Modèle de Leslie pour l'étude de la dynamique des populations

Meziane Taha

6 juin 2023

Sommaire

- La démographie étudie l'impact des problèmes sociaux sur le nombre d'individus au sein d'une société et essaie de prédire la manière suivant laquelle évolue l'effectif des individus d'une population humaine.
- Pour cela, elle s'appuie sur des modèles mathématiques.

Figure –

Patrick Holt Leslie - 1900/1972

Modèle malthusien

- Le temps est découpé en des pas de temps de mêmes durées.
- La taille de la population à un pas de temps t vérifie :

$$n_{t+1} = rn_t$$

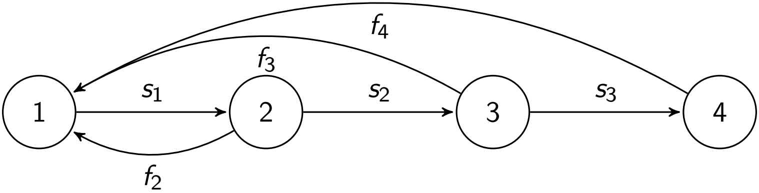
Modèle malthusien

- Le temps est découpé en des pas de temps de mêmes durées.
- La taille de la population à un pas de temps t vérifie :

$$n_{t+1} = rn_t$$

- Incovénients : Modèle très simpliste puisqu'il ne prend pas en compte les ressources limitées disponibles dans un environnement, ainsi que la structure interne de la population.

- On considère que le temps est découpé à des pas de temps $(t_m)_{m\in\mathbb{N}}$. (Pour alléger les notations, on confondra t_m avec t)
- On suppose aussi que la population étudiée est décomposée à des classes d'âges i, tel que la durée passée par un individu dans une classe d'âge correspond à celle d'un pas de temps.



Modélisation du problème

Notations

- $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$: $n_{i,t}$ désigne l'effectif de la population dans la classe i au pas de temps t, où p est le nombre de classes de la population .

Modélisation du problème

Notations

- $\forall i \in \{1, \dots, p\}$: $n_{i,t}$ désigne l'effectif de la population dans la classe i au pas de temps t, où p est le nombre de classes de la population .
- On pose $N_t = \begin{pmatrix} n_{1,t} \\ \vdots \\ n_{p,t} \end{pmatrix}$.

Notations

- $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$: $n_{i,t}$ désigne l'effectif de la population dans la classe i au pas de temps t, où p est le nombre de classes de la population .
- On pose $N_t = \begin{pmatrix} n_{1,t} \\ \vdots \\ n_{p,t} \end{pmatrix}$.
- s_i désigne la proportion d'individus qui survit et passe de la classe i à la classe $i+1$ à chaque pas de temps.

Modélisation du problème

Notations

- $\forall i \in \{1, \dots, p\}$: $n_{i,t}$ désigne l'effectif de la population dans la classe i au pas de temps t, où p est le nombre de classes de la population .
- On pose $N_t = \begin{pmatrix} n_{1,t} \\ \vdots \\ n_{p,t} \end{pmatrix}$.
- s_i désigne la proportion d'individus qui survit et passe de la classe i à la classe $i+1$ à chaque pas de temps.
- Chaque individu de la classe i donne naissance à f_i individus. Le nombre de naissances dues aux individus de la classe i est donc $f_i n_{i,t}$.

