TIPE: Les impacts des boycotts dans les jeux coopératifs

Boudouh Mohamed

Épreuve de TIPE

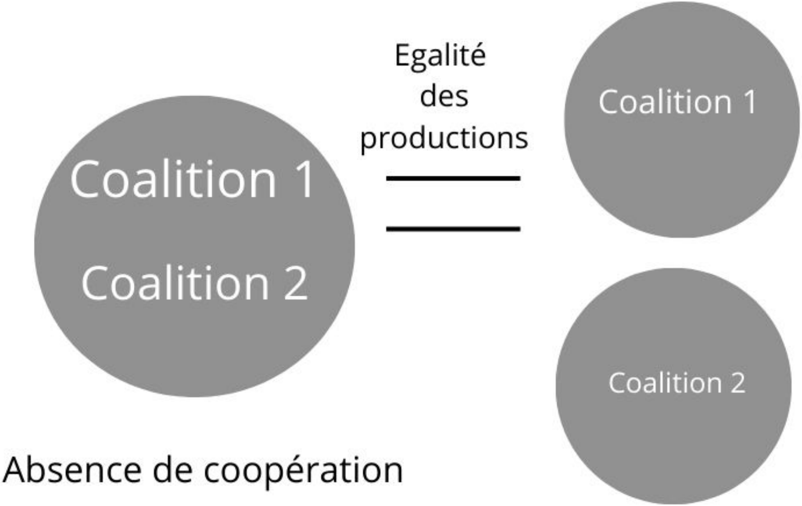
Session 2024

Qu'est ce qu'un boycott dans un jeu coopératif ?

La tendance générale dans un jeu coopératif est la formation de coalitions afin d'augmenter les gains des joueurs.

Pourant il se peut que 2 groupes de joueurs **refusent de coopéerer** : Leur production totale est la somme des productions de chaque groupe comme s'il était seule. Il n'y a pas d' **exploitation de la structure de coalition**.

Shématisation d'un boycott dans un jeu



Plan de la présentation

Exemple de l'importance de l'étude des boycotts

Importer	2021		2022		2023
	spring	fall	spring	fall	spring
EU27	49.8	70.6	89.5	61.7	18.5
UK	3.5	3.6	3.2	0.1	0.0
China	21.6	31.0	37.9	45.6	45.9
India	1.6	2.6	9.6	23.7	27.9
Turkey	2.5	3.0	18.8	23.1	15.1
World	97.5	134.5	178.4	165.0	116.0

Redirection de la production de la Russie vers l'Asie avant le boycott de 2022

Position du Problème

Etant donnée l'influence des boycotts sur le gain des joueurs, il est utile de **savoir quantifier l'effet d'un boycott sur l'évolution du jeu ainsi que que déterminer les stratégies optimales des joueurs**.

Boycotts possibles → Joueur ← Boycotts menaçants

Jeux coopératifs

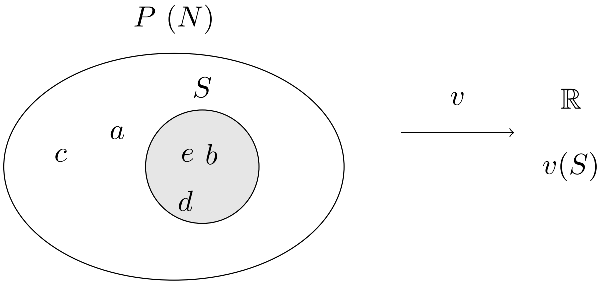
Jeu coopératif

Definition

Un **jeu coopératif** (N,v) est la donnée de :

- ⋆ Un **ensemble** N de joueurs .
- ⋆ Une **fonction de coalitions** $v : \mathrm{P}(N) \longrightarrow \mathbb{R}$, qui associe à chaque coalition sa valeur.
- on notera $V(N)$ l'ensemble des fonctions de coalitions sur l'ensemble des joueurs N.

