

Attention : Le rapport doit être réalisé par l'étudiant(e).

Si le rapport résulte d'une collaboration, elle doit être clairement annoncée.

NOM : <b>RADOUAN</b>	Prénoms : <b>YANYA</b>
Classe : <b>MP*</b>	
Lycée : <b>Lymed</b>	Numéro de candidat : <b>14243</b>
Ville : <b>TÉTOUAN - Maroc</b>	

Concours auxquels vous êtes admissible, dans la banque MP inter-ENS (les indiquer par une croix) :

ENS P.-Saclay	MP - Option MP	<input type="checkbox"/>	MP - Option MI	<input type="checkbox"/>
	Informatique MP	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>
ENS Lyon	MP - Option MP	<input type="checkbox"/>	MP - Option MI	<input type="checkbox"/>
	Informatique MP	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>
ENS Rennes	MP - Option MP	<input checked="" type="checkbox"/>	MP - Option MI	<input type="checkbox"/>
				<input type="checkbox"/>
ENS Paris	MP - Option P	<input type="checkbox"/>	MP - Option I	<input type="checkbox"/>
	Informatique MP	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>

Matière dominante du TIPE (la sélectionner d'une croix inscrite dans la case correspondante) :

Informatique	<input type="checkbox"/>	Mathématiques	<input type="checkbox"/>	Physique	<input checked="" type="checkbox"/>
--------------	--------------------------	---------------	--------------------------	----------	-------------------------------------

Titre du TIPE : **Estimation du rendement d'un dispositif de réfrigération magnétique à géométrie linéaire.**

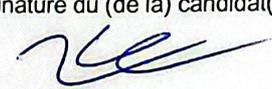
Nombre de pages (à indiquer dans les cases ci-dessous) :

Texte	<b>6</b>	Illustration	<b>3</b>	Bibliographie	<b>1</b>
-------	----------	--------------	----------	---------------	----------

Attention, les illustrations doivent figurer dans le corps du texte et non en fin du document !

Résumé ou descriptif succinct du TIPE (6 lignes, maximum) :

Le présent document s'intéresse à l'établissement d'un premier modèle théorique d'un dispositif de réfrigération magnétique afin d'en estimer le rendement, et ainsi conclure sur l'opportunité de la commercialisation de cette technologie.

A	Signature du professeur responsable de la classe préparatoire dans la discipline	Cachet de l'établissement
	Le <b>08/06/2023</b>	
	Signature du (de la) candidat(e)	
		

La signature du professeur responsable et le tampon de l'établissement ne sont pas indispensables pour les candidats libres (hors CPGE).

# Modélisation d'un dispositif de réfrigération magnétique à géométrie linéaire

## I. Introduction

L'effet magnétocalorique, découvert en 1881 par le physicien allemand Emil Warburg, consiste en un changement de température d'un matériau magnétique soumis à la variation d'un champ magnétique externe. Il sera exploité pour la première fois en 1993 par William Giauque et ses collaborateurs pour atteindre des températures au-dessus de 1K, réalisant ainsi un système de réfrigération magnétique.

Aujourd'hui, cette technologie peut offrir une alternative commerciale plus efficace énergétiquement aux systèmes de réfrigération usuels qui présentent des dangers écologiques (utilisation des fréons). Le présent document s'intéresse à l'établissement d'un modèle d'un dispositif de réfrigération magnétique et à l'estimation de son rendement et de sa viabilité pour des applications commerciales.

## II. L'effet magnétocalorique (EMC)

### 1. Principe qualitatif

Les molécules d'un matériau paramagnétique possèdent des moments magnétiques propres. À l'équilibre ces derniers sont « désordonnés » et leur disposition est aléatoire. En appliquant un champ magnétique extérieur, ces dipôles s'alignent avec ce dernier : leur « désordre » augmente.

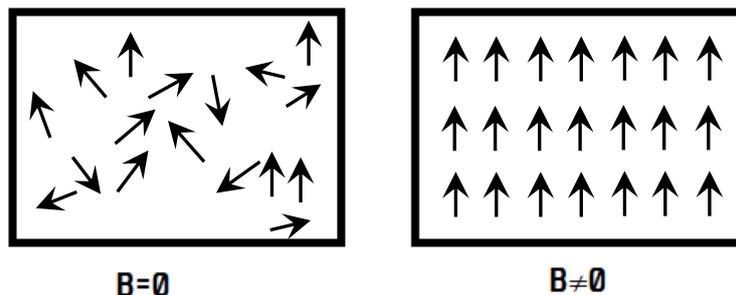


Figure 1: Les dipôles magnétiques avant et après l'application d'un champ magnétique

