

Survie des plongeurs et prévention de l'hypothermie grâce aux métamatériaux

Boumelki Ziyad - 18415

Juin 2022

- 1 Motivation (3-5)
- 2 Problématique (6)
- 3 Modèle physique (7-9)
- 4 Equations et grandeurs (10-15)
- 5 Estimation (16)
- 6 Le Cloak (17-23)
- 7 Réponse à la problématique (24-26)
- 8 Annexe (27-30)



Figure: 1



Figure: 2

- La plongée scientifique est un domaine majeur pour l'étude des espèces marines et leurs propriétés.
- Les plongeurs courent le risque de l'hypothermie, qui menace leur santé et ralentit les recherches.

Motivation

- La conductivité thermique de l'eau est 25 fois plus importante que celle de l'air.
- Donc le risque est plus grand pour les plongeurs que pour les alpinistes (par exemple).

Intérêt de l'étude :



Figure: 3 - Laurent Ballesta, plongeur et photographe français.

Sous l'eau de l'antarctique, plus de 9000 espèces ont été décrites, contre moins de 10 en surface.

Motivation

- Garantir la sécurité des plongeurs-chercheurs est un prérequis pour développer les sciences marines (biologie marine, océanographie, ...)

Métamatériau (Définition) :

Matériau composite artificiel qui présente des propriétés électromagnétiques qu'on ne retrouve pas dans un matériau naturel.

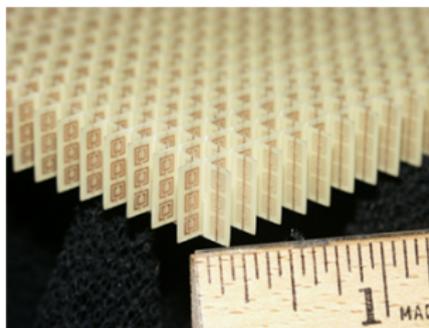


Figure: 4

Estimer, selon un modèle bien choisi, la durée de survie des plongeurs avant d'atteindre l'hypothermie, et l'augmenter grâce aux métamatériaux.

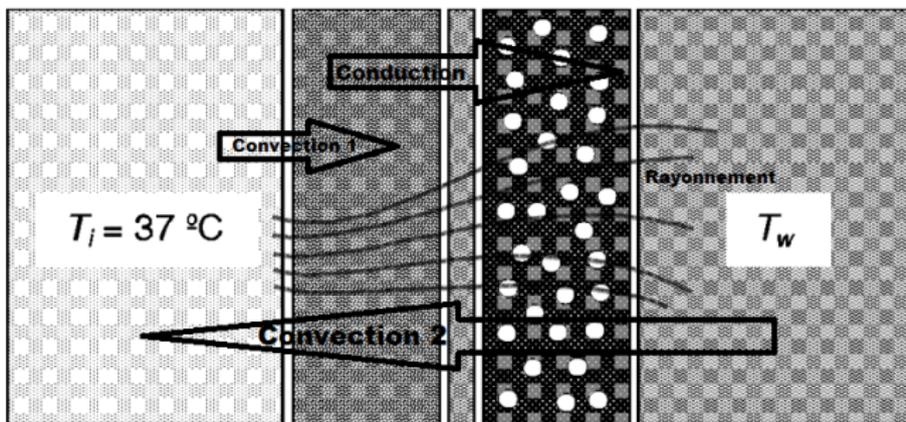


Figure: 5 - Article : *Heat loss and hypothermia in free diving*,

- Modèle physique du système Plongeur+Combinaison+Eau de mer

Description :

- L'intérieur du corps et l'eau de mer sont séparés par 3 couches protectrices :
 - ① **Le derme** : tissu formant la peau avec l'épiderme.
 - ② **Une fine couche d'eau** : intercalée entre le derme et la combinaison de plongée.
 - ③ **La combinaison** : vêtement isothermique fabriqué à partir de *néoprène* soufflé à l'azote.
- Le gradient de température est la cause de transferts thermiques.
- Pour décrire ces transferts, je fais appel aux équations de la thermodynamique phénoménologique.

