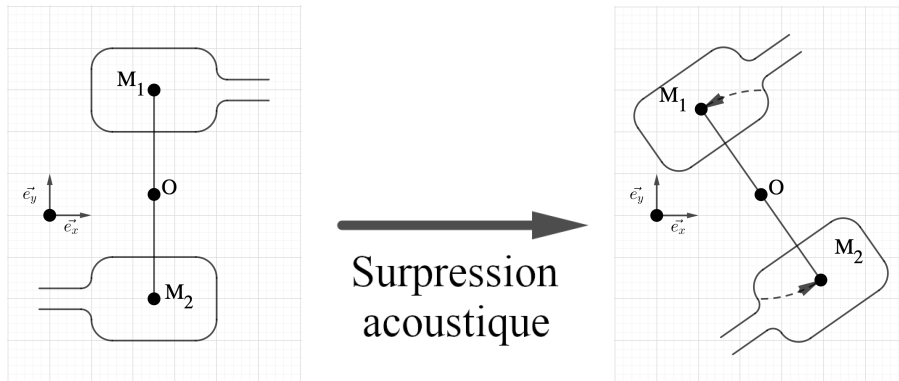


FIGURE 6 – Description de l’expérience de Dvorak

2.4 Bilan des forces

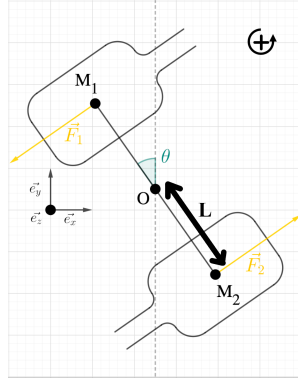


FIGURE 7 – Modélisation de l'expérience

En effet, on peut effectuer le bilan des forces s'exerçant sur le système Bouteilles + Règle :

- Les forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ modélisent l'action des surpressions sonores sur les bouteilles 1 et 2 respectivement
 - On note M_F leur moment selon $\vec{e}_z$ en O.
- Un couple $-h\theta\vec{e}_z$ modélise les forces de frottements $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$
- Un couple $-C\theta\vec{e}_z$ modélise la torsion de la corde

2.5 Obtention d'une équation mécanique

On note J le moment d'inertie du système {Bouteilles + Règle} par rapport à l'axe de la corde passant par O .

Le théorème du moment cinétique scalaire selon ce même axe donne alors :

$$\ddot{\theta} + \frac{\omega_1}{Q}\dot{\theta} + \omega_1^2\theta = \omega_1^2\theta_\infty$$

où $\theta_\infty = \frac{M_F}{C}$, $\omega_1 = \sqrt{\frac{C}{J}}$, $Q = \frac{\sqrt{JC}}{h}$.

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique amorti : le comportement du système dépend du signe du discriminant $\Delta = \frac{h^2}{J^2} - 4\frac{C}{J}$.

3 Mise en oeuvre expérimentale



FIGURE 8 – Photo du montage expérimental final

3.1 Mesure de pulsation propre

Tout d'abord, il a fallu mesurer la pulsation propre des bouteilles utilisées.

Pour ce faire, on ne peut nous reposer sur l'application de la formule établie en partie 2.2 ($\omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma p S}{\rho V L}}$). En effet, pour une bouteille, difficile de dire où exactement commence le col et où se finit la cavité.

