Filière MP - ENS de Paris-Saclay, Lyon, Rennes et Paris - Session 2023
Page de garde du rapport de TIPE
Attention : Le rapport doit être réalisé par l'étudiant(e).
Si le rapport résulte d'une collaboration, elle doit être clairement annoncée.

NOM :	MEZIANE	Prénoms :	TAHA
Classe :	MP*2		
Lycée :	Lydex	Numéro de candidat :	15540
Ville :	Benguerir - Maroc		

Concours auxquels vous êtes admissible, dans la banque MP inter-ENS (les indiquer par une croix) :

ENS P.-Saclay	MP - Option MP	X	MP - Option MI	
	Informatique MP			
ENS Lyon	MP - Option MP	X	MP - Option MI	
	Informatique MP			
ENS Rennes	MP - Option MP	X	MP - Option MI	
ENS Paris	MP - Option P		MP - Option I	
	Informatique MP			

Matière dominante du TIPE (la sélectionner d'une croix inscrite dans la case correspondante) :

Informatique		Mathématiques	X	Physique	

Titre du TIPE :

Modèle de Leslie

Nombre de pages (à indiquer dans les cases ci-dessous) :

Texte	10	Illustration	4	Bibliographie	4

Attention, les illustrations doivent figurer dans le corps du texte et non en fin du document !

Résumé ou descriptif succinct du TIPE (6 lignes, maximum) :

On s'intéresse dans ce document à l'étude théorique du modèle de Leslie, qui sert à prédire l'évolution démographique d'une population. Ce modèle matriciel, fondé principalement sur le théorème de Perron - Frobenius, va nous permettre de prédire la manière suivant laquelle évoluerait la population de Benguerir, l'une des villes marocaines.

À Benguerir

Le 08/06/2023

Signature du (de la) candidat(e)

Signature du professeur responsable de la classe préparatoire dans la discipline

A. CHABEHI

Cachet de l'établissement

LYCEE MOHAMMED VI D'EXCELLENCE Direction CPGE BENGUERIR

Driss OUHADI
Directeur des études
CPGE

La signature du professeur responsable et le tampon de l'établissement ne sont pas indispensables pour les candidats libres (hors CPGE).

Modèle de Leslie

MEZIANE Taha

8 juin 2023

1 Introduction

La démographie est un domaine qui essaie de prédire la manière suivant laquelle évolue l'effectif des individus d'une population humaine. Pour ce faire, elle s'appuie sur des modèles mathématiques.

Le modèle le plus simple est le modèle malthusien qui consiste à découper le temps en des pas de temps de mêmes durées et suppose que la taille de la population à un pas de temps t vérifie :

$$n_{t+1} = rn_t \tag{1}$$

où r est un coefficient dépendant de la population étudiée.

Étant donnée une population initiale n_0, la suite (n_t) est géométrique de raison r. Si $r > 1$, la population croît exponentiellement. En revanche, si $r < 1$, elle décroît et finit par s'éteindre. Ce modèle assez simple est très limité puisqu'il ne ne prend pas en compte les ressources limitées disponibles dans un environnement, ainsi que la structure interne de la population. D'où la nécessité du modèle de Leslie qui permet de satisfaire le second point.

FIGURE 1 – Patrick Holt Leslie - 1900/1972

2 Modélisation

On considère que le temps est découpé à des pas de temps $(t_m)_{m\in\mathbb{N}}$. (Pour alléger les notations, on confondra t_m avec t). On suppose aussi que la population étudiée est décomposée à des classes d'âges i, tel que la durée passée par un individu dans une classe d'âge correspond à celle d'un pas de temps.

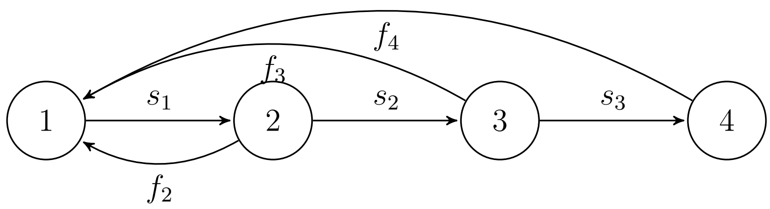
Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$: on désigne par $n_{i,t}$ l'effectif de la population dans la classe i au pas de temps t, où p est le nombre de classes de la population .

