

# Étude de l'influence des paramètres du cordage sur les performances et les sensations de jeu de la raquette de Tennis

**TIPE 2023-2024  
JEUX ET SPORTS**

TOUFELAZ OMAR

SCEI : 18301

# Introduction :



Figure-1 : raquette sur une machine à cordage

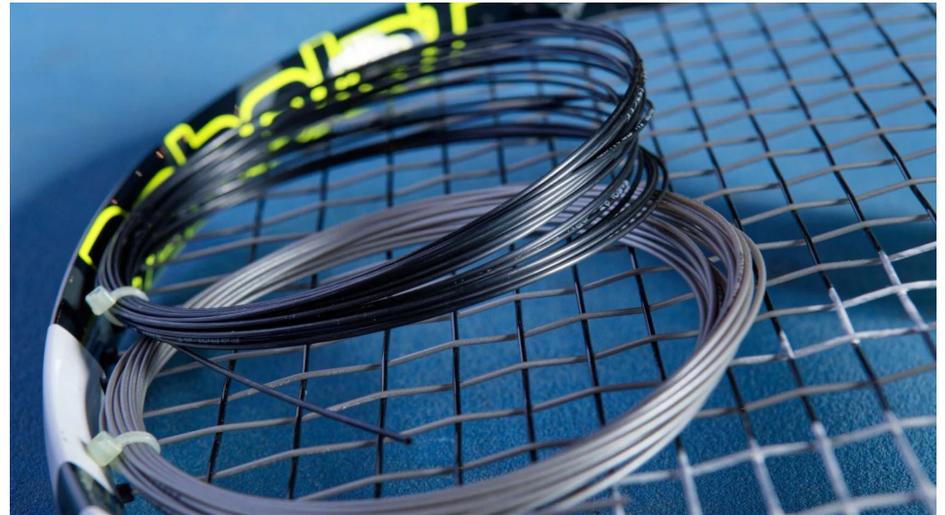


Figure-2 : cordages de raquette

# Problématique :

Comment déterminer l'évolution des performances et des caractéristiques de jeu de la raquette de tennis en fonction de la tension appliquée au cordage et adapter celle-ci aux besoins du joueur ?



Figure-3 : Björn Borg et John McEnroe, deux joueurs de légende ayant pour tension de jeu respective 40kg et 25kg.

# Sommaire :

1

- Étude du coefficient de restitution.
- Étude énergétique de l'impact avec la balle .

2

- Analyse du comportement vibratoire et fréquentielle du cordage.
- Détermination du « Sweet spot ».

3

- Recommandations pour améliorer le confort de jeu et optimiser les performances des joueurs.

# Etude du COR : définition

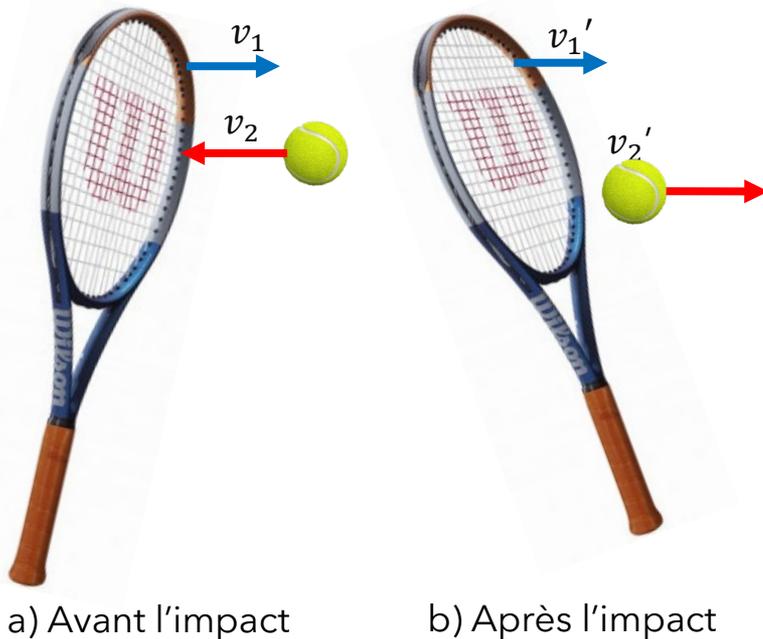


Figure-4 : Rebond de la balle sur la raquette

- Rapport des vitesses relatives avant et après l'impact.
- $$\text{COR} = \frac{v_2' - v_1'}{v_2 - v_1}$$
 compris entre 0 et 1
- Si  $\text{COR}=1$  → choc élastique (pas de dissipation)
- Si  $\text{COR}=0$  → choc mou (pas de rebond)
- Si  $0 < \text{COR} < 1$  → choc inélastique (cas réel)

# Etude du COR : mesure

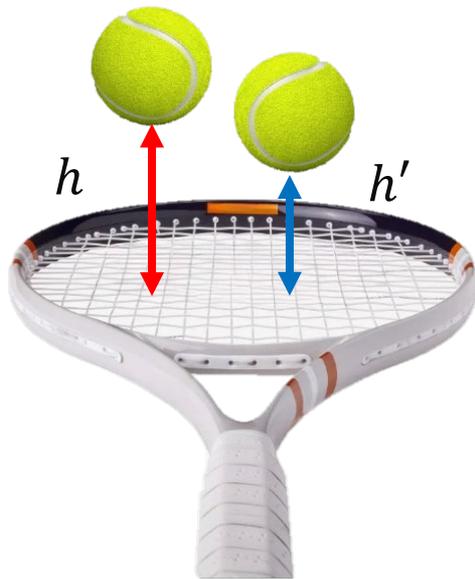


Figure-5 : Rebond de la balle sur la raquette immobile

- La raquette est maintenue immobile.
- $COR = \frac{v_2'}{v_2}$
- La balle est uniquement soumise au poids avant et après l'impact.
- La conservation de l'énergie mécanique assure que:  $\frac{1}{2}m_b v_2^2 = m_b g h$ ,  $\frac{1}{2}m_b v_2'^2 = m_b g h'$
- On a alors :

$$COR = \sqrt{\frac{h'}{h}}$$

# Etude du COR : expérience



Figure-6 : mesure expérimentale du COR

- La raquette est fixée à l'aide d'un support.
- Une caméra ralentie à 240ips filme le rebond.
- La balle est à chaque fois lancée dans les mêmes conditions.
- La hauteur maximale du rebond est mesurée à plusieurs reprises.

# Etude du COR : résultats

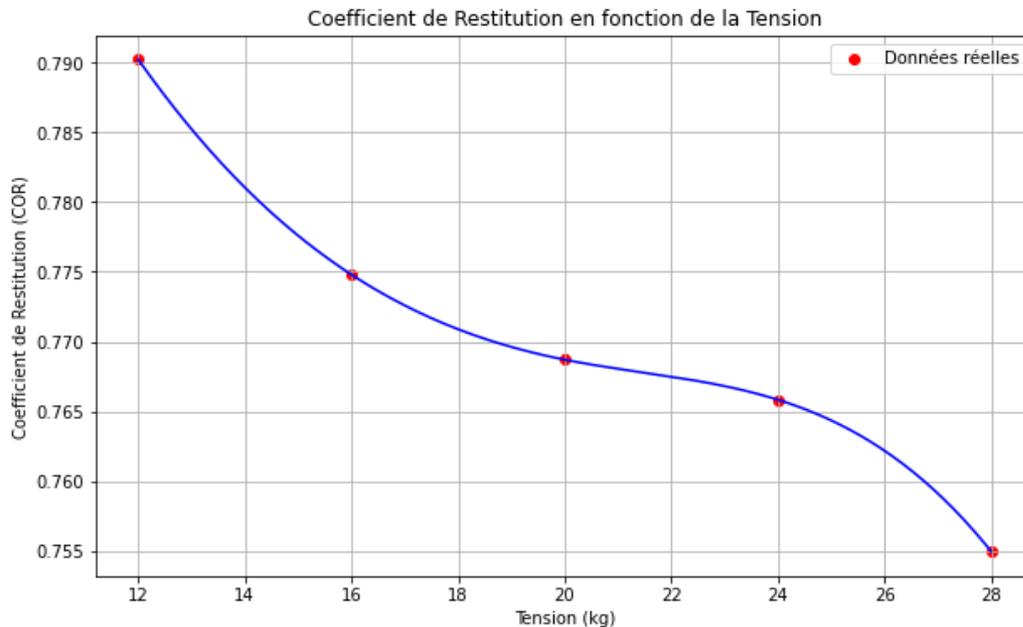
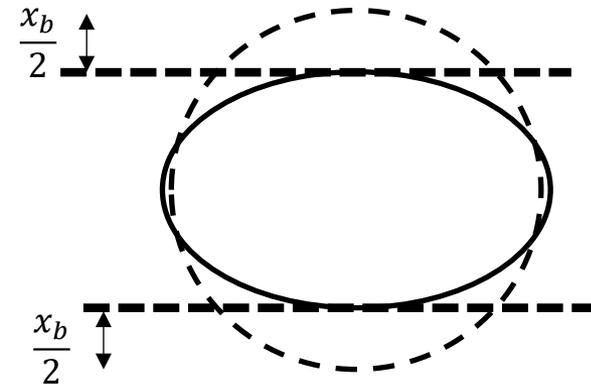
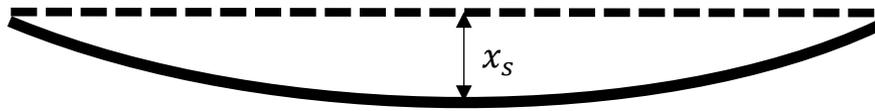


Figure-7 : résultats de la mesure du COR

- Diminution du COR avec la tension.
- Suppose une diminution de la puissance de frappe.
- Variation trop faible pour justifier la différence de sensations.