On choisit donc d'utiliser la propriété mise en évidence en partie 2.2.1, au travers du protocole suivant :

1. Souffler sur le goulot de bouteille étudiée (bruit blanc $\rightarrow$ perturbations mécaniques de pulsations variées)
2. Mesurer la fréquence associée au maximum du spectre sonore du son résultant, par ordinateur

Nous utilisons le logiciel Audacity pour étudier la réponse en fréquence de la bouteille, représentée sous la forme d'un diagramme de Bode :

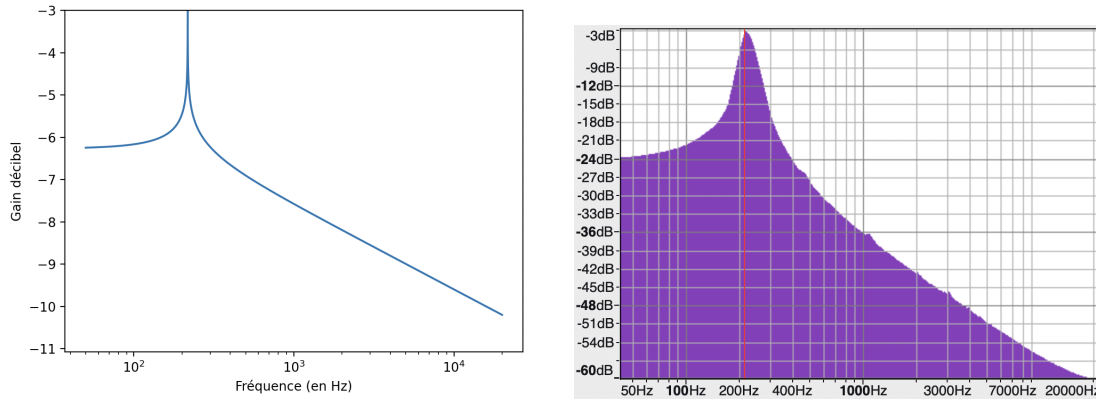


FIGURE 9 – Comparaison entre l'allure théorique et pratique du diagramme de Bode. On mesure dans le cas des bouteilles étudiées une fréquence propre de $f_0 = 217 \pm 1$ Hz (incertitudes dues à la fiabilité d'Audacity et du micro de l'ordinateur)

Les résultats expérimentaux correspondent bien à ce qui est attendu dans la partie 2.2.1 (gain décibel proportionnel à $G_{dB}(\omega) = -20 \cdot \log(|\omega_0^2 - \omega^2|)$).

3.2 Adaptation de l'expérience avec les moyens du bord

Nous pouvons désormais adapter l'expérience de Dvorak pour réaliser nos objectifs. Nous choisissons de stabiliser celui-ci à l'aide d'une corde, qui n'était pas présente dans l'expérience initiale.

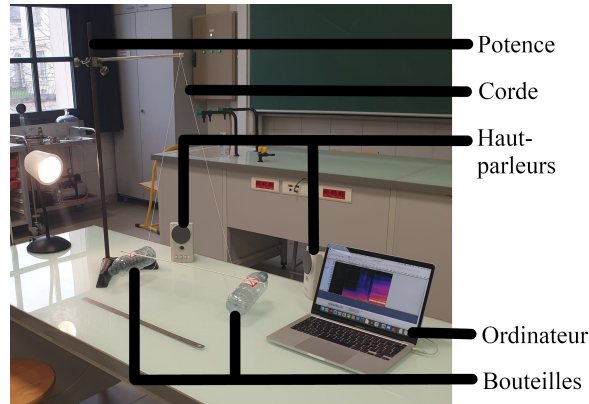


FIGURE 10 – Photo légendée du montage expérimental final

Le protocole est le suivant :

1. Lancer une capture en vue du dessus du montage
2. Produire une onde sonore monochromatique intense à la fréquence propre f_0 des bouteilles
3. Utiliser le pointeur CSRT du module opencv de Python pour effectuer le pointage
4. Calculer numériquement l'angle de la règle par rapport à son orientation de départ, en fonction du temps

3.2.1 Pertinence du module CSRT

Il est difficile d'effectuer soi-même le processus de pointage sur des dizaines de milliers d'image sur une longue vidéo. On utilise donc plutôt des moyens automatisés pour le faire.

Le module CSRT nous a paru être idéal pour cette expérience. En effet, celui-ci calcule dynamiquement les éléments qui caractérisent l'objet à suivre. Ainsi, celui-ci n'est pas perdu lorsqu'il passe derrière la potence, par exemple, ce qui n'est pas le cas avec les autres suiveurs envisagés (MOSSE, KCF).