- Le problème étudié est complexe, ainsi le modèle néglige certains aspects des échanges thermiques qui ont lieu :
 - ① La réponse physiologique aux échanges thermiques diffère d'un individu à un autre.
 - ② Les réactions physicochimiques qui ont lieu au niveau du derme et de la combinaison sont très complexes.
 - ③ La transpiration et la convection 2 sont disjoints.

- Pour un transfert conductif, la loi de Fourier fournit que :

$$\vec{j} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T) \implies \Phi_{cond} = \lambda \frac{\Delta T_{cond}}{\Delta x} S \quad (1)$$

- Pour un transfert conducto-convectif, la loi de Newton fournit que :

$$\Phi_{conv} = hS(T_{solide} - T_{fluide}) = hS\Delta T_{conv} \quad (2)$$

- Les résistances thermiques correspondantes sont :

$$\begin{cases} R_{cond} = \frac{\Delta x}{\lambda S} \\ R_{conv} = \frac{1}{hS} \end{cases} \quad (3)$$

- Pour estimer le flux radiatif, j'utilise la loi de Stefan-Boltzmann :

$$M = \frac{\Phi}{S} = \varepsilon\sigma T^4 \implies \Phi_{rad} = \Phi_{r,int} - \Phi_{r,ext} = S\varepsilon\sigma(T_{int}^4 - T_{ext}^4) \quad (4)$$

- De plus, on a $\frac{\Delta T}{T} \approx \frac{37-0}{37+273} \approx 0.1 \ll 1$. Un développement limité en $\frac{\Delta T}{T}$ donne :

$$\Phi_{rad} = 4S\varepsilon\sigma T_{ext}^3(T_{int} - T_{ext}) = 4S\varepsilon\sigma T_{ext}^3\Delta T \quad (5)$$

- Le flux est linéaire en la différence de température, je peux alors définir la résistance thermique de rayonnement :

$$R_{rad} = \frac{1}{4S\varepsilon\sigma T_w^3} \quad (6)$$

Intérêt d'introduire des résistances thermiques :

- L'étude s'effectue dans un milieu inhomogène, formé de différentes couches, et impliquant plusieurs mécanismes de transfert thermique.
- Pour calculer la résistance équivalente, il faut voir comment toutes ces couches contribuent à la résistance thermique globale.

- J'obtiens le schéma équivalent suivant :

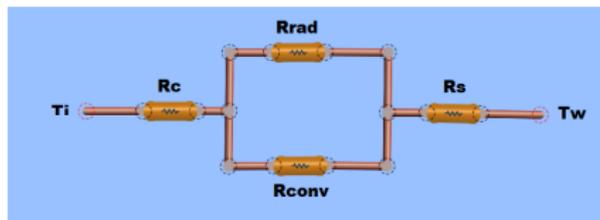


Figure: 6

- Où R_c et R_s sont respectivement les résistances générées par le corps du plongeur et par la combinaison.
- D'où :

$$R_e = R_c + \frac{R_{rad}R_{conv}}{R_{rad} + R_{conv}} + R_s \quad (7)$$

- Par suite, le flux de chaleur total transféré du corps du plongeur vers l'eau de mer est :

$$\Phi_{trans} = \frac{T_i - T_w}{R_e} \quad (8)$$

- Soit q le flux de chaleur total produit par le plongeur, on a :

$$\begin{aligned}\delta Q_{int} + \delta W &= dU \iff \Phi_{int} dt = dU \iff q - \Phi_{trans} = \frac{dU}{dt} \\ \iff q - \frac{T_i - T_w}{R_e} &= C_i M \frac{dT_i}{dt}\end{aligned}\quad (9)$$

- Je prends pour valeurs typiques :

- ① $q = 120 \text{ W.s}^{-1}$
- ② $M = 75 \text{ Kg}$
- ③ $C_i = 3469,4 \text{ J.K}^{-1}.\text{Kg}^{-1}$

- Et comme condition initiale, $T_{i0} = 37^\circ\text{C}$. Je résous l'équation différentielle :

$$T_i(t) = qR_e + T_w - (qR_e + T_w - T_{i0}) \exp\left[-\frac{t}{C_i MR_e}\right] \quad (10)$$

- J'en déduis le temps de plongée nécessaire pour atteindre la température T_i :

$$t_{T_i}(T_w) = C_i M R_e \ln \left(\frac{q R_e + T_w - T_{i0}}{q R_e + T_w - T_i} \right) \quad (11)$$