# Etude énergétique : modélisation



a) Cordage déformé par l'impact, état initial en pointillé    b) balle déformée par l'impact, état initial en pointillé

Figure-8 : déformations lors de l'impact

# Etude énergétique : modélisation

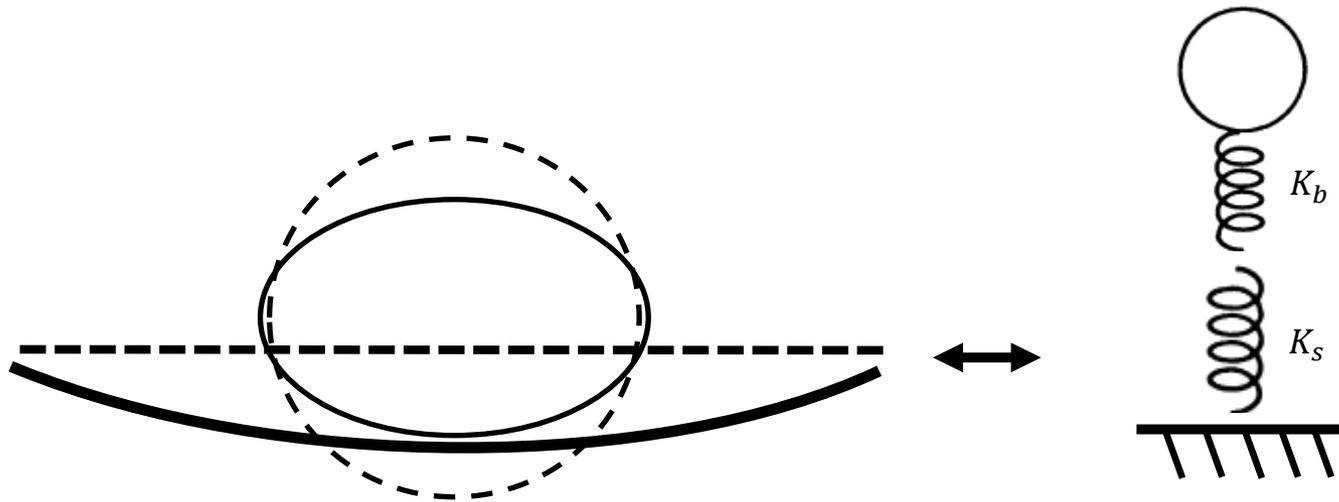


Figure-9 : schéma de la modélisation

# Etude énergétique : mesure de la raideur



Poids

Pince fixatrice

$$K_S = \frac{F}{x_S}$$

mètre

Figure-10 : dispositif expérimental pour la mesure de la raideur

# Etude énergétique : raideur trouvée

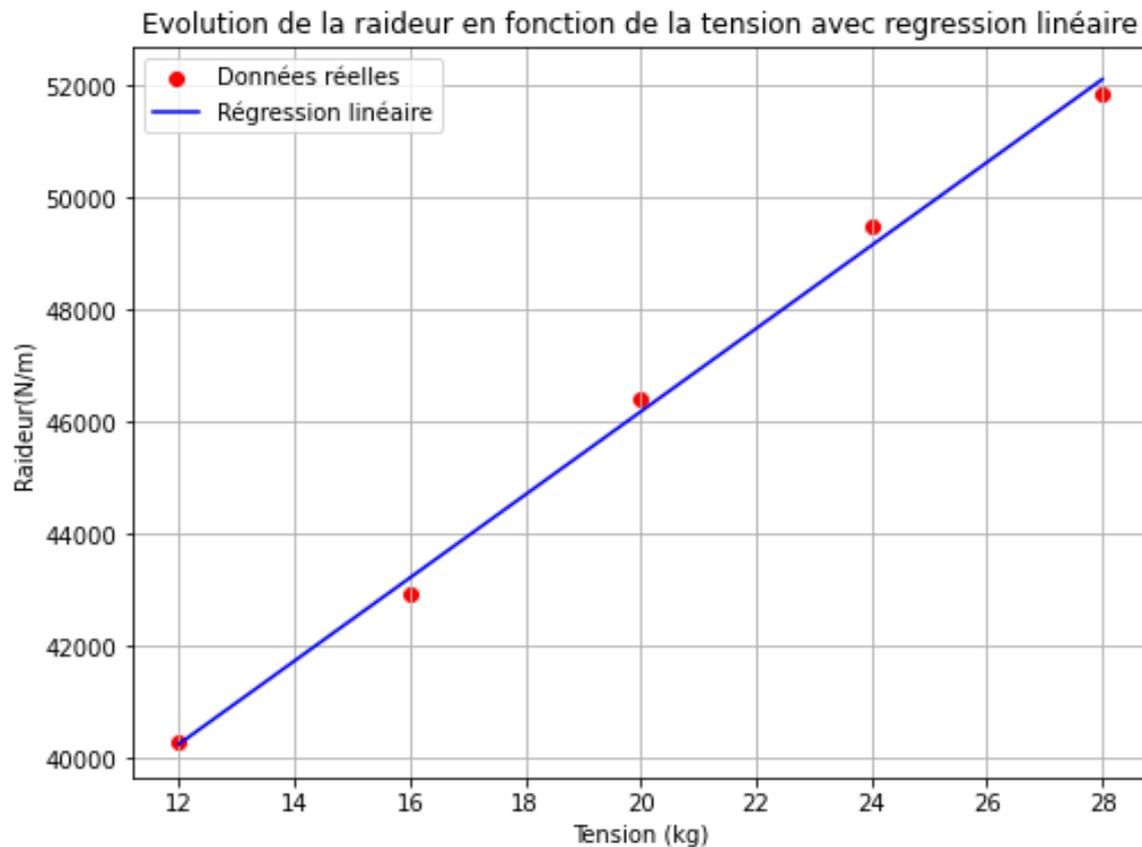


Figure-11 : résultats de la mesure de la raideur

# Etude énergétique : calcul théorique des rapports d'énergie

- Le principe des actions réciproques assure que :

$$K_s x_s = K_b x_b \text{ donc } x_s = \frac{K_b x_b}{K_s}, x_b = \frac{K_s x_s}{K_b}$$

- On en déduit alors les rapports de déformation :

$$\frac{x_b}{x_t} = \frac{K_s}{K_s + K_b} \text{ et } \frac{x_s}{x_t} = \frac{K_b}{K_s + K_b}$$