Notre implémentation du module consiste à

1. Laisser l'utilisateur choisir une échelle adéquate (je choisis les 20 cm de ma règle comme référence)
2. Laisser l'utilisateur choisir l'objet à suivre (je sélectionne le bouchon de la bouteille, où une quelconque marque caractéristique sur cette dernière)
3. Mesurer la position de l'objet à chaque instant par rapport au centre de l'image (l'origine choisie)
4. L'enregistrer au format csv

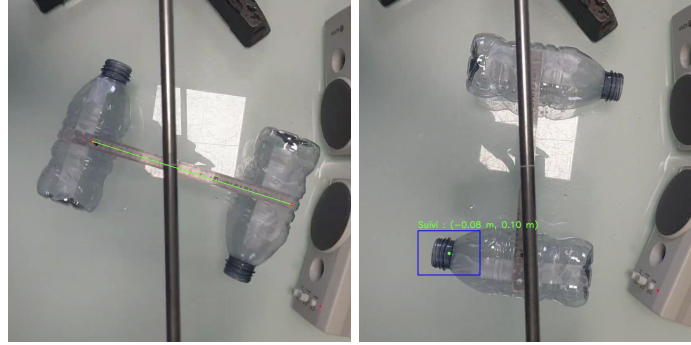


FIGURE 11 – Fonctionnement du module (étapes 1 et 3)

3.2.2 Utilisation d'un tableur

On utilise ensuite un logiciel tableur pour le calcul de l'angle (par un simple calcul d'argument par arctangente) et le tracé des courbes.

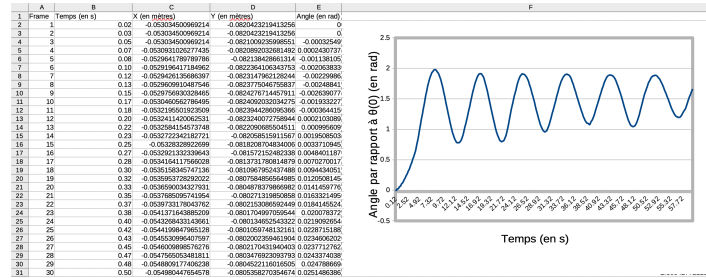


FIGURE 12 – Exploitation numérique des données

3.2.3 Difficultés rencontrées

- Il a été difficile de choisir le bon algorithme de pointage. En effet, les qualités uniques de CSRT n'ont été identifiées qu'après de nombreux essais.
- Il a fallu utiliser des haut-parleurs très puissants. En effet, ceux de mon ordinateur ne suffisaient pas, ce qui m'a longtemps fait douter de la faisabilité de l'expérience.
- Il a fallu faire attention aux effets de saturation des haut-parleurs. En effet, en quête de plus de puissance, j'ai mis le volume des haut-parleurs à son niveau maximal. Or, dans ces conditions, leur fidélité fréquentielle était perturbée par des phénomènes de saturation : il a finalement été plus efficace de les mettre à 70% de volume.
- Maintenir le dispositif en équilibre était crucial. En effet, plus la corde était longue (chose qui est nécessaire, comme nous le verrons, pour obtenir un discriminant $\Delta > 0$), plus le dispositif était instable. Ceci l'amenait à osciller de manière chaotique. Or, notre expérience, qui repose sur des forces de norme faible, ne peut être réalisée dans ces conditions.

3.3 Exploitation des résultats

Rappelons d'abord que l'angle $\theta(t)$ de la règle par rapport à son orientation initiale répond à une équation de la forme

$$\ddot{\theta} + \frac{\omega_1}{Q} \dot{\theta} + \omega_1^2 \theta = \omega_1^2 \theta_\infty$$

Si bien que le comportement du mécanisme dépend du signe du discriminant $\Delta = \frac{h^2}{J^2} - 4\frac{C}{J}$. On se reportera à la partie 2 pour les notations utilisées dans la suite.

