18443 KADDOURI Abdelkayoum

MP

Dobble et plans projectifs finis.

En jouant au jeu de Dobble pour la première fois, je me suis interrogé sur la manière dont il est construit. Je me suis aussi posé la question de pouvoir personnaliser les symboles qui y sont présents, en plus du nombre de symboles par carte qui me paraissait choisi arbitrairement.

A travers l'étude des plans projectifs finis, nous allons exhiber une manière de construire certains jeux de Dobble.

Positionnement thématique (ÉTAPE 1) :

- *MATHEMATIQUES (Algèbre)*
- *INFORMATIQUE (Informatique pratique)*
- *MATHEMATIQUES (Géométrie)*

Mots-clés (ÉTAPE 1) :

Mots-clés (en français)	**Mots-clés (en anglais)**
Dobble	*Dobble*
Plan projectif fini	*Finite projective plane*
Espace projectif	*Projective space*
Corps fini	*Finite field*
Plan affine	*Affine plane*

Bibliographie commentée

L'une des structures mathématiques les plus riches en terme de propriétés symétriques est celle des plans projectifs finis. Elle trouve des applications non seulement en informatique (correction d'erreurs dans les codes [1]), mais aussi dans les jeux de société. On retrouve cette structure dans l'architecture du jeu de Dobble [2]. C'est un jeu de cartes dans lequel chaque joueur essaie de trouver un symbole en commun entre une carte qu'il possède et une autre carte commune à tout les joueurs. La propriété fondamentale du jeu est que chaque deux cartes distinctes possèdent un unique symbole en commun.

Au vu de cette propriété, on se propose d'établir le lien entre Dobble et la géométrie, en faisant une analogie entre ses axiomes, et les propriétés de Dobble , ce qui permet dans un premier temps de créer une version simplifiée du jeu sur un plan géométrique fini de manière artificielle [3].

Le but est donc d'étudier la possibilité de généraliser la construction et chercher les contraintes sur les différents paramètres régissant le jeu (nombre de cartes, nombre de symboles par cartes, ...).

Ceci est fait en étudiant les plans projectifs finis, objets mathématiques définis dans [4], aux propriétés très riches et qui sont utilisés dans plusieurs domaines, notamment la correction d'erreurs dans la transmission de messages et aussi la planification d'expériences. Pour un plan projectif, on définit un entier appelé "ordre" qui permet de le caractériser [4], et qui impose par transition les propriétés du jeu de Dobble qu'on peut construire à partir du plan.

Les plans projectifs dont la construction est connue sont ceux qui ont comme ordre une puissance d'un nombre premier, cette construction est liée aux espaces projectifs sur les corps, notions abstraites liées aux structures algébriques, dont les propriétés mathématiques sont établies dans [4].

Cette construction est théoriquement simple a établir et à vérifier, néanmoins, elle reste assez compliquée à appliquer de manière algorithmique, d'autant plus pour les ordres qui sont des puissances multiples d'un nombre premier.

Nous nous intéressons donc à une autre manière de construire des plans projectifs, plus simple à programmer pour un ordre p premier, qui consiste à construire d'abord des plans affines, et les compléter ensuite en des plans projectifs [5].

En ce qui concerne l'existence de plans dont les ordres ne sont pas une puissance d'un nombre premier, les seuls résultats significatifs établis sont : une réponse négative pour 10 [6], par une preuve assistée par ordinateur, et le théorème de Bruck-Ryser [7] qui donne une condition nécessaire sur les ordres.

Problématique retenue

Quelles sont les contraintes sur l'existence d'un jeu de Dobble, en lien avec la géométrie finie ? Et comment peut-on en construire ?

Objectifs du TIPE du candidat

Établir le lien entre le jeu de Dobble et la géométrie.

Établir les propriétés fondamentales des plans projectifs finis.

Exhiber quelques constructions algébriques possibles de plans projectifs finis.

Écrire un programme qui permet de générer un plan projectif fini à ordre donné.

Références bibliographiques (ÉTAPE 1)

[1] FLEMING, PATRICK : Error Correcting Codes and Finite Projective Planes *: https://micsymposium.org/mics_2009_proceedings/mics2009_submission_52.pdf*

[2] DOBBLE : Dobble sur Wikipédia *: https://fr.wikipedia.org/wiki/Dobble*

[3] BOURRIGAN, MAXIME : DOBBLE ET LA GÉOMÉTRIE FINIE *: https://images.math.cnrs.fr/Dobble-et-la-geometrie-finie.html*

[4] DOYLE, B AND VOCE, B AND LIM, WC AND LO, CH : Finite Projective Geometry 2nd year group project. *: https://www.homepages.ucl.ac.uk/~ucahbdo/FiniteProjectivePlanes.pdf*

[5] HOGLIN, MARKUS : The what, how and why of Finite projective planes *: https://lup.lub.lu.se/luur/download?func=downloadFile&recordOId=9067379&fileOId=9067380*

[6] LAM, CLEMENT WH AND THIEL, LARRY AND SWIERCZ, STANLEY : The non-existence of finite projective planes of order 10 *: Canadian journal of mathematics, volume 41, number 6, pages 1117 - 1123, 1989, Cambridge University Press.*

[7] BRUCK, RICHARD H AND RYSER, HERBERT J : The nonexistence of certain finite projective planes *: Canadian journal of mathematics, volume 1, number 1, pages 88-93, 1949, Cambridge University Press.*

DOT

[1] *: Octobre 2023 : première considération du jeu de Dobble et consultation de l'article [3].*

[2] *: Janvier 2024 : Étude de la méthode constructive de certains plans projectifs, dans l'article [5].*

[3] *: Février 2024 : Écriture du premier code Python pour générer des plans projectifs d'ordre premier.*

[4] *: Avril 2024 : Étude de la construction algébrique de l'article [4].*