

Filière MP - ENS de Paris-Saclay, Lyon, Rennes et Paris - Session 2022
Page de garde du rapport de TIPE

NOM : <u>Baba</u>	Prénoms : <u>Zakaria</u>
Classe : <u>MP*3</u>	
Lycée : <u>Lyde x</u>	Numéro de candidat : <u>18462</u>
Ville : <u>Benguerir - Maroc</u>	

Concours auxquels vous êtes admissible, dans la banque MP Inter-ENS (les indiquer par une croix) :

ENS Cachan	MP - Option MP	☒	MP - Option MPI	
	Informatique			
ENS Lyon	MP - Option MP	☒	MP - Option MPI	
	Informatique - Option M		Informatique - Option P	
ENS Rennes	MP - Option MP	☒	MP - Option MPI	
	Informatique			
ENS Paris	MP - Option MP	☒	MP - Option MPI	
	Informatique			

Matière dominante du TIPE (la sélectionner d'une croix inscrite dans la case correspondante) :

Informatique	☒ Mathématiques	☐ Physique
--------------	---	-----------------------------------

Titre du TIPE :

Optimisation multicritère de la prise de décision

Nombre de pages (à indiquer dans les cases ci-dessous) :

Texte	<u>15</u>	Illustration	<u>7</u>	Bibliographie	<u>5</u>
-------	-----------	--------------	----------	---------------	----------

Attention, les illustrations doivent figurer dans le corps du texte et non en fin du document !

Résumé ou descriptif succinct du TIPE (6 lignes, maximum) :

Dans un problème de prise de décision il y a deux enjeux majeurs; Evaluer et agréger. Dans ce document on s'intéressera à la recherche d'un opérateur d'agrégation qui généralise la moyenne arithmétique pondérée dans les problèmes de prise de décision à critères dépendants.

A Benguerir

Le 16/06/2022

Signature du professeur responsable de la classe préparatoire dans la discipline

M-SAADATOU

Cachet de l'établissement



Signature du (de la) candidat(e)

[Handwritten signature of the candidate]

[Handwritten signature of the teacher]

La signature du professeur responsable et le tampon de l'établissement ne sont pas indispensables pour les candidats libres (hors CPGE).

Nomenclature

$ K $	Le cardinal de K
$a \vee b$	maximum de a et b
$a \wedge b$	minimum de a et b
A	L'ensemble des alternatives
N	L'ensemble des critères
S	L'ensemble des alternatives
x	est le vecteur $(x_1, \dots, x_n)$

Table des matières

1	La dependance entre critères	3
1.1	Correlation :	3
1.2	Substitution :	5
1.3	Algèbrisation de la dépendance : Indice de dépendance	5
1.4	Notion d'importance d'un critère	7
2	Determination de La mesure : Méthode MACBETH	7
3	Recherche de l'opérateur d'aggrégation	8
3.1	Positionnement problématique	8
3.2	Première approche d'étude de l'intégral de Choquet : Approche in-	
	tuitive	9
3.2.1	Définition de l'Integral de Choquet pour une mesure 2-additive	9
3.3	Approche axiomatique : Caracterisation de l'opérateur	9
3.3.1	Premières propriétés :	9
3.3.2	Propriété intéressante	10
3.3.3	Une dernière propriété	12
3.4	Théorème fondamental	12
3.5	Démonstration	12
4	Application : Prise de decision dans les urgences médicales	14
5	Conclusion	14

Rapport de TIPE

Optimisation multicritère de la prise de décision

Zakaria Baba, MP*3, 2020-2021

16 juin 2022

Résumé

Au service de l'humanité, la rigueur mathématique s'est avérée depuis longtemps le moyen indéniable de tri et de prise de décision. Dans le domaine scolaire, médical et économique, comparer des chiffres est toujours plus simple que comparer des situations. Le concept de "mesure" est né de la facilité de manipuler des données numériques.

Omniprésentes, les mathématiques se manifestent dans toute discipline. Cependant, leur utilisation se heurte à l'imprécision des raisonnements humains. "Une imprécision" que les mathématiques modernes ont pu surmonter grâce à la probabilité, la théorie du jeu et la logique floue ...