- Pour calculer R_e , je dispose des valeurs :

- 1 $\varepsilon = 0,97$
- 2 $S = 2 \text{ m}^2$
- 3 $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-4}$
- 4 $h = 10 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$
- 5 $\lambda = 44 \times 10^{-3} \text{ W; m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
- 6 $R_c = 0,03 \text{ K.W}^{-1}$

- L'hypothermie est atteinte à 35°C , je trace alors $t_{35}(T_w)$:

Estimation

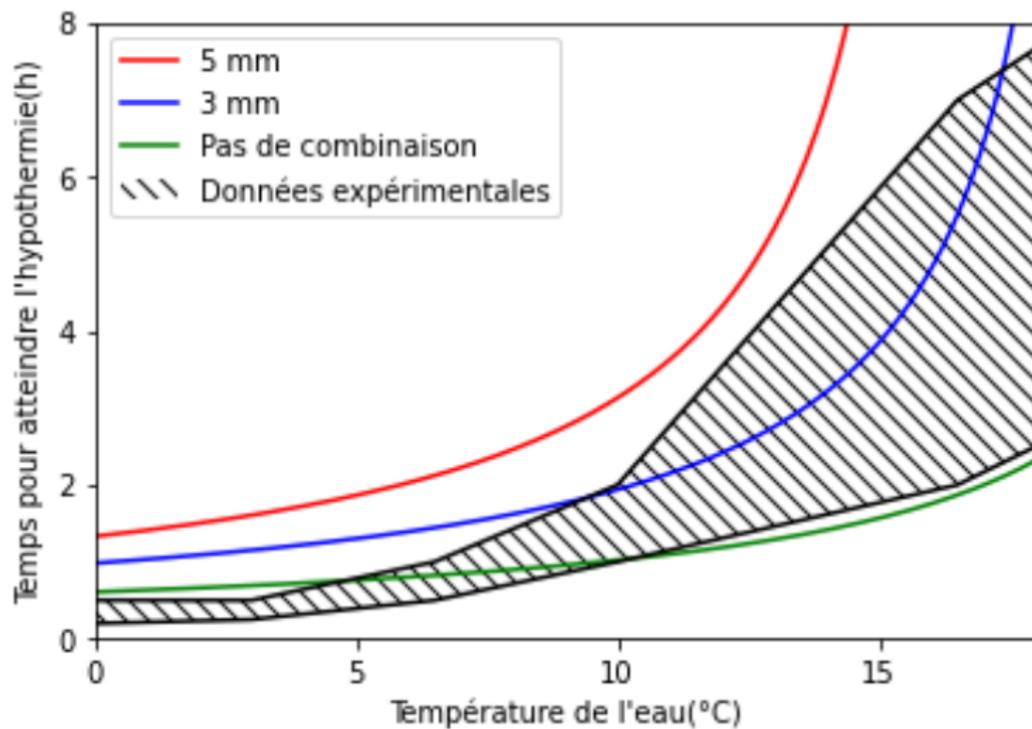
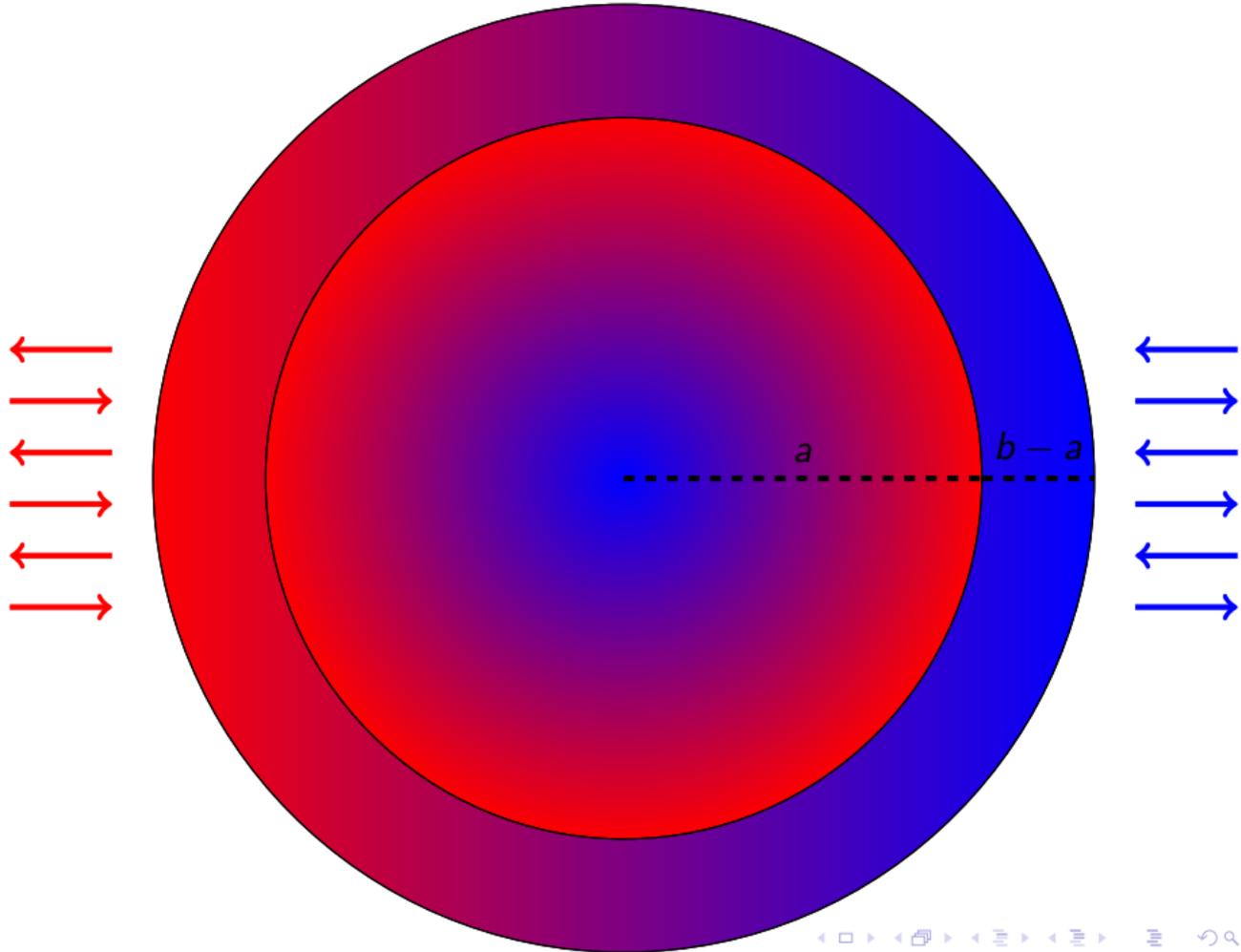