Formellement, en considérant que l'aimantation se fait d'une manière isentropique (adiabatique puisque suffisamment rapide et réversible), l'entropie totale du milieu (qui représente son désordre) augmente, ainsi pour compenser cette diminution du désordre magnétique, l'entropie moléculaire augmente, la thermodynamique permet de conclure que la température du matériau augmente par conséquent :  $dS = \frac{dU}{T} = \frac{cdT}{T}$

### 2. La relation de Maxwell

En appliquant le théorème de Schwarz à l'enthalpie libre à un système thermodynamique qui présente l'effet magnétocalorique, on trouve la relation de Maxwell suivante :

$$\left(\frac{\partial S_v}{\partial B}\right)_T = \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_B$$

Où  $S_v$  représente l'entropie volumique et  $M = \frac{d\mu}{dv}$  est l'aimantation du matériau.

Cette relation permet donc de relier le changement d'entropie (et donc de température) au champ magnétique extérieur appliqué :

$$\Delta S(T, \Delta B) = \int_0^{B_{max}} \left( \frac{\partial M}{\partial T} \right)_B dB$$

Qu'on peut discrétiser :

$$\Delta S = \sum_i \frac{M_{i+1} - M_i}{T_{i+1} - T_i} \Delta B_i$$

### 3. Les matériaux magnétocaloriques

En principe, l'EMC est une propriété de tous les matériaux magnétiques, toutefois son ampleur varie en fonction du matériau et de la température, présentant souvent un maximum à la température de Curie du matériau (c'est la température de passage du domaine ferromagnétique au domaine paramagnétique).

Dans le cadre de notre étude où on s'intéresse à des systèmes de climatisation/réfrigération commerciale (alimentaire ou autre). Les températures de fonctionnement seront proches des températures usuelles (298K).

Le seul élément simple qui présente un effet magnétocalorique dans ces conditions est le Gadolinium dont la température de Curie est de 292K.

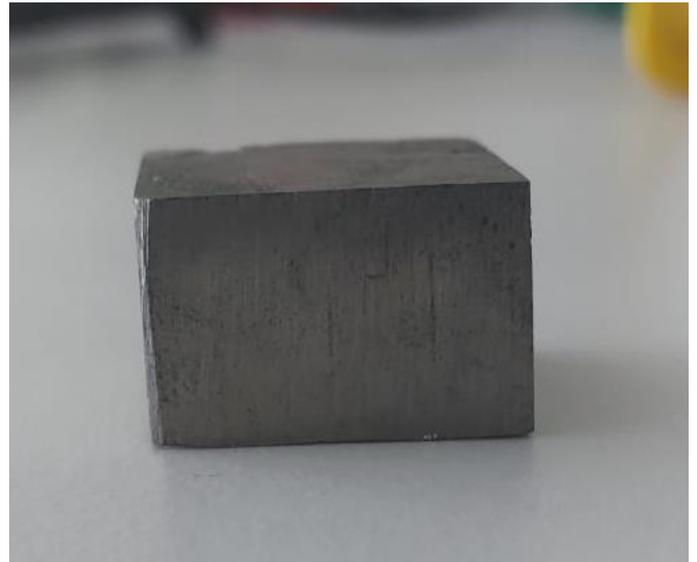


Figure 2: Un échantillon de Gadolinium

Il existe d'autres matériaux plus adaptés, comme des alliages du Gadolinium qui présentent de grandes valeurs de l'EMC et à température adaptée, toutefois ce sont toujours des prototypes auxquels on n'a pas pu avoir accès, l'étude se cerne donc à l'utilisation du Gadolinium dont on a pu nous procurer un échantillon.

## III. La réfrigération magnétique

### 1. Analogie avec la réfrigération classique

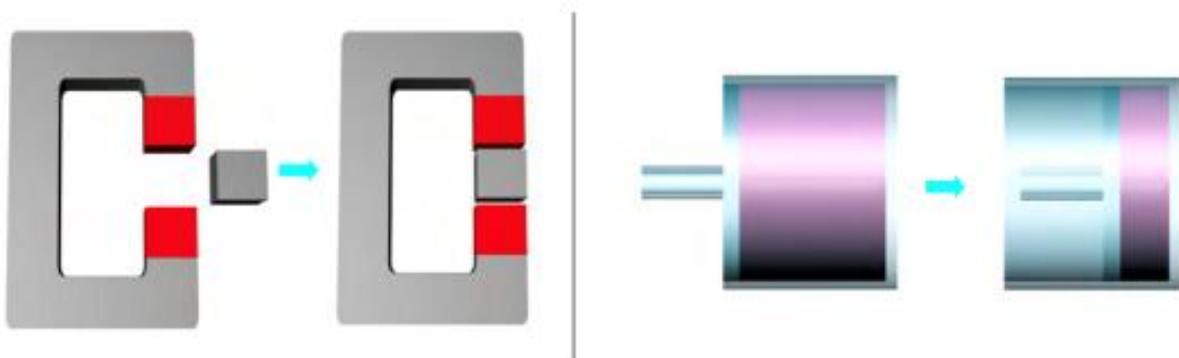


Figure 3: schéma du principe des deux modes de réfrigération, d'après [3]