Dans un problème de prise de décision, il y a deux enjeux majeurs :

D'abord, il faut estimer l'importance des critères d'évaluation, c'est ce qu'on appellera "recherche de la mesure". Ensuite, il faudra agréger les informations concernant la performance d'une alternative pour estimer la performance globale de celle-ci, c'est ce qu'on appellera "recherche d'un opérateur d'agrégation".

Dans ce document, on s'intéressera à la "recherche d'un opérateur d'agrégation". En effet, la comparaison de deux alternatives se fait sur la base de leurs vecteurs de performance respectifs. Pour cela, il faut agréger les informations concernant les points forts et faibles pour décider globalement laquelle des alternatives est préférable.

L'objectif principal de ce document est de présenter l'intégrale de Choquet comme une extension appropriée de la moyenne arithmétique pondérée pour l'agrégation des critères.

Nous illustrons dans un premier temps l'interdépendance qui peut exister entre les critères d'un problème de prise de décision. Ensuite, on entamera la recherche d'un opérateur d'agrégation qui répond à des propriétés particulières. Nous réussissons ainsi à caractériser l'intégrale de Choquet. Une application de cette théorie est présentée à la fin du document

1 La dépendance entre critères

Il existe dans des situations de prise de décision une dépendance entre les critères ceci augmente la complexité du problème puisque la mesure utilisée (généralisation des "coefficients") ne peut plus être additive .

Pour illustrer cette dépendance nous présentons les situations suivantes :

1.1 Correlation :

Définition 1 *Corrélation positive :* Deux critères $i, j \in \mathbb{N}$ sont positivement corrélés si l'on peut observer une corrélation positive entre les scores partiels liés à i et ceux liés à j .

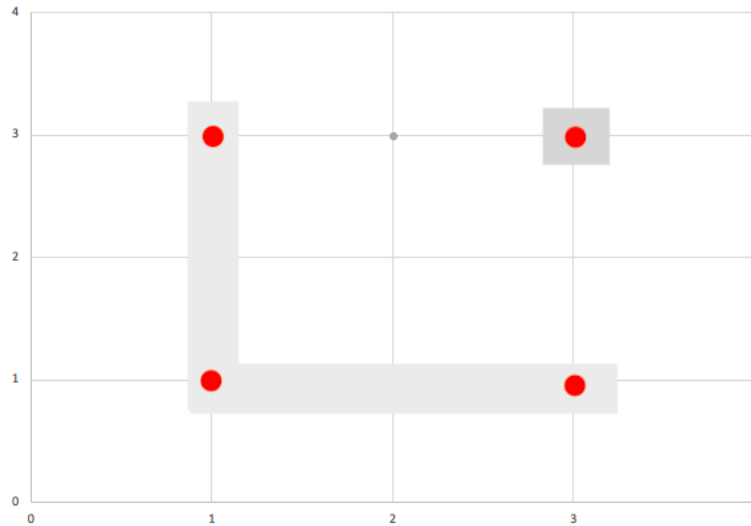


FIGURE 1 – Illustration du phénomène de corrélation positive

Exemple 1 *Corrélation positive : Vente de Produit*

On considère les deux critères suivants :

1. La qualité
2. Le prix

Une augmentation de la qualité entraîne généralement une augmentation du prix. Ses deux critères sont donc **positivement corrélés**

Définition 2 *Corrélation négative :* Deux critères i, j sont négativement corrélés si des scores partiels élevés pour i impliquent généralement des scores partiels faibles pour j , et vice versa