Figure: 7

- Actuellement, la combinaison en néoprène soufflé à l'azote est le meilleur compromis entre faible conductivité thermique et agilité.
- Pour augmenter la durée de survie, il faut augmenter la résistance au froid, et donc **baiss**er la **conductivité sans changer de matériau de fabrication**.
- Il existe un type particulier de métamatériaux thermiques, qui permet de dévier les flux thermiques : le *Cloak* (manteau).
- Le fonctionnement du *Cloak* consiste en la dilatation d'un point en un volume fini, ce qui change la direction des flux.



- But : Insérer des dispositifs *Cloak* dans la combinaison pour créer un nouveau milieu intermédiaire de conductivité $< 44.10^{-3} W.m^{-1}.K^{-1}$

Conductivité thermique généralisée

Dans la suite, $\hat{\lambda}$ définit la conductivité thermique généralisée, qui est une matrice 2×2 .

- En coordonnées polaires : $\hat{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_r & 0 \\ 0 & \lambda_\theta \end{pmatrix}$
- L'équation de la chaleur généralisée s'écrit :

$$\rho c \frac{\partial T(\vec{x}, t)}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (\hat{\lambda} \cdot \vec{\nabla} T(\vec{x}, t)) \quad (12)$$

- Pour modifier le milieu, j'effectue un changement de coordonnées. En particulier, en définissant la **Jacobienne** de la tranformation $J_i^j(x \rightarrow y) = \frac{\partial y_i}{\partial x_j}$, je réécris (13) :

$$\rho_0 c_0 \frac{\partial T(\vec{y}, t)}{\partial t} = \frac{1}{\det(J)} \vec{\nabla} \cdot \left(J^{-T} \lambda_0 \det(J) J^{-1} \cdot \vec{\nabla} T(\vec{x}, t) \right) \quad (13)$$