Les machines thermiques à base de la réfrigération magnétiques utilisent le même principe d'échange que celles existantes, assurant l'échange thermique entre une source froide et une source chaude par biais d'un fluide caloporteur.

La différence est que l'étape de la compression/dilatation au sein du compresseur est remplacée par l'aimantation/désaimantation d'un matériau magnéto-calorique qui constitue le cœur du système.

## 2. Le cycle thermodynamique

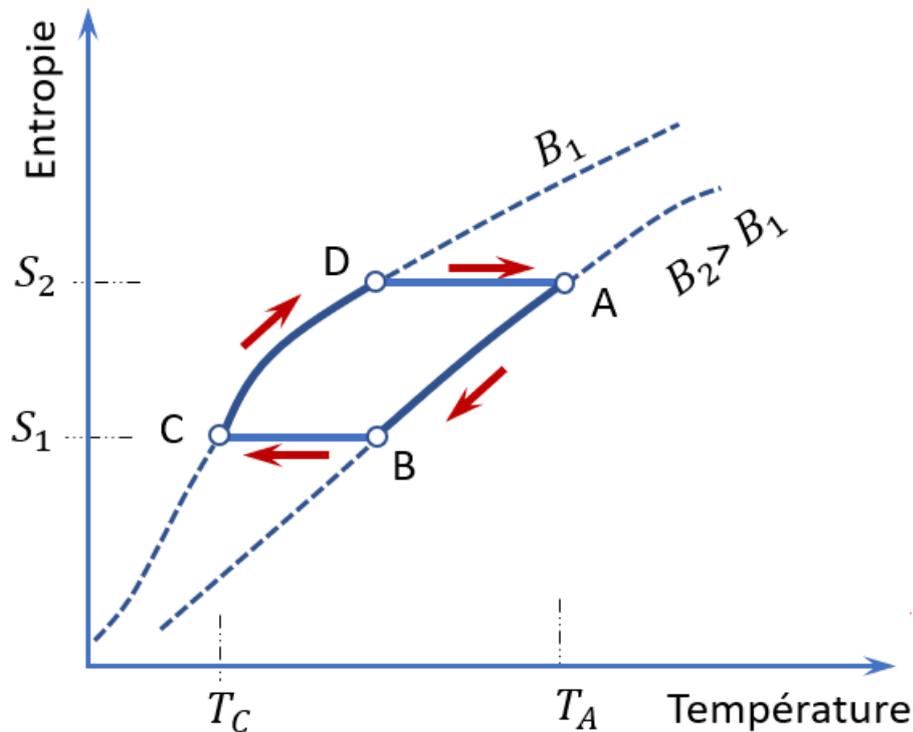


Figure 4: Le cycle thermodynamique représenté en diagramme (S,T)

Par analogie avec le cycle idéal de Carnot, Le cycle d'un système de réfrigération magnétique se décompose en deux processus adiabatiques (D-A, B-C) et deux processus isochamps (A-B, C-D), le tout étant réversible.

## IV. Détermination expérimentale de l'EMC et de l'aimantation

Dans le cadre de la modélisation qui va suivre, nous aurons besoin des valeurs numériques de l'EMC du gadolinium ainsi que de l'aimantation de l'aimant qu'on va utiliser comme source de champ magnétique pour réaliser nos calculs. On s'intéresse donc à la mesure expérimentale de ces grandeurs.

### 1. Détermination de l'aimantation d'un aimant permanent

#### a. Protocole expérimental

Un aimant de moment magnétique  $\vec{\mu}$  placé dans un champ  $\vec{B}$  subit un couple :  $\vec{\tau} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$ .