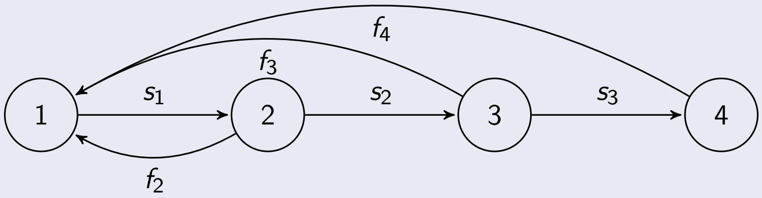
Modélisation du problème

Notations

- $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$: $n_{i,t}$ désigne l'effectif de la population dans la classe i au pas de temps t, où p est le nombre de classes de la population .
- On pose $N_t = \begin{pmatrix} n_{1,t} \\ \vdots \\ n_{p,t} \end{pmatrix}$.
- s_i désigne la proportion d'individus qui survit et passe de la classe i à la classe $i+1$ à chaque pas de temps.
- Chaque individu de la classe i donne naissance à f_i individus. Le nombre de naissances dues aux individus de la classe i est donc $f_i n_{i,t}$.
- Dans la suite, nous utiliserons la norme $\|.\|_1$ sur $\mathbb{R}^p$ et on pose $n_t = \|N_t\|_1$, ce qui représente l'effectif total de la population.

Représentation de la population

La dynamique d'une population peut être représentée par un graphe de cycle de vie dont les nœuds sont les différentes classes d'âge.



Matrice de Leslie

Définition et proposition

- On pose :

$$L = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & \cdots & f_p \\ s_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & s_{p-1} & 0 \end{pmatrix}$$

- La matrice L est appelée *matrice de Leslie*.

Matrice de Leslie

Définition et proposition

- On pose :

$$L = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & \cdots & f_p \\ s_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & s_{p-1} & 0 \end{pmatrix}$$

- La matrice L est appelée *matrice de Leslie*.
- On a la relation de récurrence suivante :

$$\boxed{\mathrm{N}_{t+1} = L N_t}$$

Conclusion

À partir de la formule de récurrence, on peut déterminer l'état n_t de la population à l'instant t à partir de celle à l'instant initial n_0 par la formule suivante :

$$\boxed{\mathrm{N}_t = L^t N_0}$$

Conclusion

À partir de la formule de récurrence, on peut déterminer l'état n_t de la population à l'instant t à partir de celle à l'instant initial n_0 par la formule suivante :

$$\boxed{\mathrm{N}_t = L^t N_0}$$

Il apparaït donc que le comportement asymptotique de la population est lié aux propriétés de la matrice L. On s'intéresse alors à l'étude des valeurs propres de cette matrice .

Définitions

1. *Une matrice* $M \in M_p(\mathbb{R})$ *est dite positive (resp. strictement positive) et on note* $M \geq 0$ *(resp.* $M > 0$*) si tous ses coefficients sont positifs ou nuls (resp. strictement positifs).*

Théorème de Perron-Frobenius

Définitions

1. *Une matrice* $M \in M_p(\mathbb{R})$ *est dite positive (resp. strictement positive) et on note* $M \geq 0$ *(resp.* $M > 0$*) si tous ses coefficients sont positifs ou nuls (resp. strictement positifs).*
2. *Une matrice positive* $M \in M_p(\mathbb{R})$ *est dite primitive s'il existe* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* M^k *est strictement positive.*

Théorème de Perron-Frobenius

Soit M une matrice carrée primitive. Alors il existe une valeur propre λ de M qui vérifie les propriétés suivantes :

1. λ est réelle et $\lambda > 0$.
2. λ est associé à un vecteur propre strictement positif.
3. L'espace propre associé à λ est de dimension 1.
4. Pour toute valeur propre λ' de M , on a $|\lambda'| < \lambda$.

Théorème de Perron-Frobenius

Théorème de Perron-Frobenius

Soit M une matrice carrée primitive. Alors il existe une valeur propre λ de M qui vérifie les propriétés suivantes :

1. λ est réelle et $\lambda > 0$.
2. λ est associé à un vecteur propre strictement positif.
3. L'espace propre associé à λ est de dimension 1.
4. Pour toute valeur propre λ' de M , on a $|\lambda'| < \lambda$.

Remarque :

Dans tout ce qui suit, on supposera que la matrice L de Leslie vérifie les hypothèses du théorème de Perron-Frobenius.