- Le résultat de la transformation est assimilé à un milieu $M(\hat{\lambda})$, par identification :

$$\hat{\lambda} = J^{-T} \lambda_0 \det(J) J^{-1} \quad (14)$$

- Pour dilater un point en un volume fini (i.e $r \in [0, b] \rightarrow r' \in [a, b]$), le *Cloak* est régit par la transformation:

$$\begin{cases} r' = a + \frac{b-a}{b}r \\ \theta = \theta' \end{cases} \quad (15)$$

- Après calcul de la **Jacobienne** (annexe), j'obtiens en remplaçant dans (15) :

$$\lambda_{r'} = \frac{r' - a}{r'} = \left(1 - \frac{a}{r'}\right) \quad (16)$$

- Les transferts thermiques étant essentiellement radiaux, je ne prends en compte que la contribution de $\lambda_{r'}$.

Majoration de $\lambda_{r'}$

$$\text{J'ai : } \lambda_{r'} = \left(1 - \frac{a}{r'}\right) \leq \left(1 - \frac{a}{b}\right) = \frac{b-a}{b}$$

Je prends $b = 5\text{mm}$ (combinaison), et $b - a = 0.1\text{mm}$ (épaisseur de l'enveloppe de métamatériau)

Ainsi, $\lambda_{r'} \leq 0.02$, disons $\lambda_{r'} = 20.10^{-3}\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$

- Nombre de dispositifs *Cloak* nécessaires :
 - Chaque *Cloak* est un carré de $5\text{mm} \times 5\text{mm}$.
 - La surface totale est $S = 2\text{m}^2$.
 - Il faut alors $\frac{2}{25.10^{-6}} = \boxed{80000}$ cellules *Cloak*.

- Surface totale de métamatériau nécessaire :
 - Dans chaque *Cloak* il y a une enveloppe circulaire de métamatériau d'épaisseur $0.1mm$.
 - La surface au niveau d'une cellule *Cloak* est $\pi(5^2 - 4.9^2) = 3.11mm^2$
 - La surface totale est alors $3.11 \cdot 10^{-6} \times 80000 = \boxed{0.24m^2}$

⇒ La fabrication des enveloppes de métamatériaux, pour une combinaison, est alors à la portée et se fait par microgravure.

Assemblage

Ainsi, en insérant une quantité suffisante de *Cloak* dans le tissu de la combinaison en néoprène, le résultat sera la même combinaison (donc agilité assurée) mais de conductivité plus faible $\lambda' = 20.10^{-3} W.m^{-1}.K^{-1}$! J'aurai réussi à fabriquer une combinaison endurente contre le froid, ce qui constitue une application de plus pour les métamatériaux.

- Maintenant, je retrace la courbe $t_{35}(T_w)$ avec cette nouvelle donnée (la durée de survie $\approx 4h$!!!) :