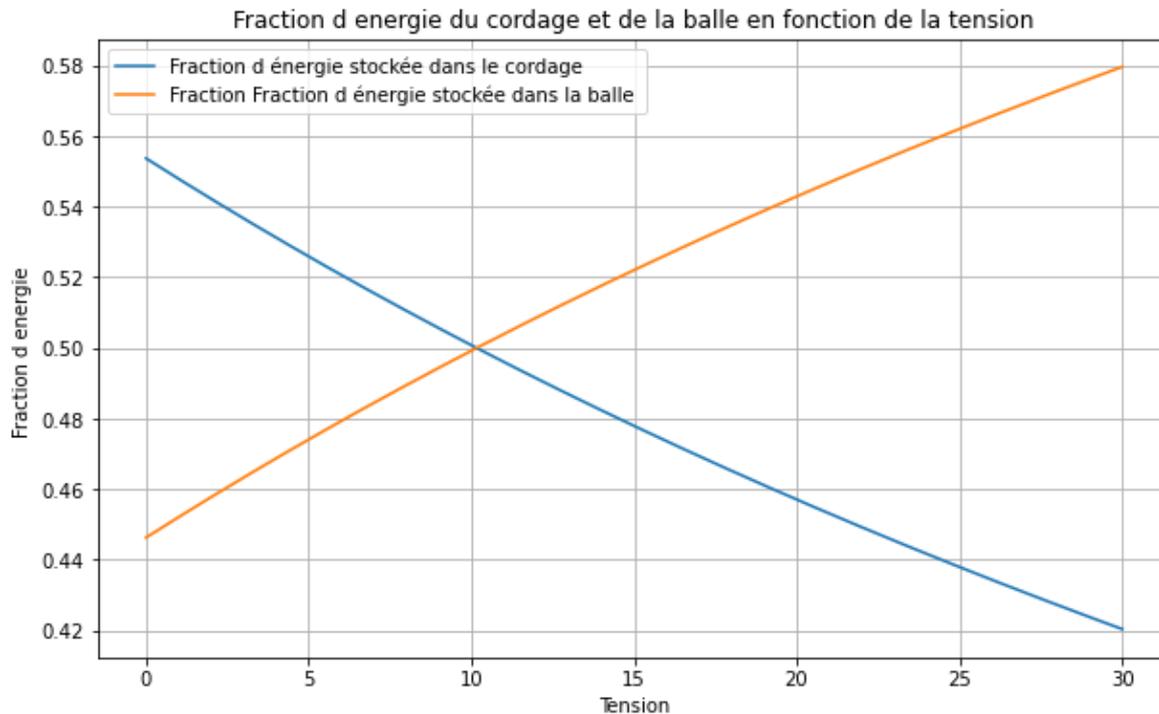
- L'énergie stockée dans un ressort est donnée par :

$$E = \frac{1}{2} K x^2$$

- Ainsi les expressions des rapports d'énergie stocké dans le cordage et la balle sont :

$$\boxed{\frac{E_s}{E_t} = \frac{K_b}{K_s + K_b} \text{ et } \frac{E_b}{E_t} = \frac{K_s}{K_s + K_b}}$$

# Etude énergétique : rapports d'énergie théoriques



- Haute tension: favorise le contrôle et la précision
- Basse tension: favorise la puissance et les sensations

Figure-12 : résultats théoriques du stockage d'énergie

# Étude du comportement vibratoire et fréquentiel du cordage :

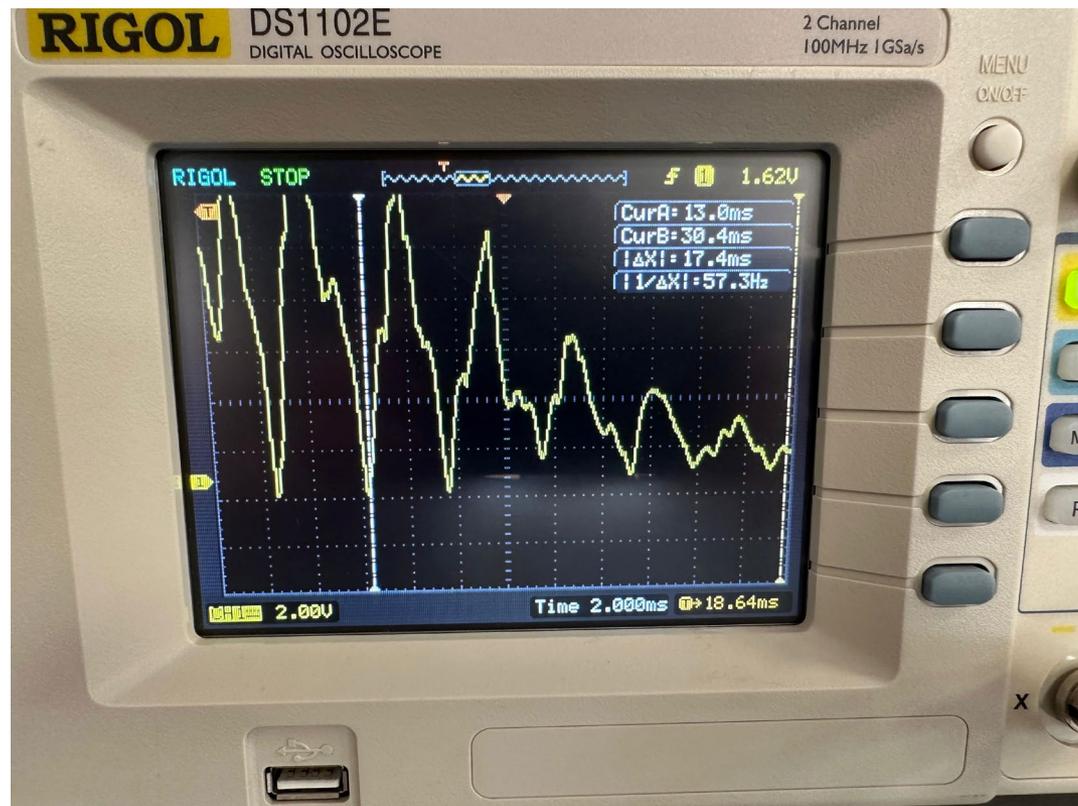
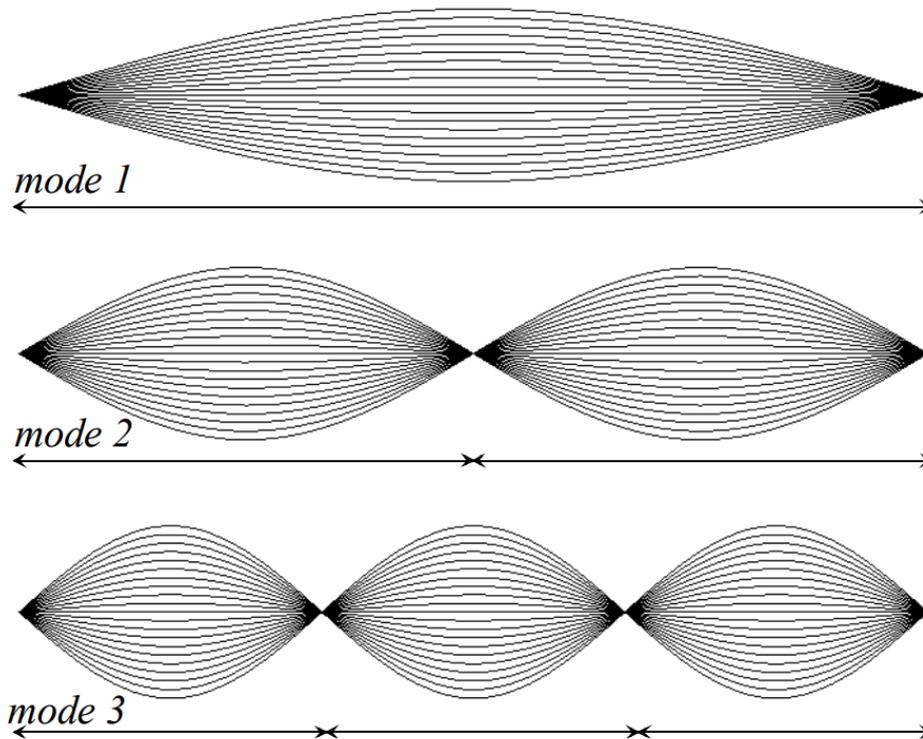


Figure-13 : mise en évidence expérimentale des vibrations du cordage

# Étude du comportement vibratoire et fréquentiel du cordage : modélisation



- Le cordage est assimilé à une superposition de corde vibrante .
- La fréquence de vibration du cordage est la fréquence de vibration moyenne des cordes.