Schéma représentant une fonction de coalitions



Joueurs à production disjointes

Definition

Deux joueurs i, j sont disjointement productifs si, pour tout $S \subset N \setminus \{i, j\}$, nous avons :

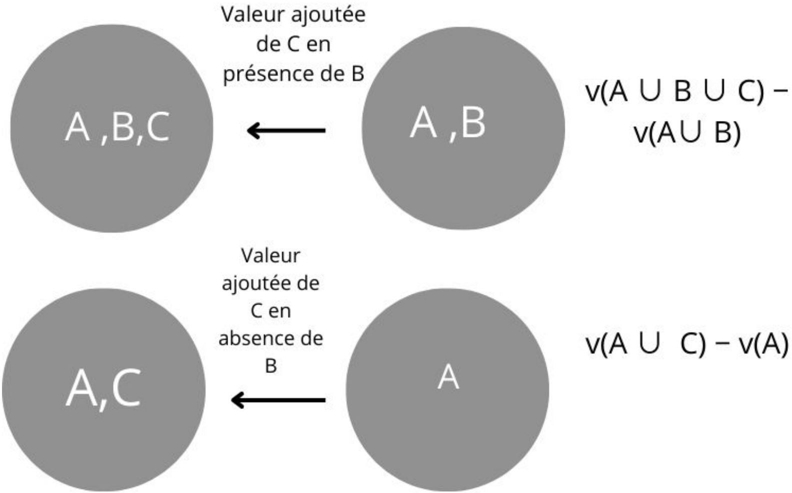
$$v(S \cup \{i, j\}) - v(S \cup \{j\}) = v(S \cup \{i\}) - v(S).$$

Des coalitions disjointes A, B sont disjointement productives si tous les $i \in A$ et $j \in B$ sont disjointement productifs.

Nous écrivons la contribution marginale comme suit :

$$dv_i(S) = v(S \cup \{i\}) - v(S)$$

2 Coalitions A et B disjointement productifs



Jeu de boycott de deux coalitions

Definition

Pour tout (N, v) et toute paire de coalitions disjointes A, B, nous disons que (N, v^{AB}) est le jeu de boycott A,B si :
- $v_{AB}(S) = v(S)$ si $S \cap A = \emptyset$ ou $S \cap B = \emptyset$,
- A et B sont disjointement productifs dans (N, v^{AB}).

v^{AB} est définie par :

$$v^{AB}(S \cup A' \cup B') = v(S \cup A') + v(S \cup B') - v(S), \qquad (1)$$

ce qui définit v^{AB}.

La valeur de Shapley

Definition

Une valeur est **un opérateur** :$V(S) \times S \longrightarrow \mathbb{R}$ qui attribue à chaque joueur i son gain du jeu v

Definition

La valeur de Shapley pour un joueur i est donnée par la formule suivante :

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|!\,(|N| - |S| - 1)!}{|N|!}\,(v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

Impact d'un boycott

Definition

L'impact d'un boycott est $\phi(v) - \phi(v^{AB})$.

Modèle retenu pour l'évolution de la fonction caractéristique

La tendance générale des joueurs à coopérer diffère selon la nature de chaque jeu. mais on peut étudier l'évolution de leurs gains au cours du temps en fonction de la probabilité qu'un boycott ait lieu.

La fonction caractéristique sera représentée à par une suite de variables aléatoires v_n définie sur N à valeurs dans :

$$\{v^{AB} \mid A \subseteq N \text{ et } B \subseteq N\}$$

où v_n représente la fonction caractéristique à $t = n$.

Matrice de probabilités de transitions

On définit la matrice de transitions(stochastique) $\mathbf{P} = (p_{ij})$ pour $1 \leq i, j \leq 4$, où p_{ij} désigne la probabilité de transition d'un état(avec ou sans boycott) vers un autre état :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

Une stratégie du joueur i désigne un vecteur de Probabilité S qui indique les probabilités avec lesquelles ce joueur choisit d'entretenir un boycott ou non.

Probabilité invariante

Definition

Soit P une matrice stochastique. Une probabilité invariante pour P est un vecteur de probabilité π tel que $\pi P = \pi$.