Théorème de Perron-Frobenius

On considère les p valeurs propres de L $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{C}$ ordonnées par modules décroissants. Le théorème précédant nous assure que : $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et que $\forall i \in \{2, \ldots, p\}$: $|\lambda_i| < \lambda_1$. On pose V_1 le vecteur propre positif associé à λ_1 de norme 1.

On considère les p valeurs propres de L $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{C}$ ordonnées par modules décroissants. Le théorème précédant nous assure que : $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et que $\forall i \in \{2, \ldots, p\}$: $|\lambda_i| < \lambda_1$. On pose V_1 le vecteur propre positif associé à λ_1 de norme 1.

Propriété

$$N_t = \lambda_1^t (c_1 V_1 + \epsilon(t)) \qquad (1)$$

où $\lim\limits_{t \to +\infty} \epsilon(t) = 0$ et c_1 une constante qui dépend de la condition initiale n_0.

Théorème de Perron-Frobenius

Corrolaires

1. $\forall i \in \{1, \ldots, p\} : \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{n_{i,t+1}}{n_{i,t}} = \lambda_1$
2. $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{N_t}{\lambda_1^t} = c_1 V_1$
3. Vitesse de convergence : $\left\| \frac{N_t}{\lambda_1^t} - c_1 v_1 \right\|_1 = O\left(\frac{|\lambda_2|^t}{\lambda_1^t}\right)$

Théorème de Perron-Frobenius

Corrolaires

1. $\forall i \in \{1, \ldots, p\} : \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{n_{i,t+1}}{n_{i,t}} = \lambda_1$
2. $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{N_t}{\lambda_1^t} = c_1 V_1$
3. Vitesse de convergence : $\left\| \frac{N_t}{\lambda_1^t} - c_1 v_1 \right\|_1 = O\left(\frac{|\lambda_2|^t}{\lambda_1^t}\right)$

Interprétation

- La première propriété décrit le comportement asymptotique de croissance. On tend en effet vers une croissance exponentielle.
- La deuxième propriété souligne que l'on tend vers une répartition constante des individus dans les différentes classes d'âge, indépendamment de la taille de la population. Cette répartition est appelée distribution stable.

Taux net de reproduction

- On pose $R_0 = f_1 + s_1 f_2 + \ldots + s_1 \ldots s_{p-1} f_p$.
  Ce paramètre s'appelle *taux net de reproduction*.

\- Les situations possibles sont les suivantes :

- Si $R_0 > 1$, alors $\lambda_1 > 1$ (croissance de la population).
- Si $R_0 = 1$, alors $\lambda_1 = 1$ (population de taille constante).
- Si $R_0 < 1$, alors $\lambda_1 < 1$ (décroissance de la population).

- On pose $R_0 = f_1 + s_1 f_2 + \ldots + s_1 \ldots s_{p-1} f_p$.
  Ce paramètre s'appelle *taux net de reproduction*.

- Les situations possibles sont les suivantes :

  - Si $R_0 > 1$, alors $\lambda_1 > 1$ (croissance de la population).
  - Si $R_0 = 1$, alors $\lambda_1 = 1$ (population de taille constante).
  - Si $R_0 < 1$, alors $\lambda_1 < 1$ (décroissance de la population).

Temps moyen de génération

On le définit par :

$$T = \sum_{i=1}^{p} i \frac{s_1 \cdots s_{i-1} f_i}{R_0}$$

T désigne l'âge moyen auquel un individu aura ses descendants.