On a par définition :  $M = \frac{d\mu}{dV}$

Puis, en supposant l'aimantation et le champ uniformes, et en posant  $\theta = \langle \vec{B} | \vec{\mu} \rangle$ ,

On obtient :

$$\tau = MVB \sin \theta$$

Ensuite, on réalise un pendule simple avec notre aimant, le PFD (en négligeant l'effet de la pesanteur) donne :

$$J_{\Delta} \ddot{\theta} = MVB \sin \theta$$

Sous l'hypothèse des petites perturbations, l'écartement de l'aimant de son équilibre induit un mouvement oscillatoire de pulsation :  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{MVB}{J_{\Delta}}}$

#### b. Manipulation pratique

On utilise des bobines de Helmholtz pour fournir un champ magnétique quasi-uniforme. L'aimant pour lequel on mesure l'aimantation est celui qui sera utilisé par la suite.



Figure 6 : le dispositif expérimental

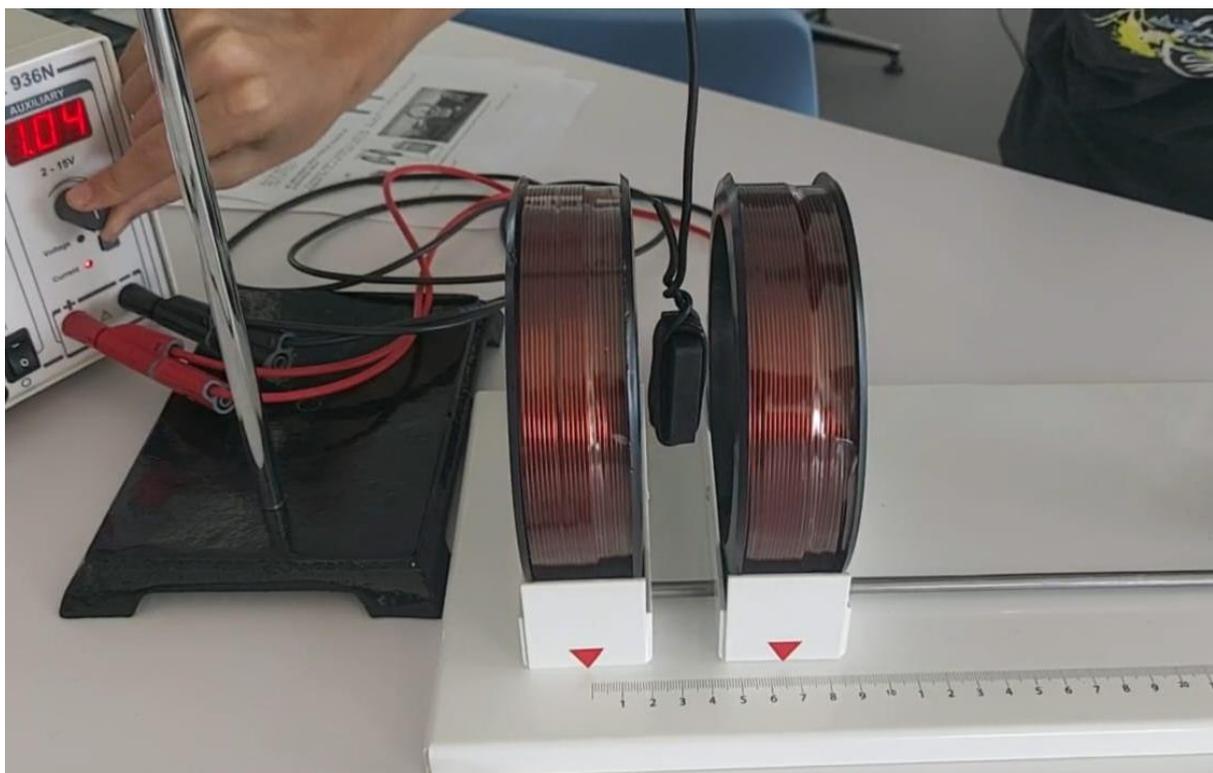


Figure 6: vue rapprochée du montage

Pour différentes valeurs du champ magnétique B (et donc du courant), on mesure la période d'oscillations.

c. Interprétation des résultats

On trace :  $\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = f(B)$  et on réalise une régression linéaire.