Théorème

Soit P une matrice stochastique irréductible. Alors : P admet une unique probabilité invariante π et on a $\pi > 0$.

Convegence de P

Definition

Une matrice stochastique est *ergodique* si elle admet une puissance $P^n > 0$.

Théorème

Soit P *une matrice stochastique ergodique et* π *sa probabilité invariante. Alors* $\forall (i,j) \in E^2$, $P_{i,j}^{(n)}$ *converge vers* π_j *et la vitesse de convergence est exponentielle, plus précisément, il existe* $r \in]0,1[$ *tel que*

$$\lim_{n\to\infty} r^{-n} \sup_{(i,j)\in E^2} |p_{i,j}^{(n)} - \pi_j| = 0.$$

Maximiser le gain final

La phase du jeu qui va durer le plus est celle où P (irréductible)aurait atteint sa limite.On cherchera donc à maximiser le gain final du joueur. Pour cela ,on s'interessera uniquement à la valeur limite du vecteur de probabilités de :v_n :

$$\lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} P^n V_0$$

Où V_n désigne :

$$\mathbf{V}_n = \begin{pmatrix} P(\mathbf{v}_n = v) \\ P(\mathbf{v}_n = v^{12}) \end{pmatrix}$$

Une optimisation sous contrainte

Finalement,on est capable de détérminer la stratégie optimale en exhibant un vecteur v_0 tel que $G^T \times P \times v_0$ soit maximal,où G^T est constitué de la récompense du joueur lors de chaque situation du jeu (avec ou sans boycott).

Théorème

Soit $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ un vecteur donné et $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un vecteur dont les composantes sont positives et de somme 1, c'est-à-dire $x_i \geq 0$ pour tout i et $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. La fonction $f(x) = y^T x = \sum_{i=1}^n y_i x_i$ est maximisée lorsque x est tel que :

$$x_i = \begin{cases} 1 & si\ i = \arg\max_k y_k, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Stratégie optimale

Le théorème précédent permet de conclure que la stratégie optimale est la solution de l'équation :

$$Pv_0 = x$$

où x contient 1 dans l'indice du maximum de y.

Recherche des solutions du système linéaire

Definition

Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. La limite suivante A^+ existe et est appelée pseudo inverse de A

$$A^+ = \lim_{\delta\to 0}(A^T A + \delta^2 I)^{-1} A^T \tag{1}$$

$$= \lim_{\delta\to 0} A^T (A A^T + \delta^2 I)^{-1} \tag{2}$$

Theorem

(Existence :) *Le système linéaire*

$$Ax = b \quad ; \quad A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad b \in \mathbb{R}^m \tag{3}$$

Solutions

Theorem

a une solution si et seulement si $AA^+b = b$.

Theorem

Solution *Soit* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ *et supposons que* $AA^+b = b$. *Alors, tout vecteur de la forme*

$$x = A^+b + (I - A^+A)y \quad \text{où} \quad y \in \mathbb{R}^n \text{ est arbitraire} \tag{4}$$

est une solution de

$$Ax = b. \tag{5}$$

De plus, toutes les solutions de (5) sont de cette forme.

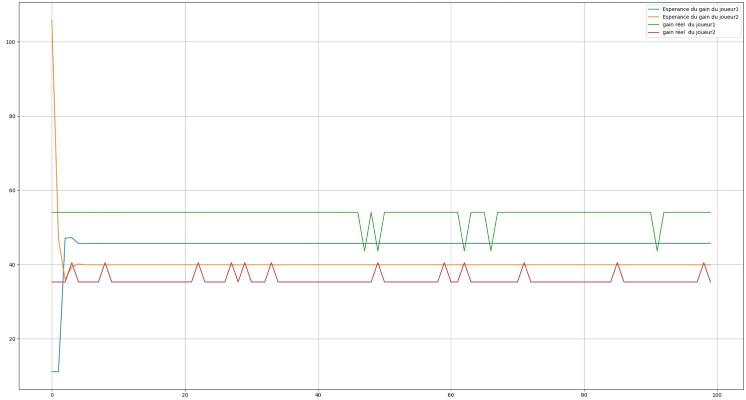
Simulation

Afin d'évaluer la validité de la stratégie déterminée.On considère un jeu de 2 joueurs peuvent soit coopéerer soit entretenir un boycott. On examine l'évolution des éspérances de leurs gains au cour du jeu.
Cette éspérance est la somme des gains des 2 jeux(ordinaire et boycott) pondérés avec leurs probabilités respectives :

