

Circle Packing : de la distanciation sociale à la théorie des nombres.

La distanciation physique imposée dans les espaces fermés -à cause du COVID-19- est trop restrictive de l'espace exploité, elle affecte les business et les lieux d'enseignement et de travail, (incapables de garantir leurs capacités d'accueil habituelles); ce qui m'a incité à chercher comment optimiser l'espace soumis à cette contrainte.

L'optimisation d'une distanciation physique minimale de deux mètres dans un espace public doivent être une nécessité, sachant que c'est la seule alternative au confinement permettant à la fois les interactions sociales physiques et la prévention contre la propagation du COVID-19, ce virus menaçant la santé de tous.

Positionnement thématique (ETAPE 1)

MATHEMATIQUES (Mathématiques Appliquées), MATHEMATIQUES (Algèbre), MATHEMATIQUES (Géométrie).

Mots-clés (ETAPE 1)

Mots-Clés (en français)	Mots-Clés (en anglais)
<i>Distanciation sociale</i>	<i>Social distancing</i>
<i>Empilement de cercles</i>	<i>Circle packing</i>
<i>Empilement le plus dense</i>	<i>Densest packing</i>
<i>Graphe planaire</i>	<i>Planar graph</i>
<i>Cercles d'Apollonius</i>	<i>Apollonian gasket</i>

Bibliographie commentée

L'article [1] réduit la problématique d'optimisation de la distanciation physique en un problème géométrique d'empilement de cercles ou de sphères sans chevauchement, en introduisant les empilements carrés, cubiques et hexagonaux (également utilisés dans la modélisation des molécules en chimie) où l'on s'intéresse surtout à la "densité d'empilement".

Les documents [2] et [3] permettent une concrétisation de l'approche des empilements de cercles et délivrent des algorithmes qui en sont basés. Le document [2], comme premier abord, traite spécifiquement les classes de cours rectangulaires où les contraintes majeures sont les dimensions et l'amovibilité des chaises ; entre-temps, l'algorithme proposé en [3] est applicable dans n'importe quel espace et propose une solution faisable en vue des entrées (dimensions, positionnement d'éventuels obstacles, flux d'air ...).

Le sujet du "circle packing" est apparu dans l'ère des ordinateurs, mais a été inspiré par des domaines du cœur des mathématiques classiques. Un "circle packing" est une configuration de cercles ayant une forme ou motif spécifique de tangence, comme introduit par *William Thurston* en 1985.

Le livre [4], initialement publié en 2005, présente leur étude depuis les premières définitions jusqu'aux derniers théorèmes, calculs et applications. Le livre peut être apprécié pour l'attrance

visuelle des illustrations, l'élégance de la géométrie du cercle, les parties théoriques claires, les connexions profondes aux sujets classiques, ou pour les applications notables. L'empilement de cercles a un aspect expérimental et visuel unique dans les mathématiques pures que l'ouvrage exploite pour passer de tout début aux liens avec l'analyse complexe et les surfaces de *Riemann*. Ce livre comporte donc les outils fondamentaux pour le traitement de notre sujet. On s'intéressera plus particulièrement aux *chapitres 1 et 3*, dans lesquels sont introduites les définitions de bases des graphes planaires [isomorphes à] leurs "circle packings", ainsi qu'aux triangulations planaires, et transformations planaires, et où sont exhibées également des relations entre package de cercles et transformations conformes qui le rendent "plus intuitif". Au long de ces chapitres, plusieurs lemmes et théorèmes sont énoncés et prouvés: *théorèmes de Koebe*, de *He et Schramm*, de *Radim et Sullivan*, et la formule d'Euler reliant le nombre de faces, arêtes et sommets d'un graphe planaire, et finalement le *Théorème d'empilement de Cercles* ("The Circle Packing Theorem").

L'algorithme étudié dans le document de référence [5] montre une face plus tangible des notions vues précédemment concernant le "circle packing", sachant que ce dernier possède deux aspects, géométrique en rapport avec les rayons des cercles, et combinatoire en rapport avec le motif (*pattern*) des tangences encodé en un complexe abrégé. Le but de cet algorithme est donc de trouver ou calculer les rayons des cercles correspondant à ce complexe en entrée, connaissant les limites spatiales appropriées, et ce, en s'inspirant de la méthode itérative suggérée par *Thurston*. L'étude de l'algorithme, sa complexité, sa stabilité, son implémentation et son temps de parcours est clos par plusieurs exemples d'applications.