Application du modèle de Leslie

- Le but de cette partie est d'appliquer ce modèle de Leslie et les résultats qu'on vient d'établir sur l'étude de l'évolution de la population de Benguerir.
- On décompose cette population en 16 classes, en prenant comme pas de temps 5 ans.
- Pour les données, on se sert des résultats du recensement général de la population et de l'habitat de 2014, disponibles chez le Haut-Commissariat au Plan.

```
[    0,    0,    0,0.01,  0.1,   .5,   .5,   .5,   .5,   .5,0.01,    0,    0,    0,    0,0]
[ 0.97,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,0]
[    0, 0.97,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,0]
[    0,    0, 0.97,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,0]
[    0,    0,    0, 0.97,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,0]
[    0,    0,    0,    0, 0.97,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,0]
[    0,    0,    0,    0,    0, 0.97,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,0]
[    0,    0,    0,    0,    0,    0, 0.97,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,0]
[    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0, 0.97,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,0]
[    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0, 0.94,    0,    0,    0,    0,    0,    0,0]
[    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0, 0.94,    0,    0,    0,    0,    0,0]
[    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0, 0.94,    0,    0,    0,    0,0]
[    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0, 0.94,    0,    0,    0,0]
[    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,  0.7,    0,    0,0]
[    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,  0.7,    0,0]
[    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,  0.5,0]
```

- Taux net de reproduction : $R_0 = 2.1146566636836215$

Application du modèle de Leslie

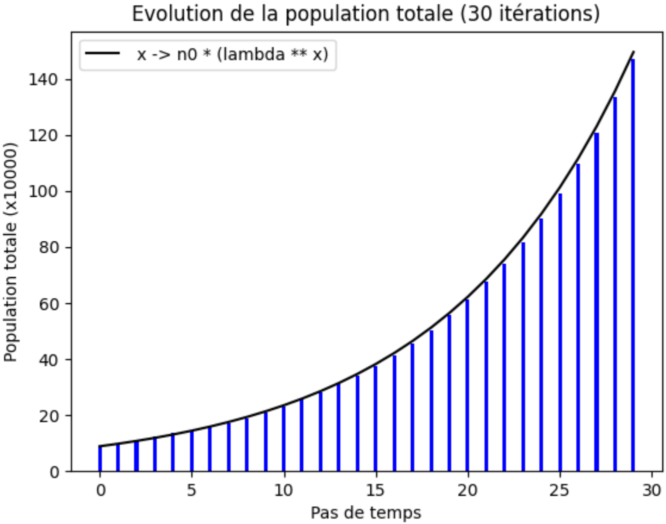
```
[    0,    0,    0,0.01, 0.1,  .5,  .5,  .5,  .5,  .5,0.01,   0,   0,   0,   0,0]
[ 0.97,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,0]
[    0,0.97,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,0]
[    0,    0, 0.97,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,0]
[    0,    0,    0,0.97,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,0]
[    0,    0,    0,    0,0.97,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,0]
[    0,    0,    0,    0,    0,0.97,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,0]
[    0,    0,    0,    0,    0,    0,0.97,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,0]
[    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,0.97,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,0]
[    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,0.94,    0,    0,    0,    0,    0,    0,0]
[    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,0.94,    0,    0,    0,    0,    0,0]
[    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,0.94,    0,    0,    0,    0,0]
[    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,0.94,    0,    0,    0,0]
[    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,0.7,    0,    0,0]
[    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,0.7,    0,0]
[    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0,0.5,0]
```

- Taux net de reproduction : $R_0 = 2.1146566636836215$
- La valeur propre dominante est 1.1023645215808566.