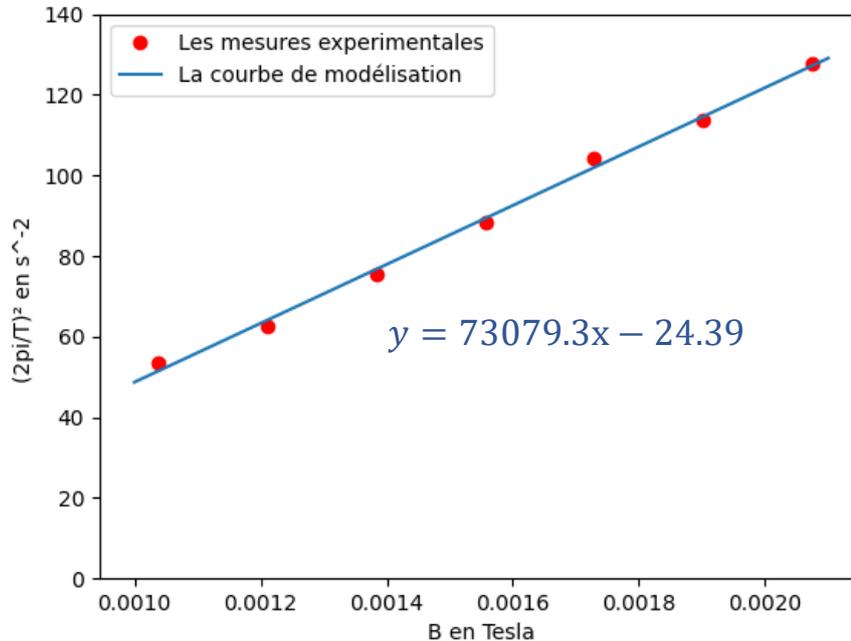


Figure 7:  $\omega^2=f(B)$

L'incertitude sur ces mesures vient principalement de :

- Incertitude sur la détermination de la période d'oscillations : les valeurs prises ont été moyennées sur 5 mesures de 5 périodes chacune, toutefois la mesure n'est pas précise et on estime une incertitude de  $\Delta T \approx 0,1s$
- Incertitudes sur la mesure de la masse de l'échantillon et ses dimensions (pour le calcul du moment d'inertie) :  $\Delta m \approx 0.1g$  et  $\Delta x \approx 0.5mm$  (la moitié d'une graduation)
- Incertitude sur la valeur du champ magnétique : d'après le Teslamètre :  $\Delta B \approx 0,1mT$

Ce qui donne une incertitude d'environ  $0,2 s^2$  sur les valeurs calculées.

On trouve finalement pour l'aimantation (d'après la pente) :  $M = (48,4 \pm 1,7) \cdot 10^4 A/m$

Cette valeur est raisonnable pour un aimant ferrite [4].

## 2. Détermination de l'EMC du Gadolinium

Pour ce faire, un champ magnétique est appliqué au Gadolinium et un thermocouple est utilisé pour mesurer le changement de la température.

Comme le champ magnétique qu'on a pu obtenir est faible (de l'ordre de 5mT), le changement de température est lui-même difficilement observable surtout en s'éloignant de la température de Curie.

Ceci est dû aux limitations imposées par le thermocouple (incertitude sur la mesure de 0.2K) et par la faible masse/volume de l'échantillon du Gadolinium disponible (67g) qui le rend susceptible au transfert thermique avec l'air ambiant. Nous avons donc contacté le professeur Mohammed Balli, un chercheur dans le domaine qui nous a fourni les valeurs pour un domaine étendu de température.

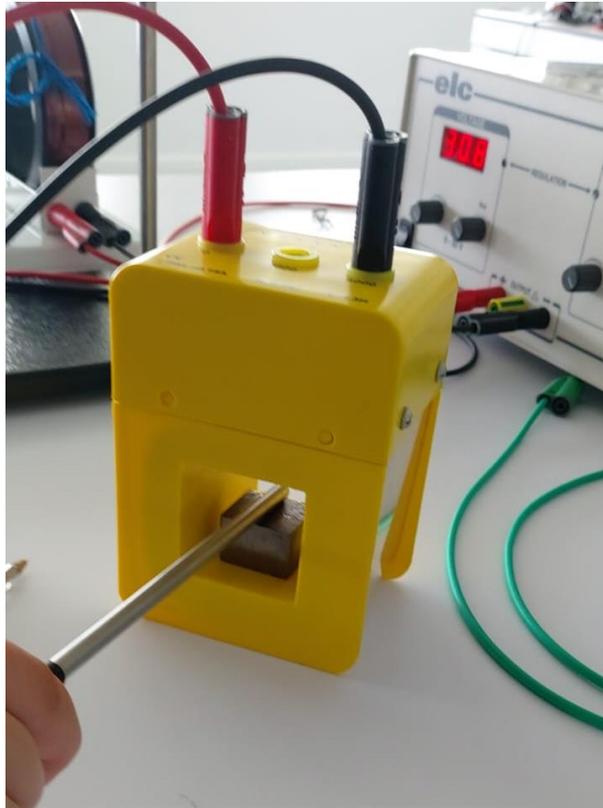


Figure 8: mesure du changement de température adiabatique du Gadolinium

Afin de pouvoir exploiter ces valeurs numériquement dans ce qui suit, on réalise une interpolation polynomiale au voisinage de la température de Curie où la courbe possède l'allure d'une parabole.

