

Chaînes de lettres : Modélisation informatique, processus de branchement

Je me suis intéressé aux fonctions génératrices en probabilité, et en particulier aux processus de branchement qui sont des modèles permettant de modéliser de nombreux phénomènes de transport. Pour restreindre l'étude, j'ai cherché un exemple concret dont l'intérêt est encore pertinent de nos jours : Les chaînes de lettres.

Les processus de branchement permettent d'étudier les dynamiques de populations, et plus généralement, les phénomènes complexes de propagation. Ils permettent donc l'étude des chaînes de lettres qui fonctionnent d'autant mieux que les lettres sont transportées et acquises par de nouvelles personnes.

Positionnement thématique (phase 2)

MATHEMATIQUES (Mathématiques Appliquées), INFORMATIQUE (Informatique pratique).

Mots-clés (phase 2)

Mots-Clés (en français)	Mots-Clés (en anglais)
<i>Chaînes de lettre</i>	<i>Chain letters</i>
<i>Vente pyramidale</i>	<i>Pyramid scheme</i>
<i>Processus de branchement</i>	<i>Branching processes</i>
<i>Modèle statistique</i>	<i>Statistical model</i>
<i>Systèmes de Ponzi</i>	<i>Ponzi scheme</i>

Bibliographie commentée

Au XXème siècle, les chaînes de lettres sont en plein essor grâce à la mobilité accrue due aux nouveaux moyens de transport. Il s'agit de lettres qui conduisent les destinataires à faire des copies et à les transmettre à leur tour; ainsi elles peuvent parcourir des pays entiers pendant plusieurs années. Depuis, elles se modernisent et prennent des formes de plus en plus variées, notamment grâce aux erreurs de copie, qui introduisent de l'aléatoire, qui permet parfois de découvrir des motivations novatrices, [2] et grâce au courriel qui facilite les copies et la transmission à un carnet d'adresse plus important.

Notre étude se focalise le « Cercle d'or », une chaîne de lettres qui débute en Californie en 1976 et qui a traversé les États-Unis jusqu'à New York [1]. Elle est basée sur le principe de la vente pyramidale : la chaîne est telle que les lettres sont des listes de 12 noms. Un nouveau participant donne 50 dollars au détenteur d'une lettre pour la lui acheter. Ensuite, il envoie 50 dollars à la personne dont le nom est au sommet de la liste et raye ce nom. Enfin, il inscrit son nom en bas de la liste. A ce stade, il a déboursé 100 dollars, il peut faire une copie de la lettre et tenter de vendre les deux exemplaires à son tour. S'il y parvient, il récupère les 100 dollars déboursés, et si chacune des lettres se vend à son tour en deux exemplaires à chaque fois, au bout de 12 générations de ventes écoulées, son nom apparaîtra au sommet des 2048 lettres issues de celle qu'il a acheté ce qui

lui fait un gain potentiel de 102 400 dollars.

Dès 1977, Gastwirth étudie la répartition des gains d'une vente pyramidale pour une population fermée [4], avec des lois binomiale et de Poisson, il montre que même pour des valeurs faibles de population (n), la convergence vers les probabilités asymptotiques est très rapide. En 1984, il publie avec Bhattacharya [3], un article qui démontre que les ventes pyramidales ne respectent pas leurs promesses, ce qui permet de condamner juridiquement cette forme de duperie. Les prédictions annoncées dans ces chaînes de lettres reposent sur l'hypothèse que la lettre ne s'arrêtera jamais et donc que la population est infinie. En revanche, Gastwirth et Bhattacharya montrent pour une population fermée, la convergence vers des distributions usuelles comme la loi géométrique ou la loi normale. Tout au long du XXème siècle, les systèmes de Ponzi se multiplient. Ce sont des montages financiers qui reposent sur les mêmes mécanismes que les ventes pyramidales. En 2009, Artzrouni [5] modélise les systèmes de Ponzi avec des flux de capitaux entrants et sortants que l'on peut déterminer grâce à des équations différentielles linaires du premier ordre. Ensuite, il conclut sur les différentes formes d'effondrement en fonction des conditions d'évolutions du système. Utilisant le problème du « Cercle d'or » comme exemple de processus de branchement, Grinstead et Snell [1] proposent des résultats de simulations informatiques sur les générations dans le cas d'une probabilité de vente constante, ce qui suppose la population infinie, et les comparent aux résultats théoriques obtenus avec les processus de branchement dans le cas de convergence de la loi faible des grands nombres. En 1998, Vanarsdale étudie pour la première fois les aspects phénoménologiques et sociologiques [2] des chaînes de lettres. Il retrace en fonction de l'année les types de lettres : argent, chance, superstition, menaces, charité, humour et l'ampleur qu'elles ont eu.

Problématique retenue

Nous allons tenter de répondre aux questions suivantes sur la chaîne de lettre du « Cercle d'or » :

Quelle est la probabilité de récolter plus qu'un certain seuil ?

Quels sont les paramètres qui permettent de connaître l'espérance de gain d'un participant ?

Objectifs du TIPE

1) Proposer une simulation informatique pertinente pour une population fermée

2) Confronter les affichages des résultats pour identifier les données que l'on peut tirer du modèle et identifier les pistes d'améliorations

3) Appliquer les méthodes d'étude statistique des sources au cas particulier et confronter les résultats obtenus par les différentes analyses à ceux de la simulation

Abstract

Money chain letters and pyramid schemes have taken various forms since their beginnings in the 1920s. This work reviews several models : a computer simulation corresponding to the "Circle of Gold" letter that circulated in the US in 1978, a general study of Galton Watson processes, pyramid schemes and chain letters, and a continuous model of Ponzi schemes. Although the general

behavior follows a common pattern, constants are calculated in order to draw similarities and differences.

Références bibliographiques (phase 2)

- [1] GRINSTEAD, CHARLES MILLER ET SNELL, JAMES LAURIE : Introduction to probability : *American Mathematical Soc.*, 2012
- [2] VANARSDALE, DANIEL W. : Chain letter evolution : *Persion: 1998-12-03, 1998*
- [3] GASTWIRTH, JOSEPH L. ET BHATTACHARYA, P. K. : Two probability models of pyramid or chain letter schemes demonstrating that their promotional claims are unreliable : *Operations Research*, 1984, vol. 32, no 3, p. 527-536
- [4] GASTWIRTH, JOSEPH L : A probability model of a pyramid scheme : *The American Statistician*, 1977, vol. 31, no 2, p. 79-82
- [5] ARTZROUNI, MARC : The mathematics of Ponzi schemes : *Mathematical Social Sciences*, 2009, vol. 58, no 2, p. 190-201

DOT

- [1] Mars 2018 - Découverte des fonctions génératrices, lecture du chapitre correspondant dans "Grinstead and Snell's Introduction to Probability", découverte des processus de branchement et choix du sujet.
- [2] Mai-Juin 2018 - Première simulation informatique, erreurs d'indépendance entre les objets, codage de la simulation actuelle.
- [3] Septembre 2018 - Etude probabiliste générique sur les processus de branchement et les chaînes de lettres.
- [4] Décembre 2018 - Difficultés à télécharger la librairie Python Matplotlib, exploitation de la simulation et affichage des résultats statistiques avec des graphes Python Matplotlib et des graphes Excel.
- [5] Février 2019 - Abandon de l'étude de la thèse de Yinna Ye sur les processus de branchement au profit de celle de Marc Artzrouni sur les systèmes de Ponzi.
- [6] Avril 2019 - Etude des processus de Galton Watson et mise au point d'un algorithme Python de calcul formel des coefficients des itérés d'un polynôme avec à la librairie Sympy.