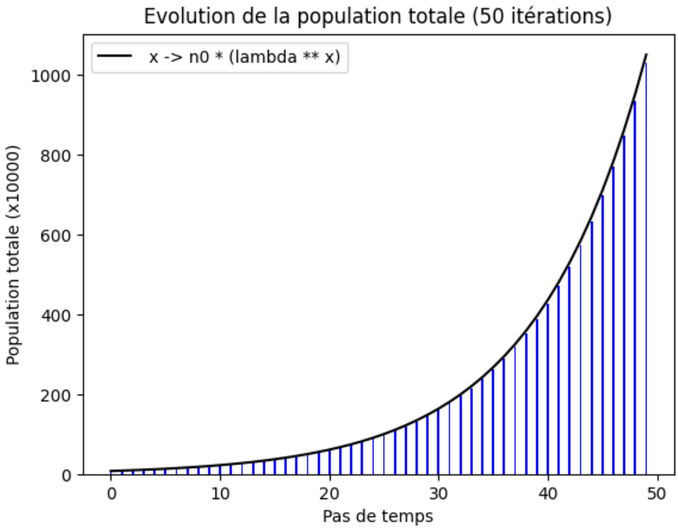
```
[    0,    0,    0,0.01, 0.1,  .5,  .5,  .5,  .5,  .5,0.01,   0,    0,   0,   0,0]
[ 0.97,    0,    0,   0,    0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,    0,   0,   0,0]
[    0,0.97,    0,   0,    0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,    0,   0,   0,0]
[    0,    0, 0.97,   0,    0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,    0,   0,   0,0]
[    0,    0,    0,0.97,    0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,    0,   0,   0,0]
[    0,    0,    0,   0,0.97,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,    0,   0,   0,0]
[    0,    0,    0,   0,    0,0.97,   0,   0,   0,   0,   0,   0,    0,   0,   0,0]
[    0,    0,    0,   0,    0,   0,0.97,   0,   0,   0,   0,   0,    0,   0,   0,0]
[    0,    0,    0,   0,    0,   0,   0,0.97,   0,   0,   0,   0,    0,   0,   0,0]
[    0,    0,    0,   0,    0,   0,   0,   0,0.94,   0,   0,   0,    0,   0,   0,0]
[    0,    0,    0,   0,    0,   0,   0,   0,   0,0.94,   0,   0,    0,   0,   0,0]
[    0,    0,    0,   0,    0,   0,   0,   0,   0,   0,0.94,   0,    0,   0,   0,0]
[    0,    0,    0,   0,    0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,0.94,    0,   0,   0,0]
[    0,    0,    0,   0,    0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,  0.7,   0,   0,0]
[    0,    0,    0,   0,    0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,    0, 0.7,   0,0]
[    0,    0,    0,   0,    0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,    0,   0, 0.5,0]
```

- Taux net de reproduction : $R_0 = 2.1146566636836215$
- La valeur propre dominante est 1.1023645215808566.
- Temps moyen de génération : $T = 38.98813624936925$