$$G_n = G^\top \times V_n$$

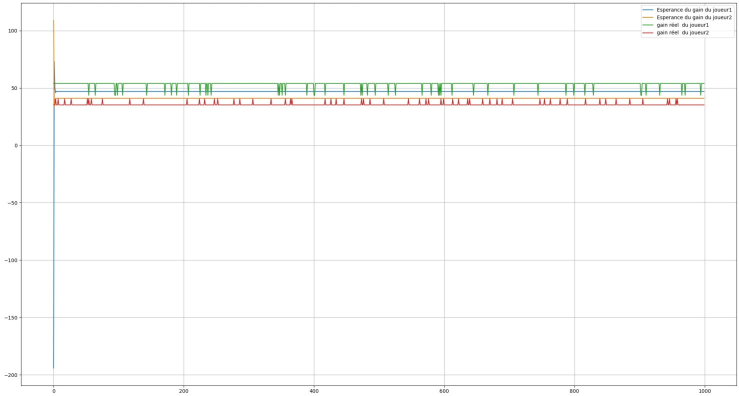
Evolution des gains des joueurs

Le joueur 1 a choisit la stratégie optimale(100 instants)



Evolution des gains des joueurs

Le joueur 1 choisit la stratégie optimale (1000 instants)



Remarques sur les resultats

La stratégie proposée donne des résultats satisfaisants à long terme concernant le gain moyen du joueur qui l'utilise.
Par ailleurs, cette approche n'est envisageable que si P est solution de l'équation $AA^{+}b = b$.Sinon le problème pourrait se résoudre par l'approximation de P par une matrice inversible .

Etude des jeux convexes

Fonction de coalitions supermodulaire

Definition

Une fonction de coalitions v est dite **supermodulaire** si pour toutes coalitions A et B :
$v(A\cup B)+ v(A\cap B)\geq v(A) + v(B)$

Definition

Un jeu **convexe** est un jeu avec une **fonction de coalitions supermodulaire**

Remarque : Dans un jeu convexe, v est croissante au sens de l'inclusion : $v(A) \leq v(B)$ si $A \subseteq B$. En effet, en partitionnant B en A et $B \setminus A$, il vient que

$$v(B) = v((B \setminus A) \cup A) \geq v(A) + v(B \setminus A) \geq v(A).$$

Impact maximal dans un boycott à plusieurs contre un

Théorème

Dans un boycott à plusieurs contre un v_{iB}, l'impact est maximal pour i.

Cas concret d'un jeu convexe

bloc commercial hétérogène

Dans un hloc commercial N, il y a un $x \in N$ spécial. Nous avons $v(S) = |S| - 1$ si $x \notin S$ et $v(S) = 3(|S| - 1)$ si $x \in S$. La valeur de Shapley est $\phi_i(v) = 2 - \frac{1}{n}$ pour $i \neq x$ et $\phi_x(v) = n - \frac{1}{n}$. Dans un boycott de plusieurs contre un de A contre x, nous avons $\phi_i(v_{Ax}) = 1 - \frac{1}{n-1}$ pour $i \in A$ et $\phi_x(v_{Ax}) = n - a - \frac{1}{n-a}$. L'impact sur les joueurs non participants est négligeable. Cette situation est similaire à un boycott de consommateurs, où la question est de savoir si le nombre de consommateurs participants (dont la valeur est divisée par deux) est suffisant pour que le producteur x change sa politique **?**.

Comportement général dans un jeu convexe

Définition

Un joueur i est invariant sous un boycott si $v(S) = v_{AB}(S)$ pour toutes les coalitions qui contiennent i.

Théorème

L'impact est positif pour les joueurs qui participent au boycott et négatif pour les joueurs invariants.

