Jeu de Dobble et plans projectifs finis

Abdelkayoum KADDOURI, n°18443

1. Introduction : Jeu de Dobble
2. Plans projectifs finis
3. Implémentation algorithmique
4. D'autres jeux Dobble ?
5. Conclusion
6. Annexe

Table of Contents

1 Introduction : Jeu de Dobble

2 Plans projectifs finis

3 Implémentation algorithmique

4 D'autres jeux Dobble ?

5 Conclusion

6 Annexe

Propriétés du jeu

- 55 cartes.
- chaque carte : 8 symboles.
- 57 symboles au total.
- chaque deux cartes possèdent un unique symbole en commun.

Figure: Le seul symbole en commun est l'araignée.

Propriétés du jeu

Géométrie	Dobble
Droite	Symbole
Point	Carte
De tout deux points distincts du plan passe une unique droite	2 cartes ont exactement un symbole commun

Table of Contents

1 Introduction : Jeu de Dobble

2 Plans projectifs finis

3 Implémentation algorithmique

4 D'autres jeux Dobble ?

5 Conclusion

6 Annexe

Motivation

- de la géométrie à l'algèbre : $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

mais :

- Le plan est infini.

Cas simple

On se place dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ au lieu de $\mathbb{R}^2$

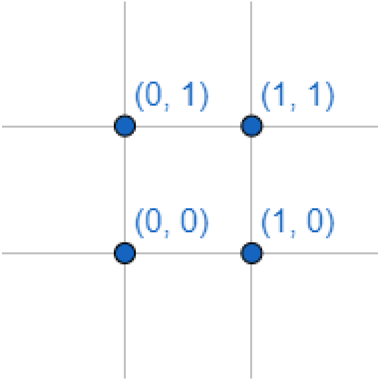


Figure: Les 4 points du plan

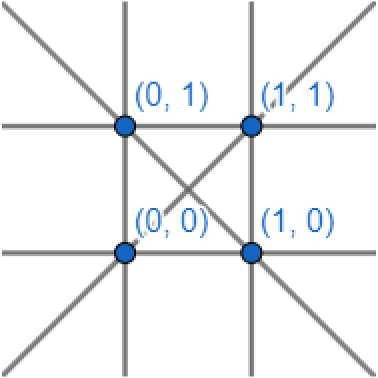
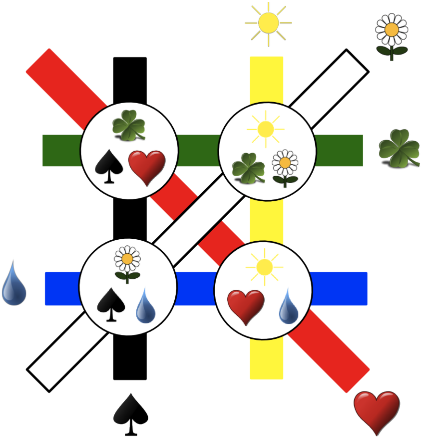


Figure: Les points et les droites

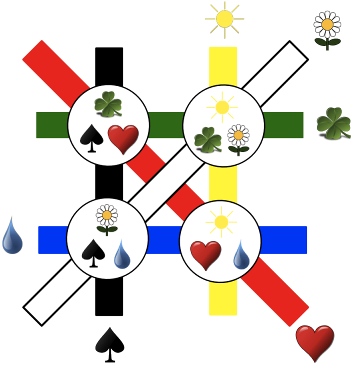
Solution

On obtient ainsi un petit jeu de Dobble :

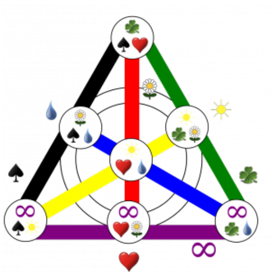


Raffinement

On 'complète' la structure.