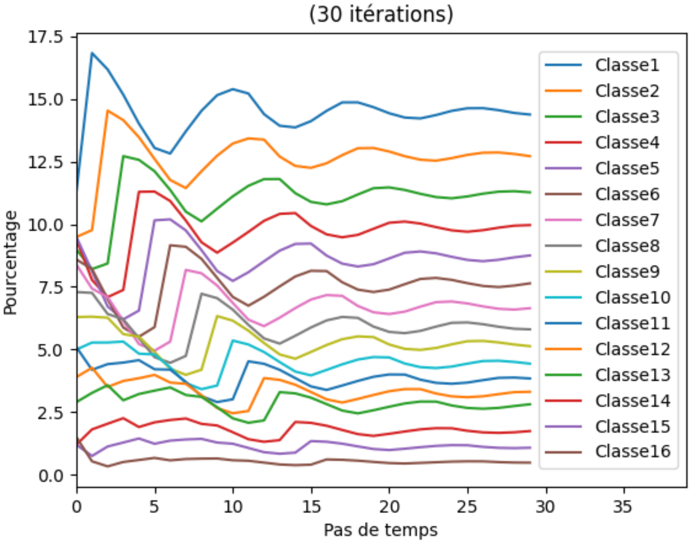
Application du modèle de Leslie



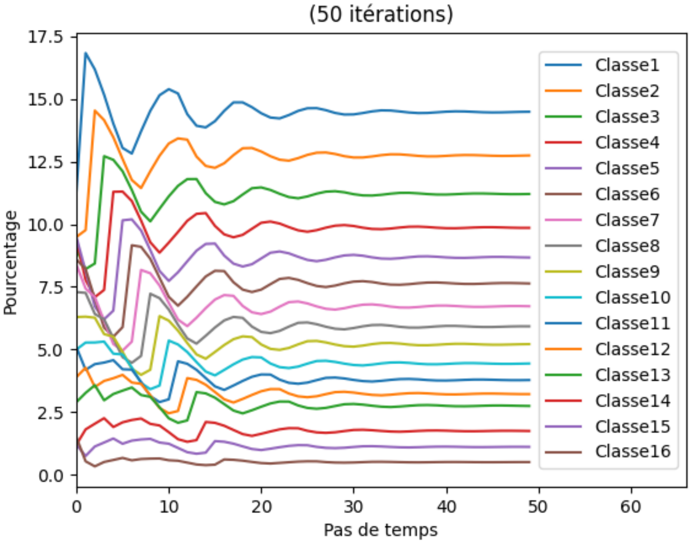
Application du modèle de Leslie



Application du modèle de Leslie



Application du modèle de Leslie



Fin

Merci de votre attention !

```python
import numpy as np
from numpy.linalg import eig
p = 16 # Nb de classes
pas = 5 # 5 ans
L = np.array([[    0,    0,    0,0.01, 0.1,  .5,  .5,  .5,  .5,  .5,0.01,  0,   0,   0,   0,0],
              [ 0.97,    0,    0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,0],
              [    0,0.97,     0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,0],
              [    0,    0, 0.97,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,0],
              [    0,    0,    0,0.97,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,0],
              [    0,    0,    0,   0,0.97,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,0],
              [    0,    0,    0,   0,   0,0.97,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,0],
              [    0,    0,    0,   0,   0,   0,0.97,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,0],
              [    0,    0,    0,   0,   0,   0,   0,0.97,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,0],
              [    0,    0,    0,   0,   0,   0,   0,   0,0.94,   0,   0,   0,   0,   0,   0,0],
              [    0,    0,    0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,0.94,   0,   0,   0,   0,   0,0],
              [    0,    0,    0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,0.94,   0,   0,   0,   0,0],
              [    0,    0,    0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,0.94,   0,   0,   0,0],
              [    0,    0,    0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0, 0.7,   0,   0,0],
              [    0,    0,    0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0, 0.7,   0,0],
              [    0,    0,    0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0, 0.5,0]])

N_0 = np.array([10005, 8411, 7968,8323, 8411, 7614, 7437, 6463, 5578, 4427, 4515, 3453, 2568, 1062,1063, 1328])
# Popoulation initiale totale en 2014 : 88538
```

Loading...

Calcul de L^t

```
[3] dict = {0:np.identity(16) ,1 : L}
    def puiss_L(n):
      if n in dict:
        return dict[n]
      else:
        res = np.dot(puiss_L(n-1),L)
        dict[n] = res
        return res
```

Calcul de N_t

```
def popul_totale(n):
  res =  np.dot(puiss_L(n),N_0)
  somme = 0
  for _ in res :
    somme += _
  return (res,somme)
```

Représentation de la population

```
[17] import numpy as np
     import matplotlib.pyplot as plt

     itr = 30
     X = list(range(itr))
     Y = []
     pas = 10**4
     for i in X :
       Y.append(popul_totale(i)[1]/pas)

     width = 0.2
     plt.xlabel('Pas de temps')
     plt.ylabel(f'Population totale (x{pas})')
     plt.ylabel
     plt.bar(X, Y, width, color='b' )
     plt.plot(X,(popul_totale(0)[1]/pas) * (lambda_max**X),'k',label = ' x -> n0 * (lambda ** x)')
     plt.legend()
     plt.title('Evolution de la population totale')

     plt.savefig('PopuTotale.png')
```