On obtient l'équation suivante :

$$y = -0.0132 x^2 + 7.836 x - 1154.5$$

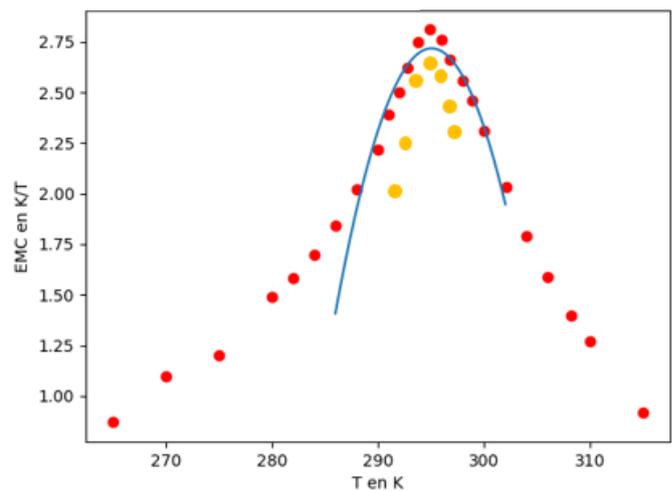


Figure 9: les mesures de l'EMC, en rouge les valeurs fournies par Mr Balli, en jaune les mesures que nous avons pu obtenir, en bleu la courbe d'interpolation.

## V. La modélisation du système

### 1. La mise en situation

Dans ce qui suit, nous allons chercher à estimer le rendement atteignable par un système de climatisation magnétique, ce choix (climatiseur) est fait afin de travailler au voisinage de la température de Curie du Gadolinium.

Ainsi, la température de la source chaude et de la source froide prises sont les valeurs standards suivantes, utilisées couramment en industrie pour calculer les performances d'un dispositif[5] :

$$T_f = 16^\circ\text{C} \quad \text{Et} \quad T_c = 26^\circ\text{C}$$

On cherche à calculer le coefficient de performance de notre système, défini par :

$$\eta = \frac{Q_f}{W}$$

Où  $Q_f$  est la quantité de chaleur reçue de la part de la source froide, et  $W$  est le travail consommé par le système.

Ensuite, on définit le rendement énergétique comme le rapport de ce dernier avec le coefficient de performance d'un cycle de Carnot idéal (qui représente le maximum théorique atteignable) :

$$r = \frac{\eta}{\eta_c} \quad \text{avec} \quad \eta_c = \frac{1}{1 - \frac{T_f}{T_c}}$$

## 2. Premier modèle : utilisation d'électro-aimant

L'utilisation des bobines supraconductrices n'est pas pratique pour des applications commercialisables puisque les ressources nécessaires pour assurer le refroidissement des bobines elles-mêmes sont importantes (financièrement et énergétiquement).

Ainsi, l'utilisation d'un électro-aimant impose nécessairement des pertes énergétiques dues à l'effet Joule, ce qui donnera un mauvais rendement pour le système comme nous allons le voir par la suite : nous allons prendre plusieurs hypothèses « généreuses » qui ont pour but d'augmenter le rendement calculé et ainsi d'en donner une majoration.

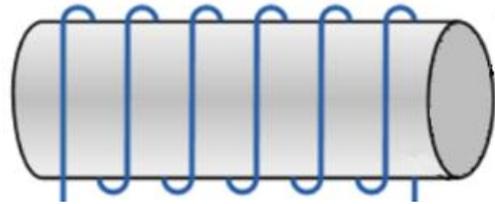


Figure 10: Le Cœur en gadolinium entouré des fils de la bobine, schéma de principe d'après Shutterstock

### a. Schéma du système

On envisage un système composé d'un solénoïde qui va jouer le rôle de l'aimant, qu'on enroule autour d'un cœur en Gadolinium (similairement à l'entrefer).

L'aimantation/désaimantation se fait ainsi en alimentant la bobine en courant.

On suppose que :

- L'inductance de la bobine est négligeable.
- Le travail de la pompe est négligeable (ainsi le travail du système est l'énergie dissipée par effet Joule)
- Le cycle du fluide frigorigène dure  $\Delta t = 1s$  (valeur irréalisable pratiquement, mais plus le cycle est court plus le rendement augmente comme on va le voir par la suite)

On va aussi négliger les phénomènes de transfert thermique et on va considérer que les thermalisations sont immédiates

### b. Calcul

Pour un solénoïde de rayon  $r$  et de  $n$  spires, on a :

$$B = nI\mu_0 \quad \text{et} \quad R = 2\pi\rho n \quad \text{où } \rho \text{ est la résistivité.}$$

$$\text{Puis :} \quad W_{\text{cycle}} = RI^2\Delta t = \frac{2\rho r\pi B^2}{n\mu_0}\Delta t$$

$$\text{Et :} \quad Q_{\text{cycle}} = c_p m B \cdot EMC(T, B)$$

où  $m$  et  $c_p$  sont respectivement la masse de l'échantillon du gadolinium et sa capacité calorifique massique.