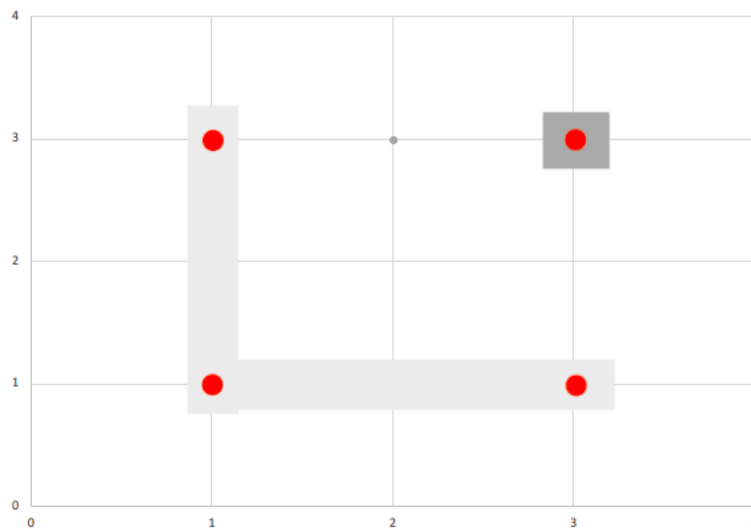


FIGURE 2 – Illustration du phénomène de corrélation positive

Exemple 2 *Corrélation positive : Vente de Produit*

On considère les deux critères suivants :

1. Le prix
2. L'attractivité du produit

En général l'augmentation du prix engendra nécessairement une diminution de l'attractivité du produit

1.2 Substitution :

Définition 3 *Substitution :* Daux critère se substituent lorsque la satisfaction d'un seul critère produit presque le même effet que la satisfaction des deux critères.

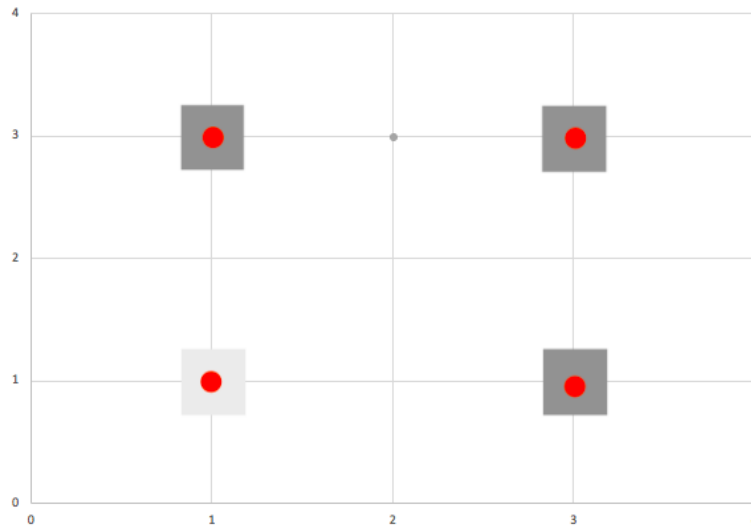


FIGURE 3 – Illustration du phénomène de Substitution

Exemple 3 *Correlation positive : L'octroi d'une bourse*

On considère les deux critères suivants :

1. *L'excellence en littérature*
2. *L'excellence en science*

L'excellence en littérature se sibtitue à l'excellence dans le domaine des sciences

1.3 Algèbrisation de la dépendence : Indice de dépendance

Pour algèbriser cette dependance donnant d'abord quelques définitions :

Définition 4 *Définition :* Un sous ensemble flou : Un sous ensemble flou F d'un ensemble X est décrit par seul la donnée de sa fonction f_F d'appartenance de X vers $[0,1]$ (voir Figure 4)