Remarque : les incertitudes de mesures qui suivent sont toutes justifiées par l'acuité approximative de CSRT, lequel a une erreur, à l'échelle des vidéos prises, d'environ 0,2 radians.

3.4 Cas $\Delta < 0$

Montrons comment établir M_F dans le cas $\Delta < 0$:

Afin de nous placer dans de telles conditions, on maximise le coefficient C de torsion. Pour cela, on réduit la longueur de la corde.

Si $\Delta < 0$, la solution générale de l'équation est donc de la forme

$$\theta(t) = \theta_\infty + \mathbf{A}e^{-\frac{\omega_1 t}{2Q}} \cos(\omega_1 t + \phi)$$

On obtient les résultats suivants par étude directe du tracé :

$$\theta_\infty = 1,45 \pm 0,2 \text{ rad}, \omega_1 = 0,7 \pm 0,01 \text{ rad/s}, Q = 119 \pm 10$$

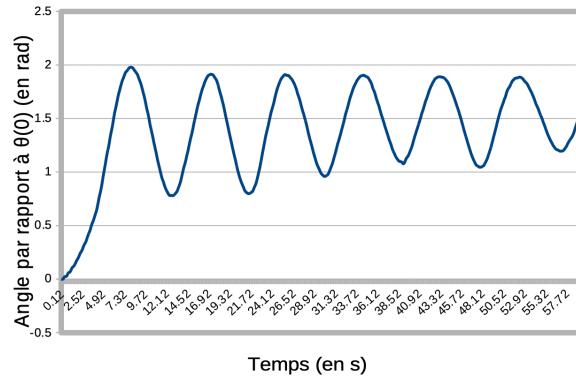


FIGURE 13 – Tracé de $\theta(t)$

Or, on sait que les équations de la partie 2 donnent :

$$M_F = J\theta_\infty\omega_1^2$$

En mesurant $J \approx 6 \cdot 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, on établit que :

$$M_F \approx 4,3 \cdot 10^{-4} \text{ N}\cdot\text{m}$$

Et donc, en notant L la demi-longueur de la règle :

$$\|\vec{F}_1\| \approx \|\vec{F}_2\| = \frac{M_F}{2L} = 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

3.5 Cas $\Delta > 0$

Il est plus difficile d'établir M_F dans le cas $\Delta > 0$. Dans ces conditions, la solution générale de l'équation est de la forme

$$\theta(t) = \theta_\infty + \mathbf{A}e^{r_+t} + \mathbf{B}e^{r_-t}$$

où

$$r_{\pm} = -\frac{\omega_1}{Q} \pm \omega_1 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$$

On obtient expérimentalement le tracé suivant, qui semble correspondre à une telle formule :

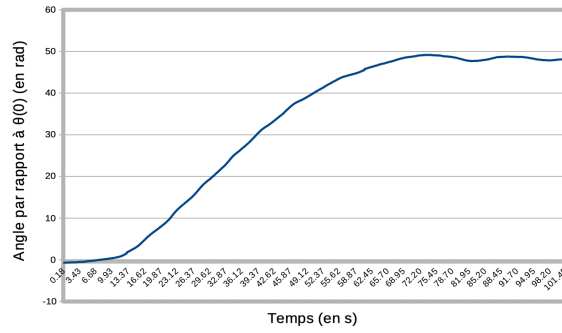


FIGURE 14 – Tracé de $\theta(t)$

Pour exploiter ce tracé, on utilise le module scipy de Python, avec la **méthode des moindres carrés**.