On pose alors $N_t = \begin{pmatrix} n_{1,t} \\ \vdots \\ n_{p,t} \end{pmatrix}$.

De plus, s_i désigne la propabilité pour qu'un individu survit et passe de la classe i à la classe $i+1$ à chaque pas de temps, et f_i le nombre de descendants donnés par chaque individu de la classe$i$. Le nombre de naissances total de la classe i est donc $f_i n_{i,t}$.

Dans la suite, nous utiliserons la norme $\|.\|_1$ sur $\mathbb{R}^p$ et on pose $n_t = \|N_t\|_1$, ce qui représente l'effectif total de la population.

Le principe du modèle de Leslie peut être résumé par un graphe pondéré par les coefficients de fécondité et de survie régissant la dynamique de la population étudiée, et dont les nœuds sont les différentes classes d'âge, comme le montre l'exemple suivant :



Les probabilités de survie ainsi que les coefficients de fécondité peuvent être regroupés dans la matrice suivante, dite de Leslie :

$$L = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & \cdots & f_p \\ s_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & s_{p-1} & 0 \end{pmatrix}$$

On a alors la relation suivante, fondamentale pour ce modèle :

$$\boxed{N_{t+1} = LN_t} \qquad (2)$$

Par une récurrence simple, on obtient que :

$$\boxed{N_t = L^t N_0} \tag{3}$$

Il apparaît donc que le comportement asymptotique de la population est lié aux propriétés de la matrice L. On s'intéresse alors à l'étude des valeurs propres de cette matrice.

3 Théorème de Perron-Frobenius

Dans ce paragraphe, on identifie $M_{n,1}(\mathbb{K})$ à $\mathbb{K}^n$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Et on pose pour $x = (x_i)$, $|x| = (|x_i|)$ dite le module de la colonne x.

Définition 1. *Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite positive (resp. strictement positive) et on note $A \geq 0$ (resp. $A > 0$) si tous ses coefficients sont positifs ou nuls (resp. strictement positifs).*

Pour m, n deux entiers naturels non nuls, on munit $M_{m,n}(\mathbb{R})$ de la relation d'ordre : ($A \geq B$ si $A - B \geq 0$).

Propriété 1. *Pour une matrice strictement posiitve A, on a :*

1. $\forall x \in \mathbb{R}^p : x \geq 0$ *et* $x \neq 0 \implies Ax > 0$
2. $\rho(A) > 0$ *et* $\rho(\frac{A}{\rho(A)}) = 1$
3. $\forall x \in \mathbb{R}^p : |Ax| \leq A|x|$

Théorème 1 (Théorème de Perron-Frobenius, forme faible)**.** *Soit A une matrice carrée strictement positive. Alors :*

- *(a) $\rho(A)$ est une valeur propre simple de A (et $\rho(A) > 0$).*
- *(b) $\rho(A)$ est dominante : $\forall \lambda \in Sp(A) : \lambda \neq \rho(A) \implies |\lambda| < \rho(A)$*
- *(c) L'espace propre $E_{\rho(A)}(A)$ est une droite vectorielle engendré par un vecteur strictement positif.*

Pour la démonstration, on s'aidera de ces deux lemmes :

Lemme 1. *Soit $z_1, \ldots, z_n$ des nombres complexes, alors :*

$|\sum_{i=1}^{n} z_i| = \sum_{i=1}^{n} |z_i|$ *si et seulement si $z_1, \ldots, z_n$ sont situés sur la même demi-droite.*

Lemme 2. *Soit A une matrice carrée, alors :*

$$\rho(A) < 1 \implies \textit{La suite } (A^k)_{k\in\mathbb{N}} \textit{ converge vers la matrice nulle.}$$

Démonstration. Pour simplifier, on pose $\rho = \rho(A)$.

D'après la propriété précédente, on peut supposer, quitte à normaliser par ρ que $\rho = 1$.