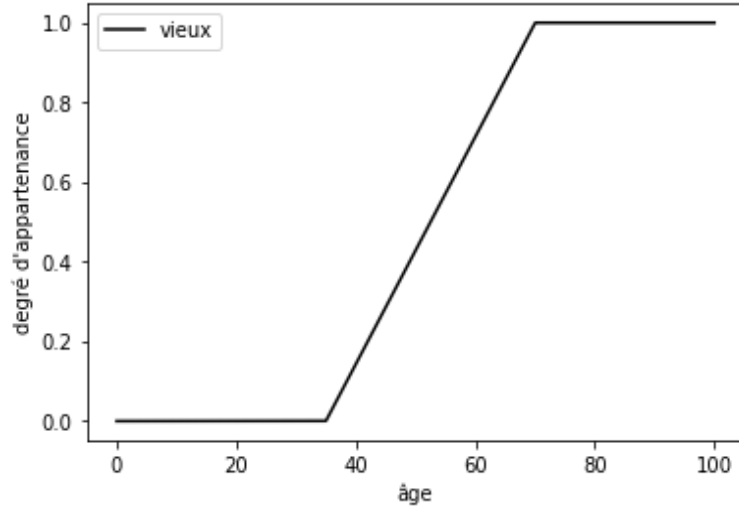


FIGURE 4 – Exemple de fonction caractéristique : L'ensemble vieux

Définition 5 Une mesure : Une mesure floue d'ensemble flou sur N μ est une fonction de $\tilde{P}(N) \rightarrow [0, 1]$ vérifiant les axiomes suivants :

1. $\mu(\emptyset) = 0, \mu(N) = 1$
2. $f_A(i) > f_B(i)$ pour tout $i \in N$ implique $\mu(A) > \mu(B)$ pour $A, B \in \tilde{P}(N)$

Cette mesure représente le poids d'un sous ensemble de critères

Intuitivement On peut imaginer que le degré de dépendance entre deux critères se mesure par la relation suivante :

$$I_{i,j} = \mu(i, j) - \mu(i) - \mu(j)$$

Pour une mesure additive $I_{i,j} = 0$ sinon ceci signifie qu'il existe une interaction entre les critères.

La généralisation de cette relation est la suivante :

Définition 6 Indice de dépendance entre deux critères : Soit μ une mesure floue sur N . L'indice de dépendance de deux critères i et j est le suivant :

$$I_{i,j} = \sum_{K \subset N - \{i,j\}} \frac{(n - |K| - 2)! |K|!}{(n - 1)!} (\mu(K \cup \{i, j\}) - \mu(K \cup \{i\}) - \mu(K \cup \{j\}))$$

Définition 7 *Indice de dépendance d'une partie : Soit μ une mesure floue sur N . L'indice de dépendance de la partie A de N est :*

$$I_A = \sum_{K \subset N-A} \frac{(n - |K| - |A|)! |K|!}{(n - |A| + 1)!} \sum_{C \subset A} (-1)^{|C-A|} \mu(C \cup K)$$

1.4 Notion d'importance d'un critère

Remarque 1 1. Remarquer que l'importance d'un critère i ne se limite pas à $\mu(i)$ mais aussi de tous les $\mu(K)$ où $i \in K$

Exemple 4 Il est possible qu'un critère i soit à lui seul insignifiant mais il peut arriver que pour de nombreux sous-ensembles $T \subset N$, $\mu(T \cup i)$ soit bien supérieur à $\mu(T)$, suggérant que i est effectivement un élément important dans la décision.

Définition 8 *L'indice d'importance*

$$\phi(\mu, i) = \sum_{T \ni i} \frac{a(T)}{|T|}$$

2 Détermination de La mesure : Méthode MACBETH

La détermination de la mesure est l'algebrisation des souhaits du décideur . N'étant toujours pas un spécialiste de Math la détermination de la mesure passe donc par des méthodes de recolte d'information comme la méthode MACBETH.

Extrait du guide d'utilisateur :

"MACBETH est une méthodologie d'aide à la prise de décision qui permet l'évaluation d'options compte tenu de critères multiples. La distinction fondamentale entre MACBETH et d'autres méthodes d'Analyse de la Décision' avec critères multiples est qu'elle nécessite seulement des jugements qualitatifs concernant les différences d'attractivité entre éléments pour générer des cotes pour les options sur chaque critère et pour pondérer les critères. Sept catégories sémantiques de différence d'attractivité sont introduites dans MACBETH : différence d'attractivité nulle, très faible, faible, modérée, forte, très forte et extrême. Ceci est à l'origine du nom MACBETH : Measuring Attractiveness by a Categorical Based Evaluation TecHnique (Mesurer l'attractivité par une technique d'évaluation basée sur des catégories)."