On obtient donc



Objet connu : Plan de Fano

Plan projecif fini

Définition

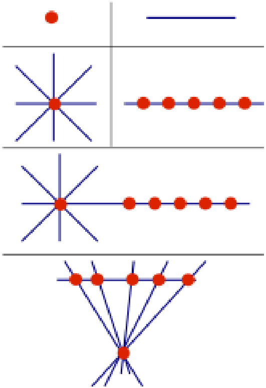
Un plan projectif $\mathbb{P}$ est la donnée d'une paire d'ensembles $(p(\mathbb{P}), d(\mathbb{P})))$ (points et droites) et d'une relation entre les deux ensembles, appelée incidence, vérifiant :

1. $P1$: chaque 2 points distincts sont incidents à exactement une droite .
2. $P2$: chaque 2 droites distinctes sont incidentes exactement à un point .
3. $P3$: il existe 4 points tels qu'aucune droite n'est incidente à 3 points parmi eux.

On dit que $\mathbb{P}$ est fini ssi $p(\mathbb{P})$ est fini.

P3 : élimination de certains cas

la propriété 3 assure que le plan $\mathbb{P}$ n'est pas dégénéré, donc différent de :



Quelques résultats

Théorème 1 (dualité point-droite)

Soit $\mathbb{P} = (p(\mathbb{P}), d(\mathbb{P}))$ un plan projectif fini avec une relation d'incidence $\mathbb{I}$ alors $\mathbb{P}' = (d(\mathbb{P}), p(\mathbb{P}))$ est aussi un plan projectif fini ayant comme relation d'incidence $\mathbb{I}$

Théorème 2 (l'ordre d'un plan projectif)

Soit $\mathbb{P}$ un plan projectif fini, alors il existe un entier $n \geq 2$ tel que :

- Tout point de $\mathbb{P}$ est incident à $n+1$ droites.
- Toute droite de $\mathbb{P}$ est incidente à $n+1$ points.

On dit que n est l'ordre de $\mathbb{P}$.

Quelques résultats

Théorème 3

Soit $\mathbb{P}$ un plan projectif d'ordre n, alors $|p(\mathbb{P})| = |d(\mathbb{P})| = n^2 + n + 1$

Conclusion intermédiaire

Le vrai jeu de Dobble est 'presque' un plan projectif fini.

- d'ordre 7 (8 symboles par carte)
- $57 = 7^2 + 7 + 1$ symboles
- 55 cartes : il en reste 2 :

Table of Contents

1 Introduction : Jeu de Dobble

2 Plans projectifs finis

3 Implémentation algorithmique

4 D'autres jeux Dobble ?

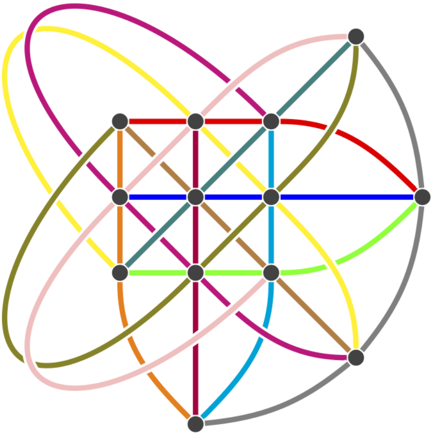
5 Conclusion

6 Annexe

Construction de plans projectifs finis

- stratégie : construire un plan projectif à partir d'un plan affine (analogue au cas $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$)
- marche (uniquement) pour $\mathbb{F}_p$