Soit λ une valeur propre de A de module 1 et x un vecteur propre associé à λ.Alors $Ax = \lambda x$, en passant au module et d'après la propriété précédente, on obtient que $|x| \leq A|x|$.

Supposons par absurde que $A|x| \neq |x|$, alors $A|x| - |x| > 0$, ainsi $\exists \epsilon > 0$ tel que $A|x| - |x| > \epsilon A|x|$ (car sinon, en tendant ϵ vers 0, on obtient que $A|x| \neq |x|$, alors $A|x| - |x| \leq 0$).

En posant $B = \frac{1}{1+\epsilon} A > 0$, on obtient par une récurrence simple, grâce à la **propriété** 1.1 que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* : B^k A|x| > A|x| \tag{4}$$

Or $\rho(B) = \frac{1}{1+\epsilon} < 1$, donc d'après le **lemme** 2 : $\lim\limits_{k\to+\infty} B^k = 0$. En tendant alors k vers $+\infty$, on obtient que $0 > A|x|$. Ce qui contredit avec le fait que A est strictement positive. Donc $A|x| = |x|$. On déduit que $\rho(A)$ est une valeur propre de A associée à un vecteur propre strictement positif ($|x| = A|x| > 0$).

On a maintenant : $\left\{ \begin{array}{c} \text{Ax} = \lambda x \\ A|x| = |x| \end{array} \right.$. Donc $\forall j \in \{1, \ldots, n\} : \sum\limits_{k=1}^{n} a_{j,k}|x_k| = |x_j|$, or $|x_j| = |\lambda x_j| = |(Ax)_j| = |\sum\limits_{k=1}^{n} a_{j,k}x_k|$, donc $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{j,k}|x_k| = |\sum\limits_{k=1}^{n} a_{j,k}x_k|$. D'après le **lemme** 1 , $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tel que $\forall k \in \{1, \ldots, n\} : x_k = e^{i\theta}|x_k|$. Ainsi , en remplaçeant dans $A|x| = \lambda|x|$, on obtient, après simplification, que $\lambda|x_k| = |x_k|$. Or $|x| > 0$, donc $\lambda = 1$.

On conclut alors que 1 est la seule valeur propre de module maximal. Le point *(b)* est donc montré.

Supposons que dim $E_\rho(A) \geq 2$ et soient x et y deux vecteurs linéairement indépendants de $E_\rho(A)$ tel que $x > 0$ (existe d'après ce qui précède). Soit $\alpha = \min\{\frac{x_i}{y_i}, y_i \neq 0\}$, alors $z = x - \alpha y \geq 0$ et $z \neq 0$ car (x, y) est libre. Comme $A > 0$, alors $Az = \rho z > 0$ donc $z > 0$. Or il existe i tel $z_i = 0$ (car le minimum α est atteint), ce qui est absurde. On déduit que $E_\rho(A)$ est une droite vectorielle.

On admet que cette valeur propre est simple.

□

Corollaire 1. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice positive. Alors $\rho(A)$ est valeur propre de A associée à un vecteur propre positif.*

On s'aidera du lemme suivant pour la démonstration :

Lemme 3. *Le rayon spectrale ρ est continu sur $M_n(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_k = (a_{i,j} + \frac{1}{k}$ qui tend vers A quand k tend vers $+\infty$. Alors $A_k > 0$, donc d'après le théorème précédent,$\exists x_k > 0$ et de norme 1, tel que :

$$A_k x_k = \rho(A_k) x_k \tag{5}$$

Comme la sphère unitée est un compact de $\mathbb{R}^n$, alors $\exists \phi$ extractrice tel que $(x_{\phi(k)})$ converge vers $x \geq 0$. Ainsi, en tendant k vers $+\infty$ dans (5), et grâce au lemme précédent, on obtient que $Ax = \rho(A)x$.