# Étude du comportement vibratoire et fréquentiel du cordage : étude théorique

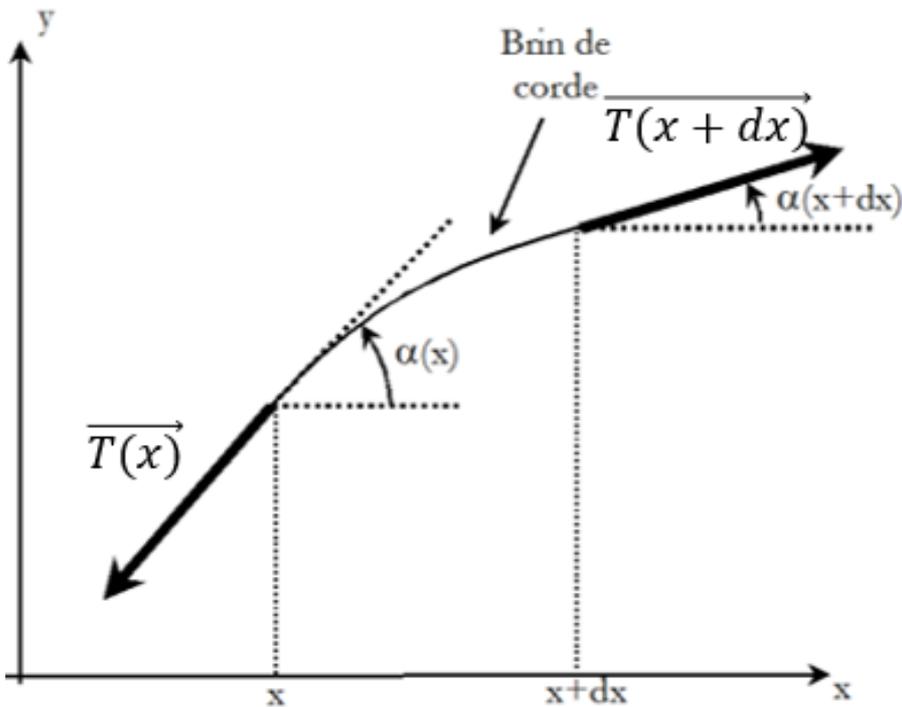


Figure-15 : schéma illustratif

- Equation de propagation:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Avec  $\mu$  la masse linéique de la corde

- Les conditions aux limites de la solution stationnaire imposent :

$$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Avec  $L$  la longueur de la corde