Réponse à la problématique

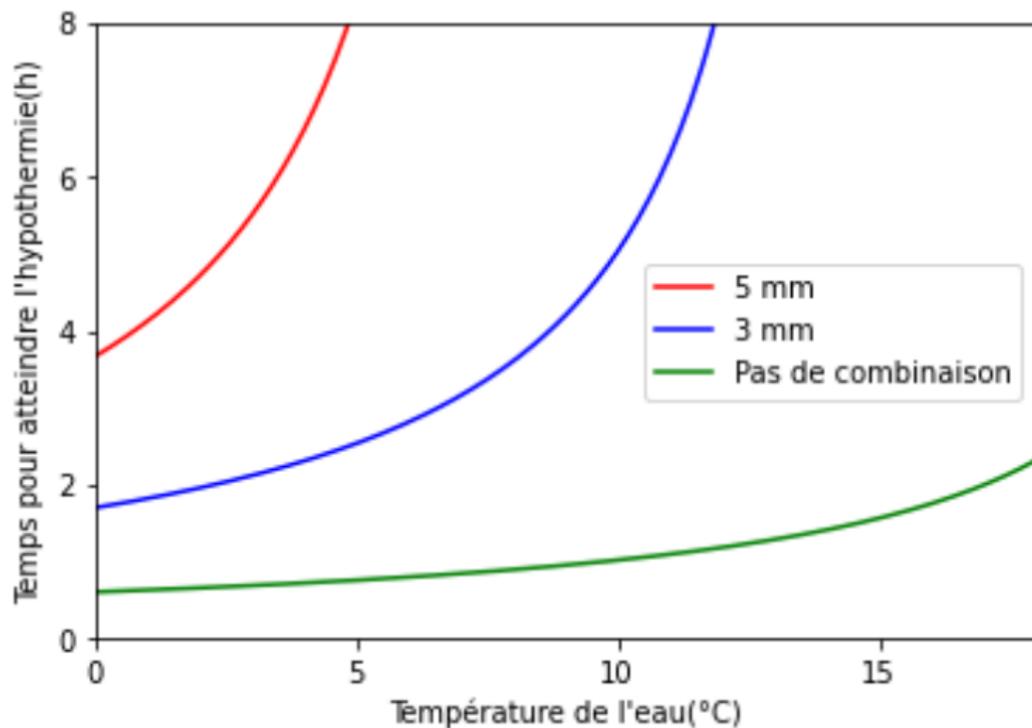


Figure: 8

Merci de votre attention !

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 eps,S,sigma,h,k,Rb,q,M,Cb,Ti0 = 0.97,2,5.67*(10**(-8)),10,44*(10**(-3)),0.03,120,75,3469.4,37
4 Rconv = 1/(h * S)
5 def Rs(x):
6     return x/(k*S)
7 def Re(x, Tw):
8     Rrad = 1/(4*S*eps*sigma*(Tw**3))
9     rapp = (Rrad*Rconv)/(Rrad+Rconv)
10    return Rb + Rs(x) + rapp
11 def t(Tw,x, Ti=35):
12     r = Re(x, Tw+273) + 0.036
13     return (Cb*M*r*np.log((q*r+Tw-Ti0)/(q*r+Tw-Ti)))/3600
14 plt.axis([0, 18, 0, 8])
15 plt.xticks(np.arange(0, 19, 5))
16 plt.yticks(np.arange(0, 9, 2))
17 plt.xlabel("Température de L'eau(°C)")
18 plt.ylabel("Temps pour atteindre L'hypothermie(h)")
19 xx = np.arange(0, 20, 0.1)
20 y1 = t(xx, 3*10**(-3))
21 y2 = t(xx, 5*10**(-3))
22 y3 = t(xx, 0)
23 l1 = plt.plot(xx, y2, color='r', label='5 mm')
24 l2 = plt.plot(xx, y1, color='b', label='3 mm')
25 l3 = plt.plot(xx, y3, color='g', label='Pas de combinaison')
26 xgen = [0, 3, 6.5, 10, 16.5, 21]
27 yup = [0.5, 0.5, 1, 2, 7, 9]
28 ydown = [0.2, 0.25, 0.5, 1, 2, 3.5]
29 plt.plot(xgen, yup, color='k')
30 plt.plot(xgen, ydown, color='k')
31 plt.fill_between(xgen, yup, ydown, hatch='\\\\\\\\\\\\', facecolor='w', label='Données expérimentales')
32 plt.legend()
33 plt.show()

```

Figure: Code python pour la figure 7