Principe de l'algorithme : exemple $p = 3$



Résultats

```
>>> plan_projectif_sur_Fp(2)
La carte 0 : [0, 2, 4]
La carte 1 : [1, 3, 4]
La carte 2 : [0, 1, 5]
La carte 3 : [2, 3, 5]
La carte 4 : [0, 3, 6]
La carte 5 : [2, 1, 6]
La carte 6 : [4, 5, 6]

>>> plan_projectif_sur_Fp(3)
La carte 0 : [0, 3, 6, 9]
La carte 1 : [1, 4, 7, 9]
La carte 2 : [2, 5, 8, 9]
La carte 3 : [0, 1, 2, 10]
La carte 4 : [3, 4, 5, 10]
La carte 5 : [6, 7, 8, 10]
La carte 6 : [0, 4, 8, 11]
La carte 7 : [3, 7, 2, 11]
La carte 8 : [6, 1, 5, 11]
La carte 9 : [0, 7, 5, 12]
La carte 10 : [3, 1, 8, 12]
La carte 11 : [6, 4, 2, 12]
La carte 12 : [9, 10, 11, 12]
```

```
>>> plan_projectif_sur_Fp(4)
La carte 0 : [0, 4, 8, 12, 16]
La carte 1 : [1, 5, 9, 13, 16]
La carte 2 : [2, 6, 10, 14, 16]
La carte 3 : [3, 7, 11, 15, 16]
La carte 4 : [0, 1, 2, 3, 17]
La carte 5 : [4, 5, 6, 7, 17]
La carte 6 : [8, 9, 10, 11, 17]
La carte 7 : [12, 13, 14, 15, 17]
La carte 8 : [0, 5, 10, 15, 18]
La carte 9 : [4, 9, 14, 3, 18]
La carte 10 : [8, 13, 2, 7, 18]
La carte 11 : [12, 1, 6, 11, 18]
La carte 12 : [0, 9, 2, 11, 19]
La carte 13 : [4, 13, 6, 15, 19]
La carte 14 : [8, 1, 10, 3, 19]
La carte 15 : [12, 5, 14, 7, 19]
La carte 16 : [0, 13, 10, 7, 20]
La carte 17 : [4, 1, 14, 11, 20]
La carte 18 : [8, 5, 2, 15, 20]
La carte 19 : [12, 9, 6, 3, 20]
La carte 20 : [16, 17, 18, 19, 20]
```

Table of Contents

1. Introduction : Jeu de Dobble
2. Plans projectifs finis
3. Implémentation algorithmique
4. D'autres jeux Dobble ?
5. Conclusion
6. Annexe

Espaces projectifs sur des corps finis

Théorème 4 : cardinal d'un corps fini

Si $\mathbb{K}$ est un corps fini, alors $|\mathbb{K}| = p^n$ avec $p \in \mathbb{P}$ et $n \in \mathbb{N}$ réciproquement, pour tout $p \in \mathbb{P}$ et $n \in \mathbb{N}$, il existe un corps de cardinal p^n, unique à isomorphisme près noté $\mathbb{F}_{p^n}$.

Théorème 5 : espaces projectifs

Soit $\mathbb{K}$ un corps et E le $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{K}^3$. on note $\mathbb{P}(\mathbb{K})_E = (p(\mathbb{P}), d(\mathbb{P})$ l'espace projectif sur $\mathbb{K}$, ou p est l'ensemble des droites vectorielles et d est l'ensemble des hyperplans .
Alors $\mathbb{P}(\mathbb{K})_E$ est un plan projectif, en considérant que $p \in p(\mathbb{P})$ est indicent à $d \in d(\mathbb{P})$ ssi $p \subset d$.
Si $\mathbb{K}$ est fini, alors l'ordre de $\mathbb{P}(\mathbb{K})_E$ est $|\mathbb{K}|$.

Et si n n'est pas puissance première ?

Théorème de Bruck-Ryser, 1949 (Admis)

S'il existe un plan projectif d'ordre n avec $n \equiv 1, 2 \pmod 4$, alors n est la somme de deux carrés (éventuellement nuls).

- ceci affirme qu'un plan projectif d'ordre 6 n'existe pas.
- $10 = 9 + 1$, cependant, en 1989, Lam ,Thiel, et Swiercz fournissent une preuve assisté par ordinateur qui affirme qu'un plan d'ordre 10 n'existe pas.
- conjecture : tous les plans projectifs ont comme ordre une puissance d'un nombre premier. le plus petit ordre pour lequel on connaît rien : 12.