# Étude du comportement vibratoire et fréquentiel du cordage : étude théorique

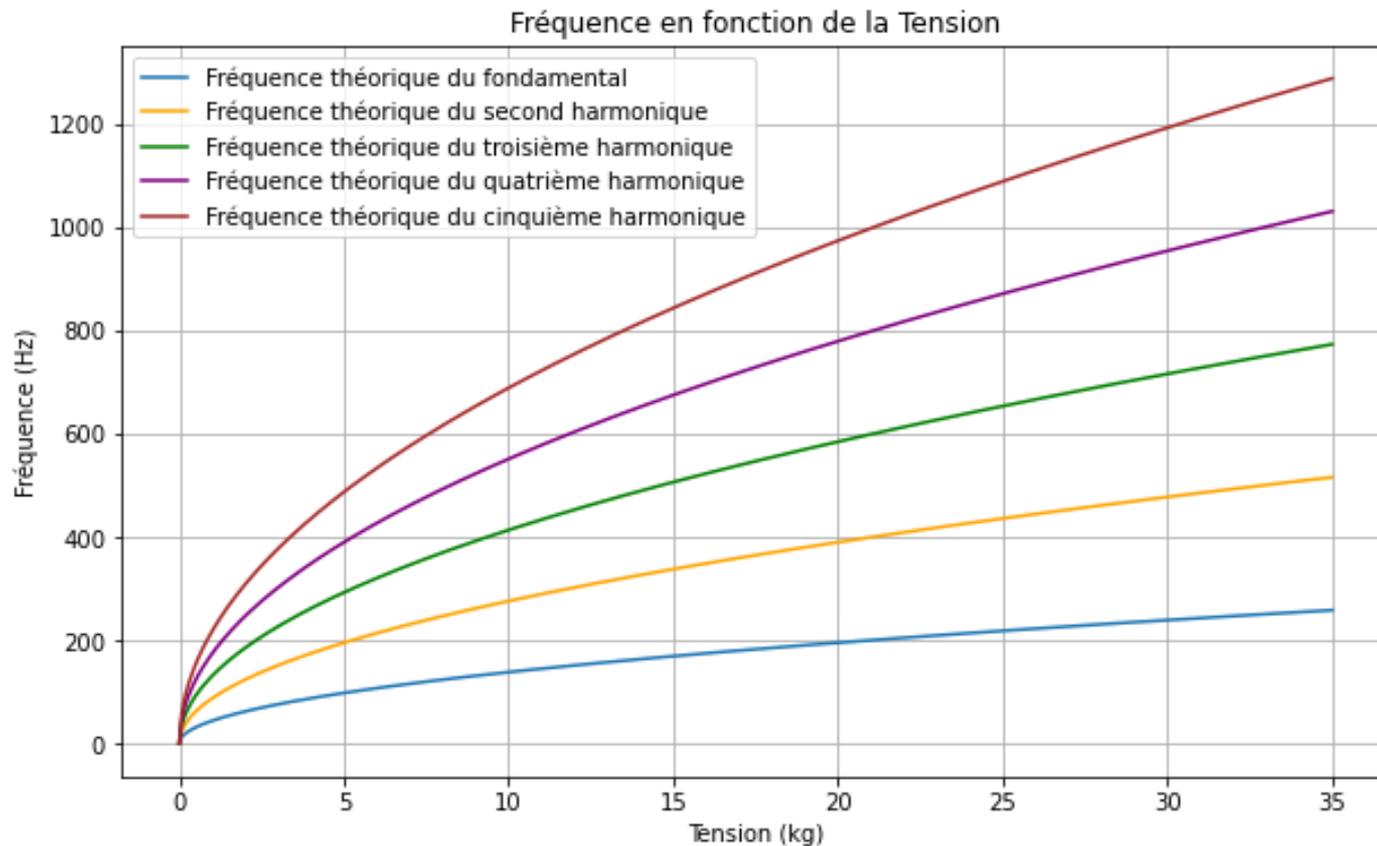


Figure-16 : évolution des fréquences de vibrations des 5 premiers modes

# Étude du comportement vibratoire et fréquentiel du cordage : expérience

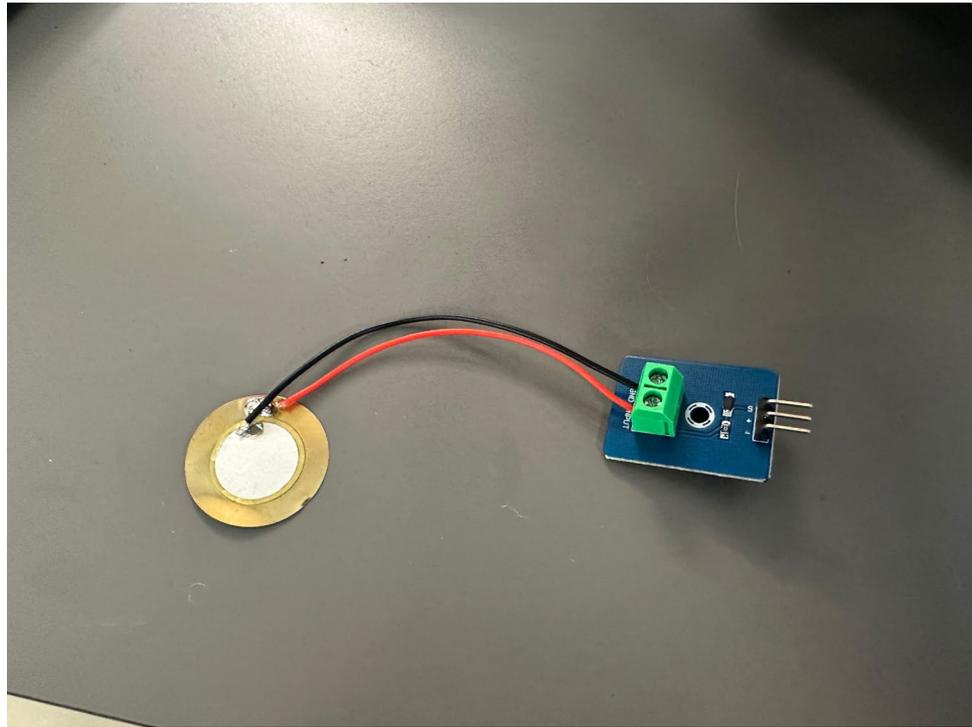


Figure-17 : capteur piézoélectrique

# Étude du comportement vibratoire et fréquentiel du cordage : expérience



Figure-18 : fixation de la raquette

# Étude du comportement vibratoire et fréquentiel du cordage : expérience

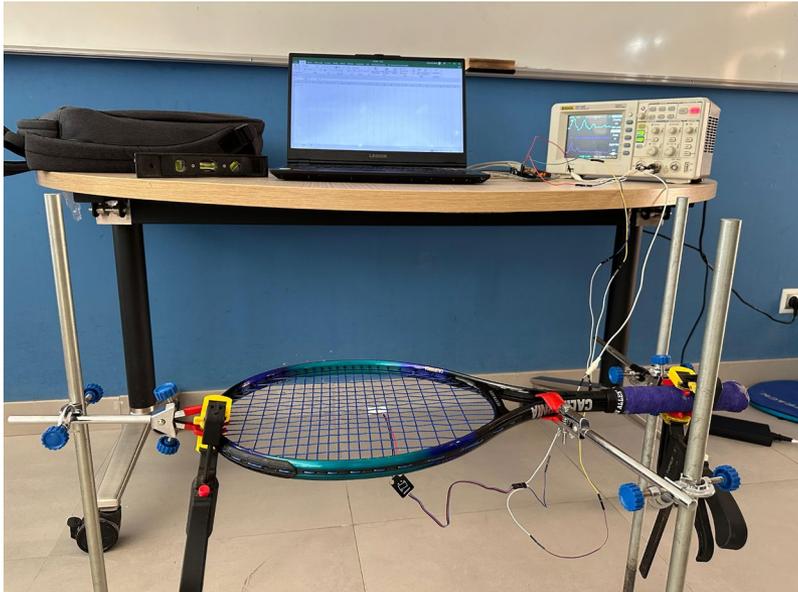


Figure-19 : a) montage global

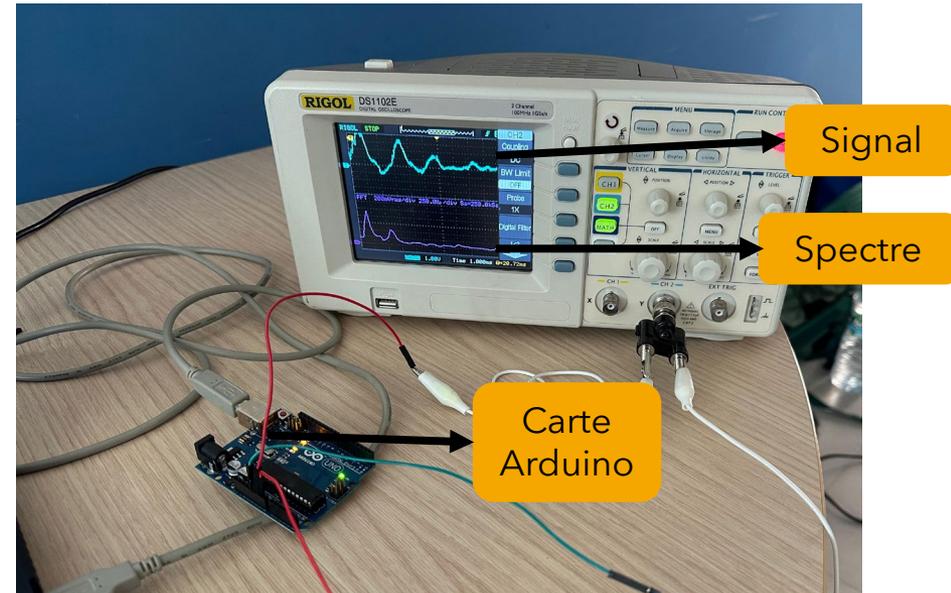


Figure-19 : b) signal reçu par l'oscilloscope

# Étude du comportement vibratoire et fréquentiel du cordage : résultats

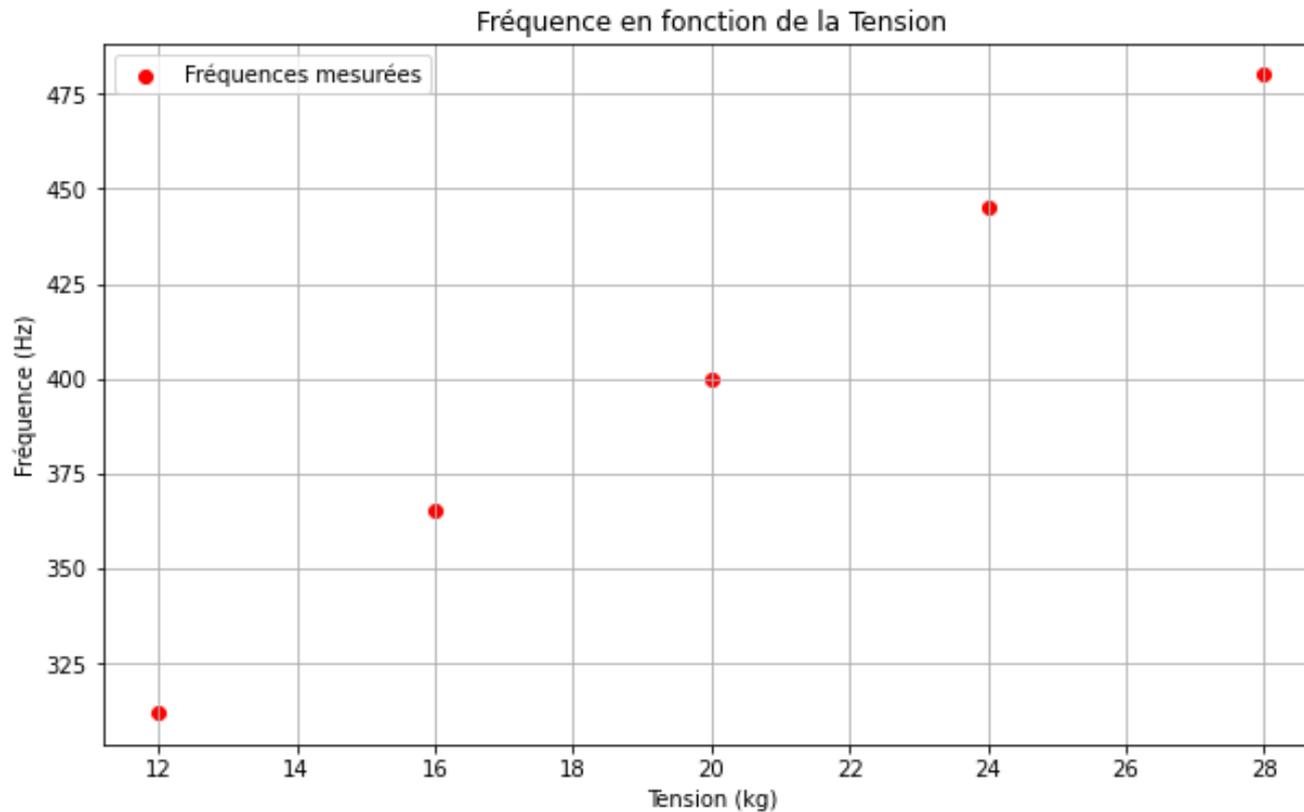