3 Recherche de l'opérateur d'agrégation

3.1 Positionnement problématique

On a bien prouvé dans la section précédente la nécessité d'établir une mesure non additive afin de prendre en compte les différentes dépendances qui puissent exister entre les critères .

Mais jusqu'alors, le seul opérateur capable d'agréger les scores partiels d'une alternative $a \in A$ est la moyenne arithmétique classique .

Nous présenterons dans la suite des approches différentes pour caractériser **L'intégral de Choquet** comme le substitut adéquat de **la moyenne arithmétique classique**

Nous rappelons le procédé de prise de décision (présenté en introduction du document)

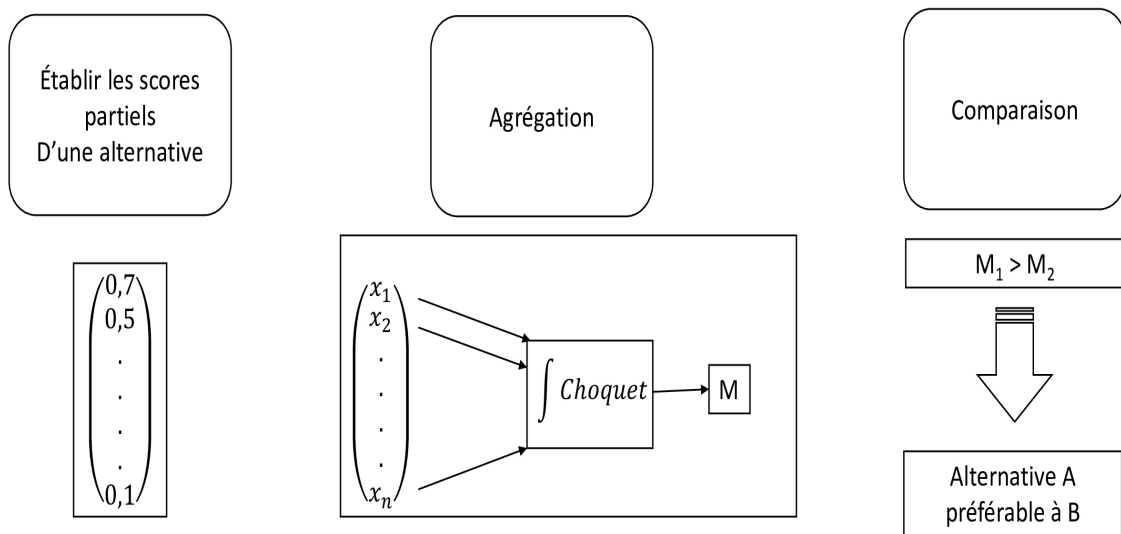


FIGURE 5 – Principe de la prise de décision

3.2 Première approche d'étude de l'intégral de Choquet : Approche intuitive

3.2.1 Définition de l'Intégral de Choquet pour une mesure 2-additive

Définition 9 On définit pour une mesure 2-additive l'intégral de Choquet par :

$$C_\mu(t_1, \dots, t_n) = \sum_{I_{i,j} > 0} (t_i \wedge t_j) I_{i,j} + \sum_{I_{i,j} < 0} (t_i \wedge t_j) |I_{i,j}| + \sum_{i=0}^n t_i \left(v_i - \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} |I_{i,j}| \right)$$

sachant que $(v_i - \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} |I_{i,j}|) \geq 0$

Remarque 2 Que représente chaque bloc de la somme ?

1. Pour $I_{i,j} \geq 0$: La satisfaction des deux critères est significative on utilisera donc l'opérateur min
2. Pour $I_{i,j} \leq 0$: La satisfaction des deux critères produit le même effet, on se substitue on choisit donc l'opérateur max
3. La troisième somme est la partie linéaire de l'intégral

Remarque que cet opérateur s'approche de la moyenne lorsque la mesure devient additive si $I_{i,j} = 0$ alors :

$$C_\mu(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=0}^n t_i v_i$$

3.3 Approche axiomatique : Caractérisation de l'opérateur

3.3.1 Premières propriétés :

Propriété 1 la monotonie **In** :

$$\forall (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n, x'_i) : x'_i > x_i \implies M(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n) > M(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