□

Définition 2. *1. Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite réductible s'il existe une partition de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ en deux sous-ensembles $I = \{i_1, \dots, i_s\}$ et $J = \{j_1, \dots, j_t\}$ avec $s + t = n$, et $s, t > 0$, tel que $\forall (i, j) \in IxJ : a_{i,j} = 0$.*

2. Dans le cas contraire, A est dite irréductible.

Définition 3. *Si σ une permutation de $\{1, \dots, n\}$, on définit la matrice de permutaion P_σ comme étant la matrice de passage de la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ à la base $(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$, c'est-à-dire $P = (\delta_{\sigma^{-1}(i),j})$.*

Proposition 1 (Caractérisation des matrices réductibles)**.** *Une matrice A est réductible si et seulement s'il existe une matrice de permutation P telle que :*

$$A = {}^tP \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} P, \text{ où } B \text{ et } D \text{ sont des matrices carrées.}$$

Proposition 2. *Si A est une matrice positive irréductible de $M_n(\mathbb{R})$, alors $(I_n + A)^{n-1} > 0$.*

Démonstration. On note $N(x)$ le nombre de coefficients positifs non nuls d'un vecteur $x \geq 0$. Pour $x \geq 0$ et $x \neq 0$, on a $Ax \geq 0$ donc $N(x + Ax) \geq N(x)$.

Supposons par l'absurde que $N(x + Ax) = N(x)$, alors il existe une matrice de permutation P tel que $x = Py$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $y_1 > 0$, donc en remarquant que ${}^tp = P^{-1}$ et que $\forall z \geq 0 : N(Pz) = N(z)$ car Pz est obtenu en appliquant la permutation σ^{-1} (avec σ associée à P) aux composantes du vecteur z :

$$\begin{aligned} N(y) &= N(Py) = N(x + Ax) = N(Py + APy) \\ &= N(P(y + {}^tPAPy)) = N(y + {}^tPAPy) \end{aligned}$$

En écrivant ${}^tPAP = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$, les matrices E, F, G, H sont encore positives car constituées des coefficients de A, donc $y + {}^tPAPy = \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Ey_1 \\ Gy_1 \end{pmatrix}$.

Or, puisque $N(y) = N(y + {}^tPAPy)$, alors forcément $Gy_1 = 0$, car Ey_1. De plus, $y_1 > 0$ donc $G = 0$. Donc d'après la caractérisation précédente, A est réductible, ce qui est absurde. On déduit que $N((I_n + A)x) > N(x)$.

Ainsi, en itérant ce raisonnement, on obtient que :

$$N((I_n + A)^{n-1}x) > N((I_n + A)^{n-2}x) > \ldots > N(x) \geq 1 \tag{6}$$

Donc forcément $N((I_n + A)^{n-1}x) = n$ d'où $(I_n + A)^{n-1}x > 0$, pour tout $x \geq 0$, par suite $(I_n + A)^{n-1} > 0$ (en raisonnant sur la base canonique de $\mathbb{R}^n$). $\square$

Définition 4. *Une matrice positive $A \in A_p(\mathbb{R})$ est dite primitive s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que A^k est strictement positive.*

Proposition 3. *Une matrice A primitive est irréductible.*

Théorème 2 (Théorème de Perron-Frobenius, forme forte)**.** *Soit A une matrice carrée primitive. Alors :*

(a) $\rho(A)$ est une valeur propre simple de A et $\rho(A) > 0$.

(b) L'espace propre $E_{\rho(A)}(A)$ est une droite vectorielle engendré par un vecteur strictement positif.

(c) $\rho(A)$ est dominante : $\forall \lambda \in Sp(A) : \lambda \neq \rho(A) \implies |\lambda| < \rho(A)$

Démonstration. Comme A est primitive, alors $\exists m \in \mathbb{N}$ tel que $A^m > 0$. Donc $\rho(A^m) = \rho(A)^m > 0$, par suite $\rho(A) > 0$. De plus, A est irréductible d'après le proposition précédente. Donc $B = (I_n + A)^{n-1} > 0$ d'après la **proposition** 2 .

D'autre part, $B \in \mathbb{K}[A]$ donc les valeurs propres de B sont les $(1 + \lambda)^{n-1}$ où $\lambda \in Sp(A)$. Ainsi, $\forall \lambda \in Sp(A) : |1 + \lambda|^{n-1} \leq (1 + \rho(A))^{n-1}$, avec égalité pour

$\lambda = \rho(A)$ qui est bien valeur propre de A grâce au **corollaire** 1 ($A \geq 0$). On déduit alors que $\rho(B) = (1 + \rho(A))^{n-1}$.