Figure-20 : fréquences mesurées

# Étude du comportement vibratoire et fréquentiel du cordage : résultats

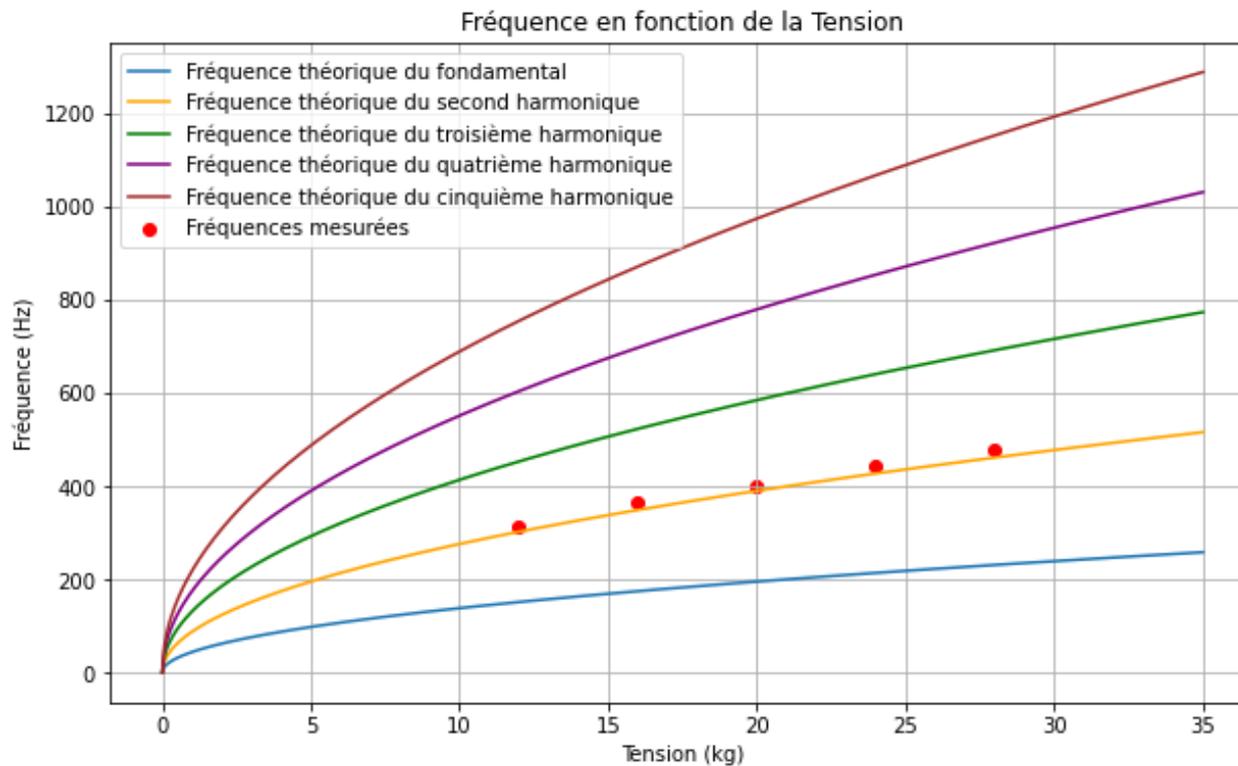


Figure-21 : fréquences mesurées et théoriques

# Étude du comportement vibratoire et fréquentiel du cordage : résultats

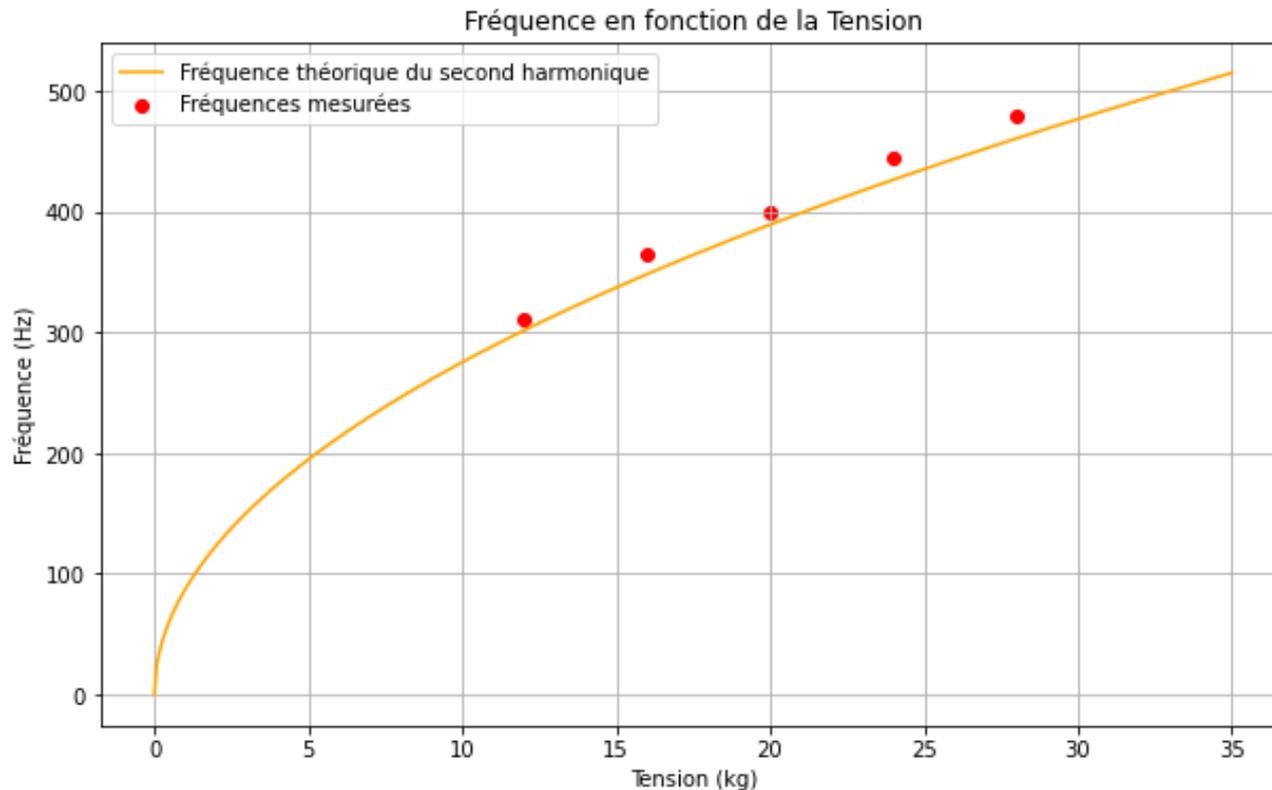


Figure-22 : fréquences mesurées et théoriques : 2<sup>e</sup> harmonique

# Étude du comportement vibratoire et fréquentiel du cordage : Sweet spot



Figure-23 : Illustration du Sweet spot

# Étude du comportement vibratoire et fréquentiel du cordage : Sweet spot

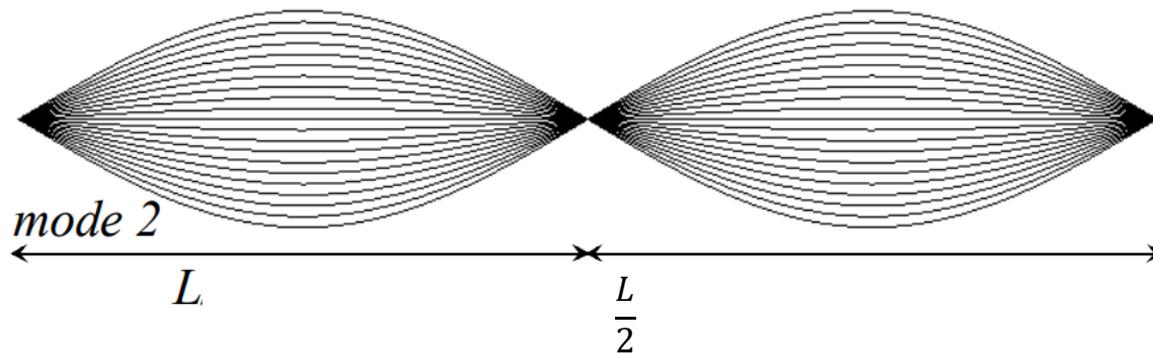


Figure-24 : 2<sup>e</sup> mode de vibration d'une corde vibrante

- Le Sweet spot correspond à un nœud de vibration .
- Selon notre modèle celui-ci se trouve en :  
 $x = 15cm$