Propriété 2 L'indempotence

soit $x \in [0, 1]$:

$$f(x, \dots, x) = x$$

Propriété 3 *Stabilité par variation d'échelle **SPL***

$\forall x = (x_i)_{i \in \{1, \dots, n\}} \in A$ et $r = (r_i)_{i \in \{1, \dots, n\}} \in \mathbb{R}$ et $s = (s_i)_{i \in \{1, \dots, n\}} \in \mathbb{R}$:

$$M(r_1 x_1 + s_1, \dots, r_n x_n + s_n) = R(r, s)M(x) + S(r, s)$$

Propriété 4 *Stabilité par variation d'échelle (transformation linéaire) **SPL** :*

$\forall x = (x_i)_{i \in \{1, \dots, n\}} \in A$ et $r > 0$ et $s \in \mathbb{R}$:

$$M(rx_1 + s, \dots, rx_n + s) = rM(x) + s$$

Remarque 3 *Pourquoi la propriété SPL est-elle nécessaire ?*

La stabilité par variation d'échelle prend en considération la différence d'échelle d'expression de la satisfaction d'un décideur à un autre.

3.3.2 Propriété intéressante

On cherche un opérateur qui s'approche de la linéarité à fur et à mesure que notre mesure tend à être additive. Cette propriété est d'abord d'intérêt simplificateur : L'opérateur généralise la moyenne arithmétique pondérée en ce sens qu'il s'identifie à cette dernière dès que μ est additif.

Nous allons tenter d'algébriser ce point en s'aidant d'un outil d'Algèbre Général à savoir **La transformée de Mobius**. Soit μ notre mesure sur N :

μ s'écrit pour tout $S \subseteq N$:

$$\mu(S) = \sum_{T \subseteq S} a(T)$$

Avec :

$$a(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S|-|T|} \mu(T)$$

Remarque 4 Remarquer que pour $S=\{i,j\}$ On a :

$$a(\{i, j\}) = \mu(i, j) - \mu(i) - \mu(j)$$

Ça vous rappelle quelque chose ? Oui, il s'agit du critère d'interaction entre deux critères i, j

Remarquer aussi que si v est additive $a(S) = 0$ et l'opérateur le plus adéquat à ce moment là serait :

$$M_v = \sum_{i \in N} a(i) x_i \quad (1)$$

Pour construire notre opérateur supposé (1) est le premier ordre de dépendance puis élever l'ordre .

$$M_v(x) = \sum_{i \in N} a(i) x_i + \sum_{i, j \in N} a(\{i, j\})(x_i \wedge x_j) + \dots$$

L'opérateur peut aussi s'écrire :

$$M_v(x) = \sum_{T \subseteq N} a(T) \bigwedge_{i \in T} x_i \quad (2)$$

Ceci n'est d'autre que notre fameux **Intégral de Choquet**

La propriété du comportement additive par respect de l'additivité de la mesure s'algebrise comme suit :

Propriété 5 propriété **LM** :

On dit q'un opérateur s'approche de la linéarité par respect de l'additivité de l'opérateur s'il existe 2^N fonction noté f_T :

$$M_v = \sum_{T \subseteq A} v(T) f_T$$

Par la transformation de Möbius on peut écrire :

$$M_v = \sum_{T \subseteq A} a(T) g_T$$

g_T peut être considérée comme la restriction de M_v sur T

Remarque 5 Dans la relation (2) il s'agit bien d'un opérateur qui vérifie **LM** et pour lequel $g_T = \bigwedge_{i \in T}$

3.3.3 Une dernière propriété

On pose $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix}$ $\leftarrow i_{me}$ position le vecteur qui performe le mieux dans le

critère i

En general encore :

$$e_S = \sum_{i \in S} e_i$$

Propriété 6 *PW* On dit que l'opérateur vérifie ***PW*** si $\forall S \in N$:

$$M_\mu(e_S) = \mu(e_S)$$

3.4 Théorème fondamental

Le théorème suivant est une caractérisation de l'intégral de Choquet :

Théorème 1 *Théorème fondamental*

Un opérateur satisfait ***LM, IN, SPL, PW*** ssi $M_\mu = C_\mu$ pour toute mesure μ sur N .