Calcul des proportions de chaque classe

```
l = []
for i in range(p):
  li= []
  for j in range(itr):
      pop = popul_totale(j)[1]
      li.append(popul_totale(j)[0][i]*100/pop)
  l.append(li)

plt.xlim(0,39)
plt.xlabel('Pas de temps')
plt.ylabel('Pourcentage')


for i in range(len(l)):
  plt.plot(X,l[i],label = f'Classe{i+1}')
plt.legend(loc = 'right')
plt.savefig('Pourcentage.png')
```

Valeur propre dominante

```
def val_max(L):
  L_ = []
  for x in L:
    L_.append(abs(x))
  m = max(L_)
  res = []
  for x in L:
    if abs(x) == m :
      res.append(x)
  return res
D= np.linalg.eigvals(L)
lambda_max = val_max(D)[0]
lambda_max
```

```
(1.1023645215808566+0j)
```

Calcul de R0

```
[ ]  def calc_R0(M):
       p = len(M[0])
       res = 0
       for i in range(p):
         x = M[0][i]
         for j in range(i):
           x *= M[j+1][j]
         res += x
       return res

     R0 = calc_R0(L)
     R0
```

```
2.1146566636836215
```

Temps moyen de génération

```
[ ]  def calcul_gen(M):
       p = len(M)
       res = 0
       for i in range(1,p+1):
         x = i*M[0][i-1]/R0
         for j in range(1,i):
           x *= M[j][j-1]
         res += x

       return res

     calcul_gen(L)*5
```

```
38.98813624936925
```

- On suppose que $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont 2 à 2 distincts

  (En pratique, c'est généralement le cas pour les matrices de Leslie).

- Alors χ_L est scindé-simple dans $\mathbb{C}[X]$,

  donc L est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.

D'où $\exists\, v_1, \ldots, v_p \in M_{p,1}(\mathbb{C})$ tq $\forall i \in [\![1,p]\!] : L v_i = \lambda_i v_i$

$(v_1, \ldots, v_p)$ une base de $M_{p,1}(\mathbb{C})$

(On rappelle que $L v_1 = \lambda_1 v_1$ et $v_1 > 0$)

Démonstration de la propriété (1)

- Comme $N_0 \in M_{p,1}(\mathbb{C})$ alors $\exists (c_1, \ldots, c_p) \in \mathbb{C}^p$

tel que $N_0 = c_1 v_1 + \cdots + c_p v_p$

Alors $\forall t$: $N_t = L^t N_0 = L^t \left(\sum_{i=1}^{p} c_i v_i \right)$

$$= \sum_{i=1}^{p} c_i L^t v_i = \sum_{i=1}^{p} c_i \lambda_i^t v_i$$

Donc $\forall t$: $N_t = \lambda_1^t \left(c_1 v_1 + \frac{\lambda_2^t}{\lambda_1^t} c_2 v_2 + \cdots + \frac{\lambda_p^t}{\lambda_1^t} c_p v_p \right)$

On pose : $\varepsilon(t) = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^t c_2 v_2 + \cdots + \left(\frac{\lambda_p}{\lambda_1} \right)^t c_p v_p$

Comme $\forall i \in [\![2, p]\!]$: $\left| \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right| < 1$ alors $\forall i \in [\![2, p]\!]$: $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^t \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$

Donc $\varepsilon(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$. D'où le résultat (1)

Pour la vitesse de convergence :

$$\forall t, \quad \frac{N_t}{\lambda_1^t} - c_1 v_1 = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^t c_2 v_2 + \dots + \left(\frac{\lambda_p}{\lambda_1}\right)^t c_p v_p$$

Comme $\forall i \geq 3$: $|\lambda_i| \leq |\lambda_2|$

Alors $$\left\| \frac{N_t}{\lambda_1^t} - c_1 v_1 \right\|_1 = O\left(\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^t \right)$$