# Étude du comportement vibratoire et fréquentiel du cordage : Sweet spot

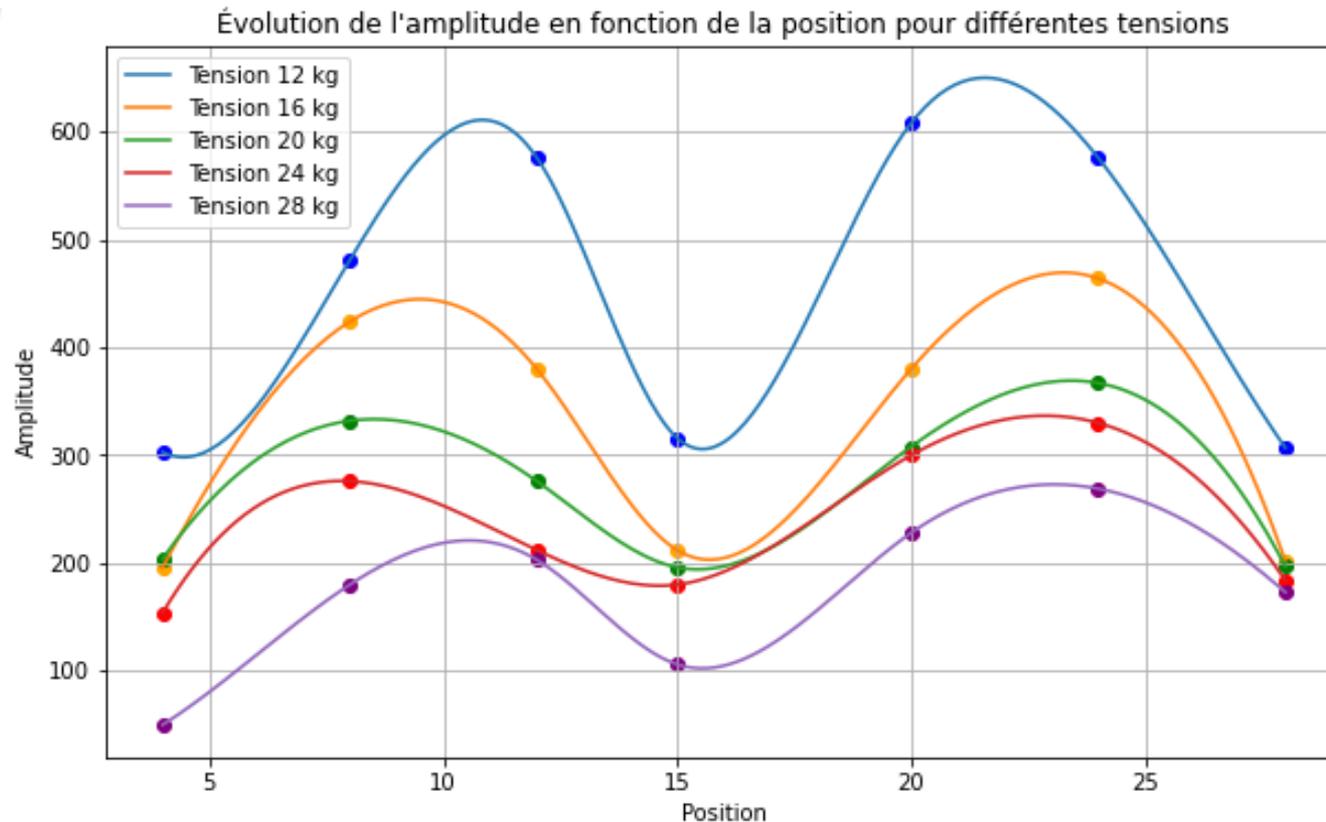


Figure-25 : évolution de l'amplitude des vibrations selon la position pour différentes tensions

# Conclusion et discussion :

	TENSION FAIBLE	TENSION HAUTE
COR	ÉLEVÉ	BAS
SENSATION DE JEU	IMPORTANTE	FAIBLE
FREQUENCES DES VIBRATION	BASSES	ÉLEVÉES
AMPLITUDE DES VIBRATIONS	ÉLEVÉE	FAIBLE
SWEET SPOT	LARGE	PETIT

# Conclusion et discussion :

	<b>BASSE TENSION</b>	<b>HAUTE TENSION</b>
AVANTAGE	+PUISSANCE,+CONFORT,	+CONTRÔLE,+PRECISION,
INCONVENIENT	-CONTRÔLE,-PRECISION	-PUISSANCE,+RISQUE DE BLESSURE

*MERCI POUR VOTRE  
ATTENTION*

FIN DE LA PRÉSENTATION

# ANNEXE : Expression du COR

- Avant et après l'impact, la balle est uniquement soumise à son poids qui est conservative. La conservation de l'énergie mécanique assure alors que :

$$\frac{1}{2}m_b v_2^2 = m_b g h$$

$$\frac{1}{2}m_b v_2'^2 = m_b g h'$$

- En effectuant le rapport des deux expressions on a :

$$\frac{v_2'^2}{v_2^2} = \frac{h}{h'}$$

- Il en résulte que :

$$\boxed{COR = \sqrt{\frac{h'}{h}}}$$

# ANNEXE : Codes python tracé du COR

```
"courbe COR"

# données experimentales
tensions = np.array([12, 16, 20, 24, 28])
h= np.array([0.6244, 0.6003, 0.5909, 0.5865,0.57])#rapport des hauteurs mesurées
COR=np.sqrt(h)

# Interpolation des points
f_spline = interp1d(tensions, COR, kind='cubic')

# Génération des points pour l'interpolation
tensions_interp = np.linspace(min(tensions), max(tensions), 500)
COR_interp = f_spline(tensions_interp)

# Tracé
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.scatter(tensions, COR, color='red', label='Données réelles')
plt.plot(tensions_interp, COR_interp, color='blue')
plt.xlabel('Tension (kg)')
plt.ylabel('Coefficient de Restitution (COR)')
plt.title('Coefficient de Restitution en fonction de La Tension')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

# ANNEXE : mesure de la raideur

Pince fixatrice



Masses



mètre



# ANNEXE : Code python pour le tracé de la raideur

```
"Courbe donnant l' evolution de la raideur avec regression lineaire"  
  
# données experimentales  
tensions = np.array([12, 16, 20, 24,28]) # Tension en kg  
raideur = np.array([40279, 42906, 46408, 49473,51837]) # Raideur correspondante en N/m  
Kb=38878 #Raideur de la balle  
  
# Reshape des données pour sklearn  
tensions_resaped = tensions.reshape(-1, 1)  
  
# Création du modèle  
model = LinearRegression()  
# Entraînement du modèle  
model.fit(tensions_resaped, raideur)  
  
# Prédiction avec le modèle  
raideur_pred = model.predict(tensions_resaped)  
  
# Tracé des données et de la régression linéaire  
plt.figure(figsize=(8, 6))  
plt.scatter(tensions, raideur, color='red', label='Données réelles')  
plt.plot(tensions, raideur_pred, color='blue', label='Régression linéaire')  
plt.xlabel('Tension (kg)')  
plt.ylabel('Raideur(N/m)')  
plt.title('Evolution de La raideur en fonction de la tension avec regression linéaire')  
plt.legend()  
plt.grid(True)  
plt.show()
```

# ANNEXE : calcul théorique des rapports d'énergie

- Le principe des actions réciproques assure que :

$$K_s x_s = K_b x_b \text{ donc } x_s = \frac{K_b x_b}{K_s}, x_b = \frac{K_s x_s}{K_b}$$

- On en déduit alors les rapports de déformation :

$$\frac{x_b}{x_t} = \frac{x_b}{x_s + x_b} = \frac{K_s}{K_s + K_b} \text{ et } \frac{x_s}{x_t} = \frac{x_s}{x_s + x_b} = \frac{K_b}{K_s + K_b}$$

- L'énergie stockée dans un ressort est donnée par :

$$E = \frac{1}{2} K x^2$$

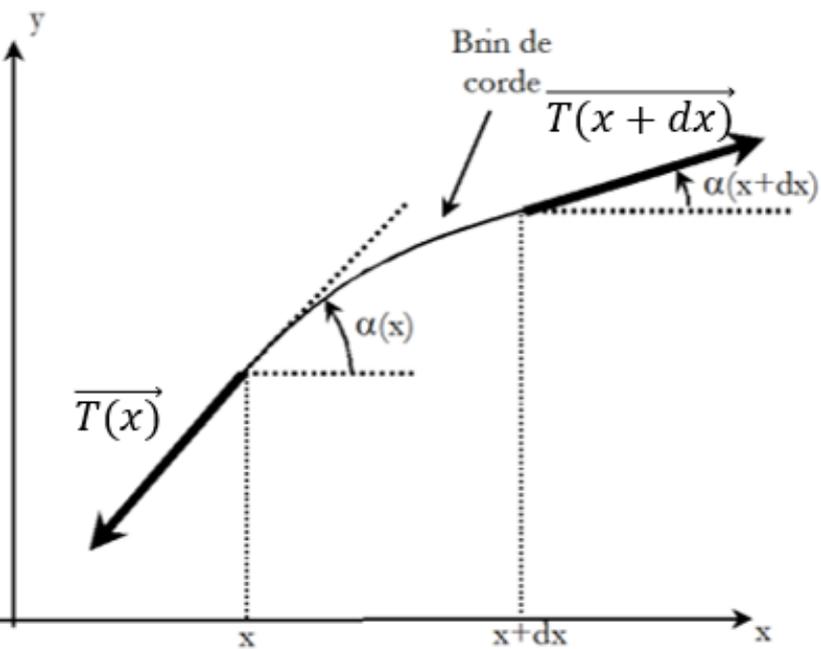
- Ainsi les expressions des rapports d'énergie stocké dans le cordage et la balle sont :

$$\boxed{\frac{E_s}{E_t} = \frac{K_b}{K_s + K_b} \text{ et } \frac{E_b}{E_t} = \frac{K_s}{K_s + K_b}}$$

# ANNEXE : Code python pour le tracé des fractions d'énergie

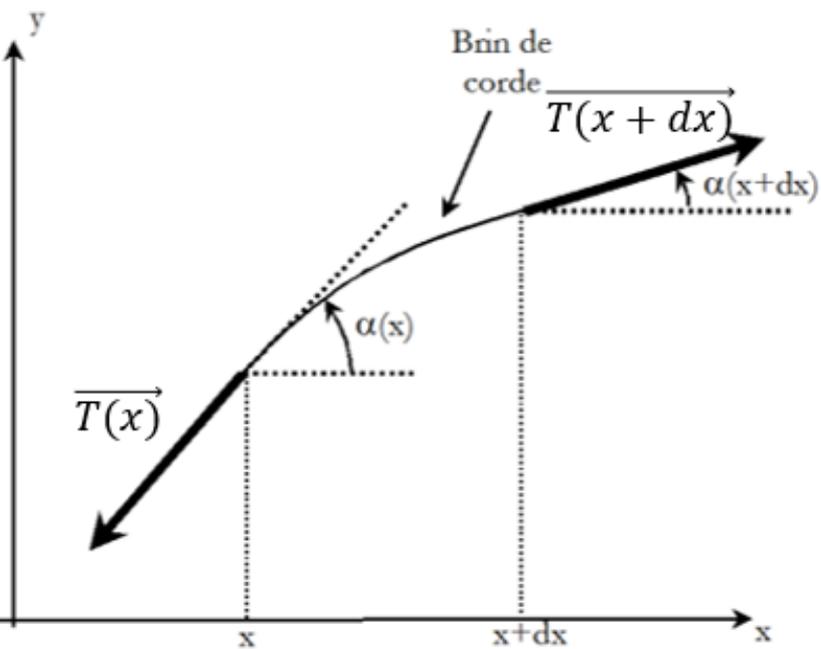
```
"courbe donnant les fractions d'énergie stockée"  
  