Avec C_μ est l'intégrale de Choquet associé à la mesure μ

$$C_v = \sum_{i=1}^n x_{(i)} [v(A_{(i)}) - v(A_{(i+1)})]$$

3.5 Démonstration

On s'aidera d'abord de ce premier lemme

Lemme 1 Pour toute mesure binaire i.e. $\forall S \subseteq N$ on a :

$$C_v(x) = \bigvee_{T \subseteq N} \bigwedge_{i \in T} x_i$$

Lemme 2 Soit $M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est un opérateur qui vérifie *In, SPL* et tel que $M(e_S) \in [0, 1] \forall S \subseteq N$ alors il existe μ une mesure binaire tel que $M = C_\mu$

démonstration 1 *lemme 2* Soit $x \in [0, 1]^n$

$$M(x) \geq M((\bigwedge_{i \in T} x_i) e_T) = \mu(T) \bigwedge_{i \in T} x_i$$

et donc :

$$M(x) \geq \bigvee_{T \subseteq N} \mu(T) (\bigwedge_{i \in T} x_i)$$

d'autre part, si $Q \subseteq N$ telque :

$$\mu(Q) \bigwedge_{i \in Q} x_i = \bigvee_{T \subseteq N} \mu(T) (\bigwedge_{i \in T} x_i)$$

Alors on pose :

$$J = \{j \in N / x_j \leq \mu(Q) \bigwedge_{i \in Q} x_i\}$$

Cette ensemble est evidement non vide

On a $\mu(N - J) = 0$ car sinon :

$$\mu(N - J) \bigwedge_{i \in N - J} x_i \geq \mu(Q) \bigwedge_{i \in Q} x_i$$

D'où :

$$M(x) \leq M(\mu(Q) \bigwedge_{i \in Q} x_i) e_Q + e_{N-Q}$$

$$M(x) = \mu(Q) \bigwedge_{i \in Q} x_i + (1 - \mu(Q) \bigwedge_{i \in Q} x_i) \mu(N - J)$$

donc

$$M(x) = \mu(Q) \bigwedge_{i \in Q} x_i$$

d'où :

$$M(x) = \bigvee_{T \subseteq N} \bigwedge_{i \in T} x_i$$

Le lemme 1 nous permet de conclure

démonstration 2 *théoreme* On la décomposition **LM** :

$$M_v = \sum_{T \subseteq A} a(T) g_T$$

Le lemme 2 appliqué à g_T donne bien le resultat .

4 Application : Prise de décision dans les urgences médicales

Une application que j’ai proposé de ce résultat est relative à la gestion des urgences en créant un service de pré-urgence dont le but sera d’assurer une meilleure prise en charge au niveau des services d’urgence par le biais d’une interface homme machine qui va permettre de trier les patients selon leur état de gravité et donc privilégier les cas les plus critiques d’entre eux. Le choix de ces patients sera basé sur des critères fiables, communiqués par un spécialiste du domaine et simplifiés par la méthode Macbeth qui se base sur la collecte des informations nécessaires pour la prise d’une telle décision .