Le rôle que joue le "circle packing" dans la réponse à la problématique du sujet m'a poussé à m'y intéresser davantage, et plus précisément aux "Apollonian circle packings", qui est une construction classique consistant à inscrire fréquemment des cercles dans les interstices triangulaires de la configuration de *Descartes* de quatre cercles mutuellement tangents, comme traité dans l'article [6]. Notamment, si les quatre cercles originels ont une courbure entière, tous les cercles dans l'empilement auront une courbure entière; rendant ainsi les empilements "packings" intéressants du point de vue de la théorie des nombres. Plusieurs problèmes d'arithmétique requièrent de nouveaux outils sophistiqués pour les résoudre. La raison derrière cette difficulté est que l'étude des "Apollonian packings" se réduit à l'étude d'un sous groupe de $GL_4(\mathbb{Z})$ "*thin*" dans un sens bien précis dans l'article, et ce n'est que récemment et de manière très vague que les problèmes arithmétiques faisant intervenir les groupes "*thin*" ne sont devenus abordables. L'article nous rapporte donc les résultats connus à ce jour à propos des "Apollonian packings" et quelques théorèmes importants aidant à les obtenir.

Problématique retenue

Jusqu'à quelle mesure l'empilement de cercles "circle packing" pourrait être une solution optimale pour une distanciation physique efficace?

Et quelles en sont les extensions dans les autres domaines des mathématiques, outre la géométrie ?

Objectifs du TIPE

En traitant ce sujet, je vais essayer de:

-Trouver des méthodes optimales pour maximiser le nombre de personnes pouvant être réunies dans

un même espace en respectant la distanciation physique, se basant sur le "*circle packing*".

-Faire une étude théorique des "*circle packings*", démontrer le Théorème du circle packing et présenter quelques applications.

-Présenter quelques algorithmes utilisés dans l'empilement de cercles.

-Présenter les "*Apollonian circle packings*", et exhiber leur relation avec la théorie des nombres.

Références bibliographiques (ETAPE 1)

[1] PATRICK HONNER : The Math of Social Distancing Is a Lesson in Geometry :

<https://www.quantamagazine.org/the-math-of-social-distancing-is-a-lesson-in-geometry-20200713/>

[2] ANDRES IGLESIAS AND PATRICIA SUAREZ : An Optimisation Model for Designing Social Distancing Enhanced Physical Spaces : *2020 International Conference on Internet of Things and Intelligent Applications (ITIA)* | 978-1-7281-9301-4/20/\$31.00 ©2020 IEEE | DOI: 10.1109/ITIA50152.2020.9

[3] J. C. BORTOLETE · L. F. BUENO : A support tool for planning classrooms considering social distancing between students : http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2021/04/8343.html

[4] ASAF NACHMIAS : Planar Maps, Random Walks and Circle Packing : *Planar Maps, Random Walks and Circle Packing École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XLVIII - 2018 - Springer Open*

[5] CHARLES R. COLLINS , KENNETH STEPHENSON : A circle packing algorithm : 0925-7721/03/\$-2003 Elsevier Science B.V. doi:10.1016/S0925-7721(02)00099-8

[6] ELENA FUCHS : COUNTING PROBLEMS IN APOLLONIAN PACKINGS : *BULLETIN (New Series) OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY* Volume 50, Number 2, April 2013, Pages 229–266 S 0273-0979(2013)01401-0 Article electronically published on February 14, 2013

DOT

[1] Mars à septembre 2021: Recherche du sujet et des références sur l'empilement de cercles et ses applications.

[2] Novembre 2021: Étude des cas simples des empilements de cercles dans différentes figures planes : triangle, carré, rectangle, cercle...et écriture d'un code python qui donne des empilements de cercle d'une manière probabiliste.

[3] Décembre 2021: Étude théorique des empilements de cercles et recherche des preuves simples pour les théorèmes existant. Découverte du cercle d'Apollonius et écriture d'un code python qui permet de le tracer.

[4] Début février 2022: Étude théorique du cercle d'Apollonius et de ses différentes propriétés, notamment celles du groupe d'Apollonius.

[5] Février-Mars 2022: L'étude théorique du groupe d'Apollonius étant délicate, car elle présente des notions sur les "*thin group*" et la "*Topologie de Zariski*"(Densité au sens de Zariski...).Décision de présenter les propriétés du cercle d'Apollonius liées à la théorie des nombres

[6] Mars-Mai 2022: Étude d'un algorithme d'empilement de cercles dans une salle de classe, qui permet d'optimiser l'empilement, tout en respectant les règles de la distanciation sociale. Cet

algorithme présente une application pratique des empilements de cercles.