On choisit ensuite les valeurs numériques suivantes :  $m=5\text{kg}$ ,  $n=5 \cdot 10^4$ ,  $r=0.25\text{m}$

L'échantillon en gadolinium étant exagéré, on peut donner une majoration du rendement, pendant que le rayon des spires est pris pour qu'on puisse avoir un cœur de même longueur et de moitié rayon (pour qu'on puisse considérer B uniforme).

Pour une bobine en cuivre (pour la valeur de la résistivité) et un champ de 1T, on obtient numériquement un rendement de 27%.

Cette valeur est faible par rapport aux climatiseurs courants, dont le rendement est entre 40% et 60%.

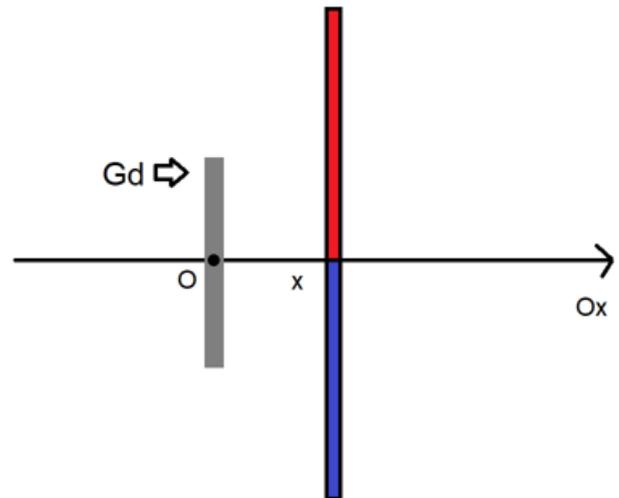


Figure 11: schéma du système, l'aimant est à la droite

### 3. Dispositif à aimant permanent

#### a. Le modèle

On utilise un seul aimant rectangulaire tel que :

$$\text{Pour } x = x_0 = 5\text{cm} : B_0 = 1\text{T}.$$

Le cœur en Gadolinium doit rester en contact avec l'échangeur, on déplace l'aimant.

On va négliger les frottements, et considérer le Gd désaimanté pour  $B < 0.05 B_0$  [3].

Le travail fourni par le moteur est le travail de la force magnétique [2].

On travaille dans le cadre de l'approximation dipolaire afin de pouvoir établir un modèle de connaissances pour le comportement de l'aimant, ainsi  $l \ll x$

La condition précédente donne :

$$\left(\frac{x_0}{x}\right)^3 < 0.05 \text{ Puis } x_f = 2,63\text{m}$$

Par analogie avec la force de Coulomb [8] :

$$F_{\text{magnétique}} = k q_{m1} q_{m2} \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+2l)^2} - \frac{2}{(x+l)^2} \right)$$

$$k = \frac{\mu_0}{4\pi} \quad q_m = \frac{\mu}{l} \text{ La « charge magnétique »}$$

Ensuite : 
$$W = \int_{x_0}^{x_f} \vec{F}_{\text{magnétique}} \cdot \vec{dx}$$

Pour le Gadolinium : 
$$q_{m2} = \frac{mVc_p \ln(\Delta T)}{l \cdot EMC(T,B)} \quad (\text{puisque } M = \frac{\mu}{V} \text{ et } EMC = \frac{M}{\Delta S} = \frac{M}{mc_p \ln(\Delta T)})$$

Le moment magnétique de l'aimant utilisé est déterminé expérimentalement, ce qui nous rend accessible sa « charge magnétique ».

Le travail devient alors :

$$W = \int_{x_0}^{x_f} \frac{\mu_0 m V c_p q_{\text{aimant}}}{4\pi l \cdot EMC(T(t))} \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+2l)^2} - \frac{2}{(x+l)^2} \right) dx$$

L'hypothèse sur la thermalisation permet d'écrire :

$$EMC(t_i) = EMC(T_c - B(x) EMC(t_{i-1}))$$

C'est la méthode d'Euler en considérant que :  $\frac{dT}{dx} = EMC(T, B) \frac{dB}{dx}$

Grâce à la formule polynomiale trouvée précédemment pour EMC, on peut calculer sa valeur entre  $T_f$  et  $T_c$ .