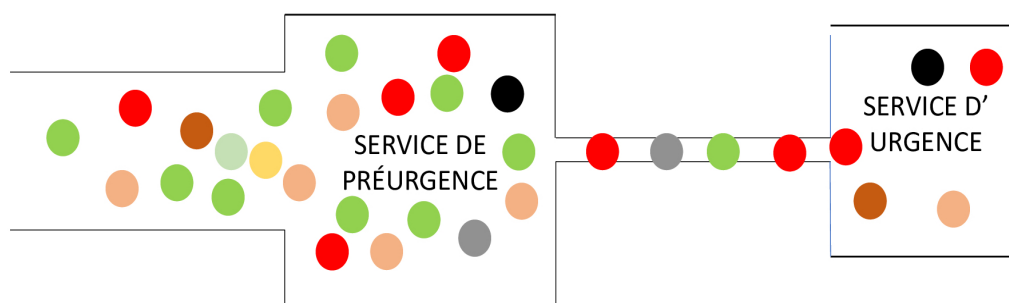


FIGURE 6 – Principe de filtrage

5 Conclusion

L’optimisation de la prise de décision est un outil prometteur dans plusieurs domaines. Il se présente comme substitut de l’aléatoire. Cependant, l’efficacité de notre prise de décision est fortement liée à la précision de la mesure qui dépendra du décideur. Il existe plusieurs méthodes qui permettent de récolter le plus d’informations possibles afin d’établir une mesure précise (Méthode M-Macbeth,) et qui combinent les mathématiques à d’autres domaines (psychologie, sociologie ...). Ce domaine manque, d’après la littérature, à l’utilisation pratique. Une question se pose : Dans un monde en perpétuelle innovation, les mathématiques ont réussi à envahir pleinement tous les domaines. Au cœur de cette monopolisation, vous ne vous demandez pas si les mathématiques pouvaient répondre à toutes nos questions jusque-là sans réponses ?

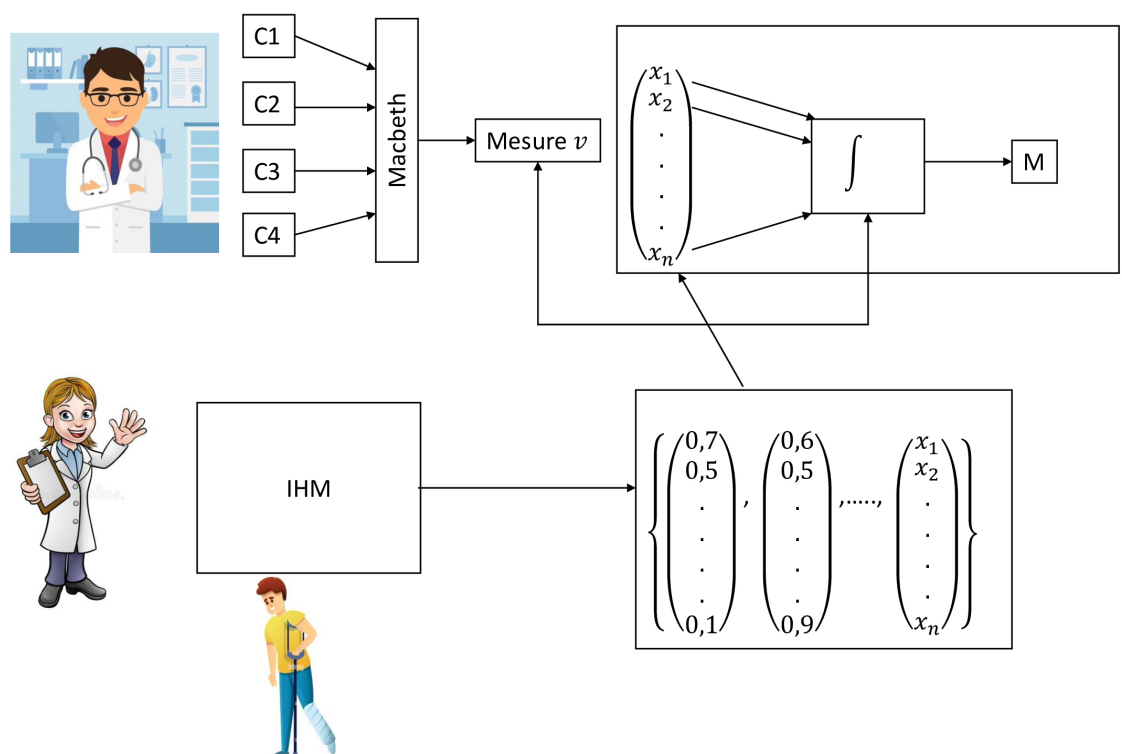


FIGURE 7 – Principe de filtrage