```

\begin{frame}[Le Cloak]
  \centering
  \begin{tikzpicture}
    \shadedraw[right color=blue,left color=red, draw=black] (0,0) circle (4.6 cm);
    \draw (0,0) circle (4.6cm);
    \shadedraw[inner color=blue,outer color=red, draw=black] (0,0) circle (3.5 cm);
    \draw (0,0) circle (3.5cm);
    \draw[dashed][ultra thick] (0,0 ) -- node[above]{$a$} (3.5,0);
    \draw[dashed][ultra thick] (3.5,0 ) -- node[above]{$b-a$} (4.6,0);
    \draw[<- , ultra thick, blue](5,1.25) -- (6,1.25);
    \draw[<- , ultra thick, blue](5,0.25) -- (6,0.25);
    \draw[<- , ultra thick, blue](5,-0.75) -- (6,-0.75);
    \draw[-> , ultra thick, red](-5,1.25) -- (-6,1.25);
    \draw[-> , ultra thick, red](-5,0.25) -- (-6,0.25);
    \draw[-> , ultra thick, red](-5,-0.75) -- (-6,-0.75);
    \draw[-> , ultra thick, blue](5,0.75) -- (6,0.75);
    \draw[-> , ultra thick, blue](5,-0.25) -- (6,-0.25);
    \draw[-> , ultra thick, blue](5,-1.25) -- (6,-1.25);
    \draw[<- , ultra thick, red](-5,0.75) -- (-6,0.75);
    \draw[<- , ultra thick, red](-5,-0.25) -- (-6,-0.25);
    \draw[<- , ultra thick, red](-5,-1.25) -- (-6,-1.25);
  \end{tikzpicture}
\end{frame}

```

Figure: Code LaTeX pour la figure du *Cloak*

Calcul de la Jacobienne

Je pose $\alpha := \frac{b-a}{b}$

$$J = J_{xr} J_{rr'} J_{r'x'} = R(\theta) \text{diag}(1, r) \text{diag}(\alpha^{-1}, 1) \text{diag}(1, r'^{-1}) R(\theta')$$

$$\implies J = R(\theta) \text{diag}(\alpha^{-1}, \frac{r}{r'}) R(\theta'), \text{ où } J_{xr} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}, J_{rr'} = \frac{\partial(r,\theta)}{\partial(r',\theta')} \text{ et } J_{r'x'} = \frac{\partial(r',\theta')}{\partial(x',y')}.$$

Alors $\det(J) = \frac{\alpha^{-1}r}{r'}$.

Ainsi : $T^{-1} := J^{-T} J^{-1} \det(J) =$

$$R(\theta)^{-T} \text{diag}(\alpha^{-1}, \frac{r}{r'}) R(\theta)^{-T} R(\theta)^{-1} \text{diag}(\alpha^{-1}, \frac{r}{r'}) R(\theta)^{-1} \frac{\alpha^{-1}r}{r'} =$$

$$R(\theta) \text{diag}\left(\frac{\alpha r}{r'}, \frac{\alpha^{-1}r'}{r}\right) R(\theta)^{-1}$$

En remplaçant dans (14), j'obtiens : $\hat{\lambda} = \text{diag}(\lambda_{r'}, \lambda_{\theta'}) = \text{diag}\left(\frac{\alpha r}{r'}, \frac{\alpha^{-1}r'}{r}\right)$

$$\implies \lambda_{r'} = \frac{\alpha r'}{r} = \frac{b-a}{b} \cdot \frac{(r'-a)b}{(b-a)r'} = \frac{r'-a}{r'}$$

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 eps,S,sigma,h,k,Rb,q,M,Cb,Ti0 = 0.97,2,5.67*(10**(-8)),10,20*(10**(-3)),0.03,120,75,3469.4,37
4 Rconv = 1/(h * S)
5 def Rs(x):
6     return x/(k*S)
7 def Re(x, Tw):
8     Rrad = 1/(4*S*eps*sigma*(Tw**3))
9     rapp = (Rrad*Rconv)/(Rrad+Rconv)
10    return Rb + Rs(x) + rapp
11 def t(Tw,x, Ti=35):
12    r = Re(x, Tw+273) + 0.036
13    return (Cb*M*r*np.log((q*r+Tw-Ti)/(q*r+Ti)))/3600
14 plt.axis([0, 18, 0, 8])
15 plt.xticks(np.arange(0, 19, 5))
16 plt.yticks(np.arange(0, 9, 2))
17 plt.xlabel("Température de l'eau(°C)")
18 plt.ylabel("Temps pour atteindre l'hypothermie(h)")
19 xx = np.arange(0, 20, 0.1)
20 y1 = t(xx, 3*10**(-3))
21 y2 = t(xx, 5*10**(-3))
22 y3 = t(xx, 0)
23 l1 = plt.plot(xx, y2, color='r', label='5 mm')
24 l2 = plt.plot(xx, y1, color='b', label='3 mm')
25 l3 = plt.plot(xx, y3, color='g', label='Pas de combinaison')
26 plt.legend()
27 plt.show()
```

Figure: Code python pour la figure 8