On intègre ensuite numériquement avec python et on obtient le résultat.

#### b. Résultats

On obtient une valeur de  $W_{cycle} = 628,3J$

Donc :  $\eta = \frac{Q_f}{W} = 1,06$

Soit un rendement de 53%, valeur comparable aux meilleurs dispositifs utilisés aujourd'hui.

## VI. Conclusion

Le modèle établi permet de donner une estimation (largement inférieure à celle atteignable par un système optimisé) du rendement d'un dispositif de réfrigération magnétique. On trouve une valeur élevée par rapport aux systèmes classiques ce qui montre que la technologie a un fort potentiel comme une solution écologique et efficace pour l'industrie du froid.

Cependant, le système présente encore plusieurs inconvénients :

- La technologie est encore trop chère, puisque les matériaux magnéto-caloriques le sont, ainsi le petit échantillon utilisé coûte environ 50€, et le cœur hypothétique considéré coûterait environs de 1000€.
- La valeur de  $x_f$  trouvée (2,6 m) impose un grand encombrement pour le système. En effet, la disposition linéaire n'est pas très adaptée puisqu'elle impose une grande marche pour l'aimant, des systèmes à cœur rotatif existent et sont envisageables pour remédier partiellement à ce problème.
- La grande variation des performances du Gadolinium selon sa température crée un système inflexible et incapable de s'adapter aux changements de températures du milieu extérieur : l'efficacité de notre climatiseur serait beaucoup plus faible pendant l'hiver par exemple.

## VII. Bibliographie

- [1] Balli, M., Mahmed, C., Duc, D., Nikkola, P., Sari, O., Hadorn, J. C., & Rahali, F. (2012). Le renouveau de la réfrigération magnétique. *Revue Générale du Froid*, 102(1121), 45-54.
- [2] Balli, M., Sari, O., Mahmed, C., Besson, Ch., Bonhote, Ph., Duc, D., & Forchelet, J. (2012). A pre-industrial magnetic cooling system for room temperature application. *Applied Energy*, 98, 556-561. <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2012.04.034>
- [3] Barman, B., & Petrou, A. (2019). Measuring the magnetization of a permanent magnet. *American Journal of Physics*, 87(4), 275-278. <https://doi.org/10.1119/1.5092452>
- [4] *Magnetic properties of ferrite magnets*. (s. d.). Consulté 1 juillet 2022, à l'adresse <https://www.magnetexpert.com/magnetic-properties-of-ferrite-magnets-i699>
- [5] Air, A. (s. d.). *What is the COP (Coefficient of Performance) in HVAC?* What Is the COP (Coefficient of Performance) in HVAC? Consulté 2 juillet 2022, à l'adresse <https://www.adams-air.com/houston/what-is-COP.php>

- [6] Nouvelle, L. (2004). *Réfrigération magnétique : Une alternative aux machines thermiques classiques*. <https://www.usinenouvelle.com/article/refrigeration-magnetique-une-alternative-aux-machines-thermiques-classiques.N1380937>
- [7] Thakar, Sarthak. M., Prajapati, R. P., & Solanki, D. C. (2017). Performance Analysis of a Domestic Refrigerator Using Various Alternative Refrigerant. *IOSR Journal of Mechanical and Civil Engineering*, 14(03), 92-103. <https://doi.org/10.9790/1684-14030192103>
- [8] *Magnetic field at a distance from a bar magnet*. (2012, février 20). <https://web.archive.org/web/20120220030524/http://instruct.tri-c.edu/fgram/web/Mdipole.htm>
- [9] *Super Aimants Europe. Aimants Néodyme (NdFeB) , les aimants les plus puissants*. (s. d.). Consulté 2 juillet 2022, à l'adresse <https://superaimants.fr/>

## VIII. Annexe

Démonstration de la relation de Maxwell:

Densité volumique d'énergie magnétique:  $e_p = \frac{dE_p}{dV} = -B \frac{dm}{dV} = -B \cdot M$

Le 1er principe en termes volumiques (phase incompressible):

$$du = \delta q + de_p = TdS_v - \frac{1}{\mu_0} BdB = TdS_v - MdB$$

Puis pour l'enthalpie libre:

$$dg = -S_v dT - MdB$$

Le théorème de Schwarz donne:  $\frac{\partial}{\partial B} \frac{\partial g}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} \frac{\partial g}{\partial B}$

Donc:  $\left(\frac{\partial S_v}{\partial B}\right)_T = \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_B$