Supposons que la multiplicité de $\rho(A)$ en tant que valeur propre de A est ≥ 2, alors comme $B \in \mathbb{K}[A]$, la multiplicité de $\rho(B) = (1+\rho(A))^{n-1}$ en tant que valeur propre de B est aussi supérieure à ≥ 2. Or $B > 0$, donc d'après le **théorème** 1, $\rho(B)$ est une valeur propre simple de B, ce qui est absurde. On déduit que $\rho(A)$ est une valeur propre simple de A. Le point *(a)* est donc montré.

On a $Ax = \rho(A)x \implies Bx = \rho(B)x$, car $B \in \mathbb{K}[A]$, donc $E_{\rho(A)}(A) \subset E_{\rho(B)}(B)$, or dim $E_{\rho(A)}(A) =$ dim $E_{\rho(B)}(B) = 1$ (Théorème 1 pour la deuxième égalité), donc $E_{\rho(A)}(A) = E_{\rho(B)}(B)$, donc grâce au **théorème** 1, le point *(b)* est satisfait.

Supposons que $\rho(A)$ n'est pas dominante, alors $\exists \lambda \in Sp(A)$ tel que $\lambda \neq \rho(A)$ et $|\lambda| = \rho(A)$. Ainsi λ^m est valeur propre de A^m et $|\lambda|^m = \rho(A)^m = \rho(A^m)$, donc $\rho(A^m)$ n'est pas une valeur propre dominante de A^m. Or $A^m > 0$, ce qui contredit avec le **théorème** 1. On déduit que $\rho(A)$ est dominante et que le point *(c)* est assuré.

$\square$

4 Retour au modèle de Leslie

Dans tout ce qui suit, on suppose que la matrice de Leslie L est toujours primitive. On considère alors les p valeurs propres de L $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{C}$ ordonnées par modules décroissants. La forme forte du théorème de Perron-Frobenius nous assure que : $\lambda_1 > 0$ et qu'elle est dominante. On considére de plus le vecteur propre positif associé à λ_1 de norme 1 qu'on note V_1.

On suppose de plus que les valeurs propres de L sont deux à deux distinctes, ce qui est, en pratique, généralement le cas pour toutes les matrices de Leslie, alors on a la propriété suivante :

Proposition 4.

$$N_t = \lambda_1^t (c_1 V_1 + \epsilon(t)) \tag{7}$$

où $\lim_{t \to +\infty} \epsilon(t) = 0$ *et* c_1 *une constante qui dépend de la condition initiale* n_0.

Corollaire 2. *1.* $\forall i \in \{1, \ldots, p\} : \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{n_{i,t+1}}{n_{i,t}} = \lambda_1$

2. $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{N_t}{\lambda_1^t} = c_1 V_1$

3. *Vitesse de convergence :* $\left\| \frac{N_t}{\lambda_1^t} - c_1 v_1 \right\|_1 = \mathrm{O}\ (\frac{|\lambda_2|^t}{\lambda_1^t})$

On peut donner une interprétation du corrolaire précédent. En effet, La première propriété décrit le comportement asymptotique de croissance. On tend en effet vers une croissance exponentielle. D'autre part, la deuxième propriété souligne que l'on tend vers une répartition constante des individus dans les différentes classes d'âge, indépendamment de la taille de la population. Cette répartition est appelée distribution stable.

5 Exemple d'application

Dans cette dernière partie, on appliquera les résultats établis ci-dessous pour étudier l'évolution de la population de Benguerir. Pour ce faire, On décompose cette population en 16 classes, en prenant comme pas de temps 5 ans.