Ce théorème montre que **que tout joueur a intérêt à éviter les boycotts dans les jeux convexes** .

Conclusion

L'étude a permis à partir de ses deux phases de détérminer la stratégie de boycott optimale pour le joueur.Il pourra de même savoir les boycotts qui le menacent en examinant les stratégies optimales des autres joueurs. Ainsi la simulation a donné des résultats satisfaisants concernant le gain d'un joueur choisissant la stratégie optimale .

L'étude est toutefois restreinte au cas où la matrice de transition est **irréductible**. La généralisation et l'amélioration de ces travaux nécessitera une étude plus approfondie voire un meilleure modèle ou la matrice de transition dépend du temps.

Annexe

Théoreme4

Démonstration

Pour $x \in \mathbb{R}^d$ *et* $f \in L(\mathbb{R}^d)$, *on notera*

$$\|x\| = \sup_i |x_i| \quad et \quad \|f\| = \sup\{\|f(x)\| \mid \|x\| = 1\}.$$

On rappelle que le rayon spectral $\rho(f)$ *de* f *est alors égal à*

$$\lim_{n\to\infty} \|f^n\|^{1/n}.$$

On a vu que 1 est une valeur propre simple et dominante de P, *de vecteur propre* $v_0 = (1, \dots, 1)$. *Considérons l'application linéaire* f *de matrice* P *dans la base canonique* $(e_1, \dots, e_d)$ *de* $\mathbb{R}^d$. *On note* V *un supplémentaire de* $\mathbb{R}v_0$ *stable par* f.

Démonstration

et p la projection sur $\mathbb{R}v_0$ *parallèlement à* V
Il est facile de voir que si $x = av_0 + v$ *où* $a \in \mathbb{R}$, $v \in V$, *on a* $f^n(x) = p(x) + g^n(v)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *d'où*

$$\|f^n(x) - p(x)\| \leq \|g^n\|\|v\|$$

où $\|g^n\| \sim \rho(g)^n$. *Fixons* r *tel que* $\rho < r < 1$. *On a alors,* $\forall x \in \mathbb{R}^d$,

$$\lim_{n\to\infty} r^{-n}\|f^n(x) - p(x)\| = 0.$$

Soit $\pi' \in \mathbb{R}^d$ *tel que* $\forall j, p(e_j) = \pi'_j v_0$. *On obtient*

$$r^{-n}\sup_{i,j}|p_{i,j}^{(n)} - \pi'_j| = r^{-n}\sup_j\|f^n(e_j) - p(e_j)\| \to 0.$$

Démonstration

En particulier, pour tout i, j, $p_{i,j}^{(n)} \to \pi'_j$ *; la remarque préalable au théorème permet d'en déduire que* $\pi' = \pi$ *et le résultat.*

Annexe

Algorithme de stratégie optimale

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import itertools
import numpy.random as rd

def V(A,B, S,v):  #fonction caractéristique d'un boycott
    Apr=[]
    Bpr=[]
    for joueur in S:
        if joueur in A: Apr.append(joueur)
        if joueur in B: Bpr.append(joueur)
    Apr=Apr+S
    Bpr=Bpr +S
```

Annexe

Algorithme de stratégie optimale

```
def stratégie_optimale(joueur,P, jeux_de_boycott,jeu_initial
    ):
    m = len(jeux_de_boycott)
    y=[[0]for i in range(m)]
    for i in range (m):
        def Z(S):
            return V(jeux_de_boycott[i][0]
                ,jeux_de_boycott[i][1],S,v)
        y[i][0]=valeur_de_shapley(joueurs,Z)[joueur]
    y=np.array(y)
    inv_P=np.linalg.inv (P)
    index_max = np.argmax(y)

# Construire le vecteur x optimal
    x_optimal = np.zeros(4**2)
```

Annexe

Algorithme de stratégie optimale

```
    inv_P=np.linalg.inv (P)
    index_max = np.argmax(y)