Table of Contents

1. Introduction : Jeu de Dobble
2. Plans projectifs finis
3. Implémentation algorithmique
4. D'autres jeux Dobble ?
5. Conclusion
6. Annexe

Conclusion

- Caractérisation de certains plans projectifs finis.
- Généralisation : plans en blocs.
- Autres utilités : plans d'expériences, correction de codes.

Table of Contents

1. Introduction : Jeu de Dobble
2. Plans projectifs finis
3. Implémentation algorithmique
4. D'autres jeux Dobble ?
5. Conclusion
6. Annexe

Code python I

```python
def plan_projectif_sur_Fp (n):

    def plan_projectif(n):""" Numérotation des points du plan : en commençant par (0;0), en allant ensuite à droite puis en haut dans Z/nZ ^2 """
        plan_affine = []
        points_infini = []
        indice = 0
        # le plan affine
        for i in range(n):
            ieme_ligne = [] #ligne d'ordonnée i
            for j in range(n): #jeme élément de la ieme ligne
                ieme_ligne.append(indice)
                indice += 1
            plan_affine.append(ieme_ligne)
        # les points à l'infini
        for i in range(n + 1):
```

Code python II

```python
        points_infini.append(indice)
        indice += 1
    return {'plan_affine': plan_affine,'points_infini': points_infini}

def droite(n, plan, a, b, est_verticale):"""Renvoie les numéros des points d'une droite donnée dans le plan numéroté"""
    coordonnes = []
    points = []
    # Les coordonnés des points
    if est_verticale == False: # f(x) = ax + b
        for i in range(n):
            x = i
            y = (a * i + b) % n
            coordonnes.append({'x': x, 'y': y})
    else: # x est fixée : x = b
        for i in range(n):
```

Code python III

```
            x = b #la constante de la verticale
            y = i % n
            coordonnes.append({'x': x, 'y': y})
    # Les numéros des points dans le plan affine
    for c in coordonnes:
        points.append(plan['plan_affine'][c['y']][c['x']])
    # Le dernier point dans les points à l'infini
    if est_verticale == False:
        points.append(plan['points_infini'][a + 1])
    else:
        points.append(plan['points_infini'][0])
    return points

def droites(n, plan):
    liste = []
    # Droites verticales
    for i in range(n):
```

Code python IV

```python
            liste.append(droite(n, plan, 0, i, True))
        # Droites avec f(x) = ax + b
        for a in range(n):
            for b in range(n):
                liste.append(droite(n, plan, a, b, False))
        # La droite à l'infimi
        liste.append(plan['points_infini'])

        return liste
deck = droites(n, plan_projectif(n))

for i in range(len(deck)):
    print('La carte', i,':' ,deck[i])

```

Démonstrations

Théorème 1

- $P1'$ et $P2'$ pour $\mathbb{P}'$ sont assurées par $P2$ et $P1$ de $\mathbb{P}$
- $P3'$: soit X, Y, Z et T les points dont l'existence est assurée par $P3$, en prenant trois droites parmi $(AB), (BC), (CD)$ et (DA), il en existe deux qui se coupent en un point qui n'appartient pas à la troisième.

Lemme 1

Si A est un point, il existe une droite qui n'est pas incidente à A.

Lemme 1

Soit X, Y, Z et T les point dont l'existence est assurée par $P3$, au moins 3 points parmi eux (spdg X, Y, Z) sont différents de A, au moins l'une des droites (XY) et (XZ) n'est pas incidente à A.

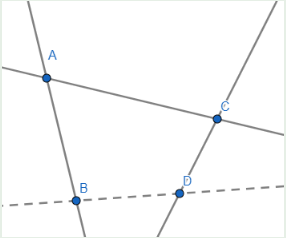
Démonstrations

Lemme 2

Si d_1 et d_2 sont deux droites distinctes, il existe un point A qui n'est sur aucune des deux droites.