En se servant des résultats du recensement général de la population et de l'habitat de 2014, disponibles chez le Haut-Commissariat au Plan, on établit, pour la ville de Benguerir, sa matrice de Leslie de Leslie (valable en annexe) et on aboutit aux résultats suivants :

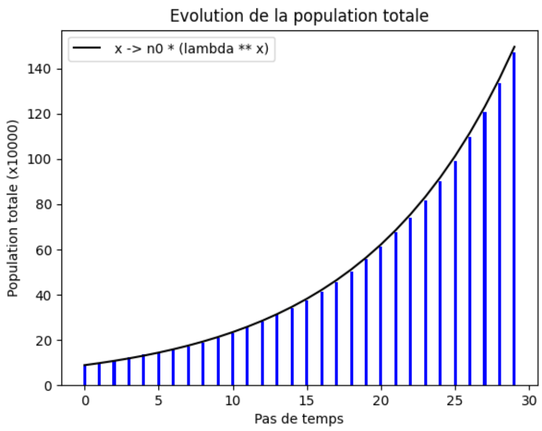


FIGURE 2 – L'évolution de la population totale pendant 30 pas de temps.

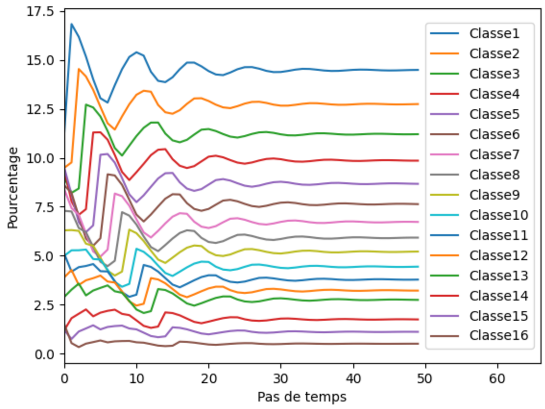


FIGURE 3 – La répartition de chaque classe en pourcentage, pour 50 pas de temps.

En analysant ces deux figures, il apparaît clairement que les interprétations énoncées ci-dessous sont valides pour cette population, à savoir la croissance exponentielle, ainsi que la caractéristique d'une distribution stable.

6 Bibliographie

1. MP Sujet Oral ADS Mathématiques 2013 (Valale sur https ://gargantua.polytechnique.fr/ siatel-web/app/explorer/fVaJXpYYYK) (Dernier ADS portant sur le théorème de Perron-Frobenius).
2. $http : //dyna.maths.free.fr/docs/lecons/developpement_algebre_533.pdf$
3. P.H. LESLIE : On the use of matrices in certain population mathematics : https ://jxshix.people.wm.edu/2009-harbin-course/classic/leslie.pdf
4. SANDRINE CHARLES - ARNAUD CHAUMOT - CHRISTELLE LOPES : Les modèles démographiques matriciels :
http ://bmm.univ-lyon1.fr/bmm/data/cours/LeslieAndCo.pdf

7 Annexe

```
[    0,    0,    0,0.01, 0.1,  .5,  .5,  .5,  .5,  .5,0.01,   0,    0,   0,   0,0]
[ 0.97,    0,    0,    0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,    0,   0,   0,0]
[    0, 0.97,    0,    0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,    0,   0,   0,0]
[    0,    0, 0.97,    0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,    0,   0,   0,0]
[    0,    0,    0, 0.97,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,    0,   0,   0,0]
[    0,    0,    0,    0,0.97,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,    0,   0,   0,0]
[    0,    0,    0,    0,   0,0.97,   0,   0,   0,   0,   0,   0,    0,   0,   0,0]
[    0,    0,    0,    0,   0,   0,0.97,   0,   0,   0,   0,   0,    0,   0,   0,0]
[    0,    0,    0,    0,   0,   0,   0,0.97,   0,   0,   0,   0,    0,   0,   0,0]
[    0,    0,    0,    0,   0,   0,   0,   0,0.94,   0,   0,   0,    0,   0,   0,0]
[    0,    0,    0,    0,   0,   0,   0,   0,   0,0.94,   0,   0,    0,   0,   0,0]
[    0,    0,    0,    0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,0.94,   0,    0,   0,   0,0]
[    0,    0,    0,    0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,0.94,    0,   0,   0,0]
[    0,    0,    0,    0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,  0.7,   0,   0,0]
[    0,    0,    0,    0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,    0, 0.7,   0,0]
[    0,    0,    0,    0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0,    0,   0, 0.5,0]
```

FIGURE 4 – Matrice de Leslie pour la ville de Benguerir