# Construire le vecteur x optimal
    x_optimal = np.zeros(4**2)
    x_optimal[index_max] = 1



    strt_optimale =np.dot(  inv_P, x_optimal)
```

Annexe

Algorithme de stratégie optimale

```
def valeur_de_shapley(joueurs,v):
    D={player:0 for player in joueurs}
    z=0
    for joueur in joueurs:
        jmi=[]
        for ply in joueurs:
            if ply != joueur:
                jmi.append(ply)
        for S in sous_listes(jmi):
            w=( factorial_iterative(len(S))  *
                factorial_iterative(len(joueurs)-len(S
                )-1) )/ factorial_iterative(len(joueurs
                ))
            d= v(S+[joueur])-v(S)
```

Annexe

Algorithme de stratégie optimale

```
vshap=[[0 for i in range (4**2)] for j in range (2)]
for i in range(2):
        for j in jeux_de_boycott:
            k=jeux_de_boycott.index(j)
            def N(S) :
                return  V(j[0],j[1],S,v)
            w= valeur_de_shapley(joueurs,N)
            p=w[i+1]
            vshap[i][k]=float( p)

vshap=np.array(vshap)
C= np.identity( len(M) )
X=[i for i in range (25)]
```

Annexe

Algorithme de stratégie optimale

```
for i in range( len(X) ):
    C = C.dot(M)
    k=np.dot(C,T)
    print(f"étape {i}:\n P^{i}=", C)
    gain=np.dot(vshap,k)
    B[:, i] = gain.flatten()

for j in range( 2):

    plt.plot(X, B[j,:], label=f"Esperance du gain du joueur{
        +1}")
for j in range( 2):
    if j==0:
```

Annexe

Impact maximal

Démonstration

L'impact sur i *est* $\phi_i(v) - \phi_i(v_{\overline{B}}) \geq \phi_i(v) - \phi_i(v_{N\setminus\{j\}})$ *pour tout* $j \in B$ *puisque le jeu est convexe. L'impact sur* $j \in B$ *est* $\phi_j(v) - \phi_j(v_{N\setminus\{i\}})$*, ce qui est égal à* $\phi_i(v) - \phi_i(v_{N\setminus\{j\}})$ *en raison de l'équilibre de* ϕ*. L'impact sur* i *est supérieur ou égal à l'impact sur* $j \in B$*. L'impact sur un joueur non participant* $k \in \overline{A} \cap \overline{B}$ *est*

$$\phi_k(v) - \phi_k(v_{N\setminus\{i\}}) - \phi_k(v_{\overline{B}}) + \phi_k(v_{\overline{B}\setminus\{i\}}).$$

Démonstration

Par équilibre, cela équivaut à

$$\phi_i(v) - \phi_i(v_{N\backslash\{k\}}) - \phi_i(v_{\overline{B}}) + \phi_i(v_{\overline{B}\backslash\{k\}}),$$

ce qui, par monotonie et $\overline{B}\backslash\{k\} \subset N\backslash\{k\}$, *est borné par l'impact sur* i

Solution du système linéaire

Démonstration

(Solution) Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ *et supposons que* $AA^+b = b$. *Alors, tout vecteur de la forme*

$$x = A^+b + (I - A^+A)y \quad \text{où} \quad y \in \mathbb{R}^n \text{ est arbitraire} \tag{4}$$

est une solution de

$$Ax = b. \tag{5}$$

De plus, toutes les solutions de (5) sont de cette forme.

Démonstration

(Unicité) Une solution de l'équation linéaire

$$Ax = b \quad ; \quad A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad b \in \mathbb{R}^m \tag{6}$$

est unique si et seulement si $A^+A = I$ *; de manière équivalente, il y a une solution unique si et seulement si* $\mathcal{N}(A) = \{0\}$. *La première équivalence découle immédiatement de la forme de la solution générale en (4). La seconde suit en notant que la matrice* $n \times n$ $A^+A = I$ *seulement si* $r = n$ *où* $r = rang(A)$ *(rappel* $r \leq n$*). Mais le rang de* A *est* n *si et seulement si* A *est injective ou* $\mathcal{N}(A) = \{0\}$.