Lemme 2

Soit $Q = \{A, B, C, D\}$ l'ensemble des points dont l'existence est assurée par $P3$, alors au plus 2 points parmi Q sont incidents à d_1 (idem pour d_2)
s'il existe un élément de Q non incident ni à d_1 ni à d_2, c'est fini.
sinon :



Démonstrations

Théorème 2

- On considère deux points A et B, il existe (d'après Lemme 2) une droite d tel que $A \notin d$ et $B \notin d$.
  d'après P, il y a autant de droites passantes par A que de points sur d, idem pour B.
- dualité.
- ce qui précède assure aussi qu'on a le même n pour les droites et les points.

Démonstrations

Théorème 3

On considère un point A du plan, il est incident à exactement $n+1$ droites, chacune contenant n autres points tous distincts, donc il existe $1+n(n+1) points$.
par dualité, il existe n^2+n+1 droites.

Démonstrations

Théorème 4

si $\forall k \in \mathbb{N}^*, k \cdot 1 \neq 0$ alors
$\forall k, l \in \mathbb{N} k \neq l, k \cdot 1 = l \cdot 1 \Rightarrow (k - l) \cdot 1 = 0 \Rightarrow k = l$, donc $\mathbb{K}$ serait infini.
Soit $p = min\{k \in \mathbb{N}^* / k \cdot 1_{\mathbb{K}} = 0\}$
si $p = 1$, $\mathbb{K}$ est réduit en $\{0\}$ si p n'est pas premier, il existe m et n entiers tels que $p = mn$, or $0 = p \cdot 1 = (m \cdot 1)(n \cdot 1)$ donc $m \cdot 1 = 0$ ou $n \cdot 1 = 0$, ce qui contredit la minimalité de p. Ensuite, $\mathbb{K}$ est naturellement muni d'une structure de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-ev de dimension finie, ainsi, $\mathbb{K}$ étant fini, $\exists n \in \mathbb{N}, |\mathbb{K}| = p^n$

Démonstrations

Théorème 5

- On démontre la propriété pour $E = \mathbb{K}^3$ Soit H et H' deux hyperplans distincts de E, ils sont donc de dimension 2. Si $H \cap H' = \{0\}$ alors $dim(H + H') = 4$, si $dim(H \cap H') = 2$, alors $H = H'$. Donc $H \cap H'$ est de dimension 1; c'est l'unique droite vectorielle contenue dans H et H'.
- Si d et d' sont deux droites vectorielles distinctes, avec $d = Vect(u)$, $d' = Vect(u')$ et (u, u') libre, alors $H = Vect(u, u')$ est l'unique hyperplan contenant d et d'.

Démonstrations

Théorème 5

- Soit $H = Vect(u, v)$ un hyperplan, les droites qui sont contenues dans H s'écrivent $Vect(au + bv)$ avec a et $b \in \mathbb{K}$, de plus, si $a \neq 0$, cette écriture devient $u + bv$, elle est de plus unique. il y a donc $|\mathbb{K}| + 1$ (le 1 correspond au cas $a = 0$) droites dans $\mathbb{H}$, donc l'ordre du plan projectif est $|\mathbb{K}|$

Ressources I

- Maxime Bourrigan.
  Dobble et la géométrie finie, 2011.
  https://images.math.cnrs.fr/Dobble-et-la-geometrie-finie.html.

- Richard H Bruck and Herbert J Ryser.
  The nonexistence of certain finite projective planes.
  Canadian Journal of Mathematics, 1(1):88–93, 1949.

- B Doyle, B Voce, WC Lim, and CH Lo.
  Finite projective geometry 2nd year group project.
  2015.
  https://www.homepages.ucl.ac.uk/~ucahbdo/FiniteProjectivePlanes.pdf.

Ressources II

Clement WH Lam, Larry Thiel, and Stanley Swiercz.
The non-existence of finite projective planes of order 10.
Canadian journal of mathematics, 41(6):1117–1123, 1989.

Dobble sur wikipédia.
https://fr.wikipedia.org/wiki/Dobble.