Le protocole est le suivant :

- Choisir une forme générale pour la fonction $\theta_{\text{théorique}}(t)$ recherchée :

$$\theta(t) = \theta_\infty + \mathbf{A}e^{r_+t} + \mathbf{B}e^{r_-t}$$

- Initialiser les constantes $\theta_\infty, r_+, r_-, \mathbf{A}, \mathbf{B}$ à des valeurs aléatoires
- Minimiser l'écart quadratique entre $\theta_{\text{théorique}}(t)$ et $\theta_{\text{expérimental}}(t)$ par petites variations des constantes
- Reproduire les deux étapes précédentes et conserver la meilleure fonction obtenue.

En supposant le dispositif initialement à l'équilibre, on obtient

$$\theta_\infty = 48,35 \pm 0,2 \text{ rad}, \omega_1 = 0,08 \pm 0,01 \text{ rad/s}, Q \text{ proche de } 1/\sqrt{2}.$$

On établit alors par les mêmes méthodes que précédemment :

$$\|\vec{F}_1\| = \|\vec{F}_2\| = \frac{J\theta_\infty\omega_1^2}{2L} \approx 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

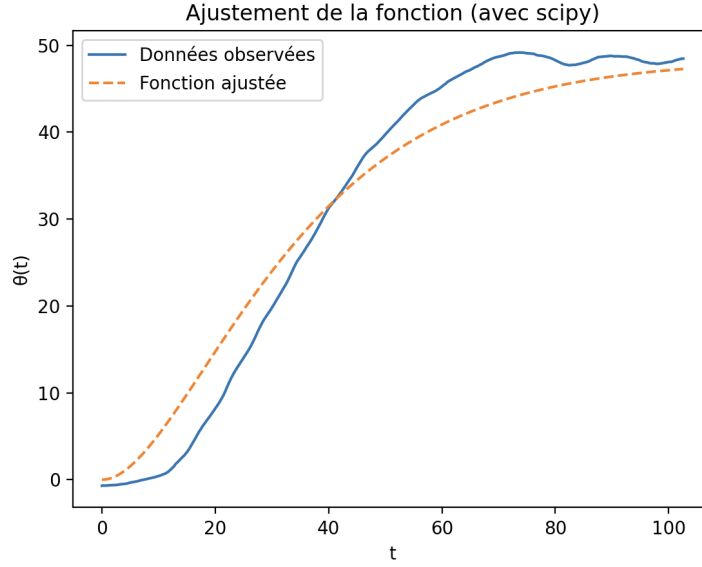


FIGURE 15 – Comparaison avec les résultats théoriques pour de telles valeurs de $\theta_\infty, \omega_1, Q$. Il y a bien correspondance entre les deux courbes

3.6 Conclusion

En conclusion, l'ordre de grandeur obtenu sur la force résultante est faible, mais suffisant pour des applications dans le domaine de la micro-ingénierie, par exemple.

4 Bibliographie

- [1] KARL UNO INGARD : Notes on Acoustics : *Infinity Science Press, 2008*
- [2] LORD RAYLEIGH : The Theory of Sound, Volume II, Second Edition : *Macmillan, 1896*
- [3] HERMANN VON HELMHOLTZ : On the sensations of tone as a physiological basis for the theory of music : *Longmans, Green & Co., original de 1877, traduction d'Alexander John Ellis, 1885*
- [4] VINKO DVORAK : On acoustic repulsion : *1878, American Journal of Science, s3-16(91)*
- [5] RICARDO R. BOULLOSA, FELIPE ORDUÑA-BUSTAMANTE : The reaction force on a Helmholtz resonator driven at high sound pressure amplitudes : *1992, American Journal of Physics, 60(8)*
- [6] JOHN PEARLEY HUFFMAN : Explained: That Weird Throbbing When You Open One Car Window : <https://www.caranddriver.com/news/a15344069/explained-that-weird-throbbing-when-you-open-one-car-window/>, lu le 9 octobre 2024
- [7] WIKIPÉDIA : Bouteille (instrument de musique) : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Bouteille_\(instrument_de_musique\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Bouteille_(instrument_de_musique)), lu le 9 octobre 2024