#enregistrement de la raideur prédite par le modèle  
tensions_range = np.linspace(0, 30, 1000)  
tensions_range_reshaped = tensions_range.reshape(-1, 1)  
  
# Prédiction avec le modèle pour les tensions dans l'intervalle 0-30 kg  
raideur_range_pred = model.predict(tensions_range_reshaped)  
  
# Affichage des valeurs de raideur pour l'intervalle de tension  
raideur_range_list = raideur_range_pred.tolist()  
  
#calcul des fractions d'énergie  
fraction_cordage = ( Kb ) / ( raideur_range_pred + Kb )  
fraction_balle = ( raideur_range_pred ) / ( raideur_range_pred + Kb )  
  
# Tracé de la courbe  
plt.figure(figsize=(10, 6))  
plt.plot(tensions_range, fraction_cordage,label='Fraction d énergie stockée dans le cordage ')  
plt.plot(tensions_range, fraction_balle,label='Fraction Fraction d énergie stockée dans la balle ')  
plt.legend()  
plt.xlabel('Tension')  
plt.ylabel('Fraction d energie ')  
plt.title('Fraction d energie du cordage et de la balle en fonction de la tension')  
plt.grid(True)  
plt.show()
```

# ANNEXE : Equation de propagation dans une corde vibrante



- Hypothèses et données :
- $\mu$  : masse linéique de la corde
- $L$  : longueur de la corde
- $T(x)$  : tension en  $x$
- Le poids est négligé
- Approximation des petits angles

# ANNEXE : Equation de propagation dans une corde vibrante



- Appliquons le principe fondamentale de la dynamique appliqué à la portion entre  $x$  et  $x+dx$  :

$$0 = T(x + dx, t) \cos(\alpha(x + dx, t)) - T(x) \cos(\alpha(x, t))$$

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(x + dx, t) \sin(\alpha(x + dx, t)) - T(x) \sin(\alpha(x, t))$$

L'approximation des petits angles donne :

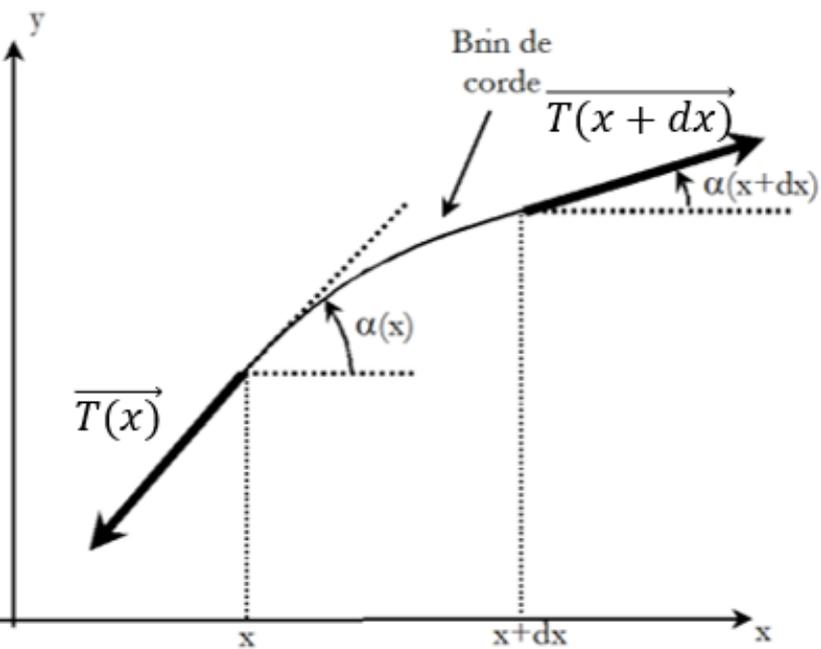
$$\cos(\alpha(x, t)) \approx 1$$

$$\sin(\alpha(x, t)) \approx \alpha(x, t)$$

Ainsi la première équation devient :

$$T(x + dx, t) = T(x) = \text{Cte} = T$$

# ANNEXE : Equation de propagation dans une corde vibrante



- Quant à la deuxième équation :

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\alpha(x+dx, t) - T\alpha(x, t) = T \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx$$

- Or  $\alpha(x, t) \approx \tan(\alpha(x, t)) = \frac{\partial y}{\partial x}$
- Ainsi en injectant cette expression et en simplifiant on a bien :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

- Il s'agit de l'équation d'Alembert.

# ANNEXE : Recherche d'une solution stationnaire

- Cherchons une solution de forme  $y = f(t)g(x)$
- La séparation des variables dans l'équation nous donne :

$$\frac{g''(x)}{g(x)} = \frac{\mu}{T} \frac{f''(t)}{f(t)} = \text{Cte}$$

- Les solutions pour  $\text{Cte} \geq 0$  ne fournissent pas de solutions pertinentes.
- On en déduit alors que  $\text{Cte} = -k^2$  et donc :

$$g''(x) + k^2 g(x) = 0$$

$$f''(t) + k^2 c^2 f(t) = 0 \text{ avec } c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

# ANNEXE : Recherche d'une solution stationnaire

- Nous obtenons ainsi les solutions sous la forme qui suit :

$$g(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$$

$$f(t) = C\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \text{ avec } \omega = kc$$

- Les conditions aux limites en  $x=0$  et  $x=L$  imposent à tout instant  $y(x) = 0$  on en déduit que :

$$A = 0 \text{ et } B \neq 0 \text{ donc } k = \frac{n\pi}{L} \text{ avec } n \text{ un entier naturel}$$

- Ainsi  $\omega = kc = \frac{n\pi c}{L}$ , or  $\omega = 2\pi f_n$

- On en déduit que :

$$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

# ANNEXE : Code python pour le tracé des fréquences

```

"tracé des fréquences theoriques et experimentales"

nu = 1250*np.pi*((1.4*0.001)/2)**2# Masse linéique du cordage en polyester en kg/m
# Données mesurées
tensions_measured_kg = np.array([12, 16, 20, 24, 28]) # Tensions en kg
frequencies_measured = np.array([312, 365, 400, 445, 480]) # Fréquences mesurées en Hz
# Tensions pour le calcul théorique
tensions_kg = np.linspace(0, 35, 500)
# Longueurs des cordes en mètres
longueur_cordes = np.array([23, 27, 29.5, 31, 32.5, 33, 33.5, 33.5, 33.5, 33, 32.5,
                             31, 29.5, 27, 25.5, 23, 16.5, 20, 22, 24, 25.5, 26, 26.7,
                             27, 27, 27, 27, 26.5, 25.5, 24.5, 24, 22, 19.5]) * 0.01

# Calcul des fréquences théoriques pour chaque corde et chaque tension
frequence_cordes = (1 / (2 * longueur_cordes[:, None])) * np.sqrt(tensions_kg/ nu)

# Calcul des fréquences moyennes théoriques
frequence_fondamentale = np.mean(frequence_cordes, axis=0)
frequences_h2 = 2 * frequence_fondamentale
frequences_h3 = 3 * frequence_fondamentale
frequences_h4 = 4 * frequence_fondamentale
frequences_h5 = 5 * frequence_fondamentale

# Tracé des résultats
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(tensions_kg, frequence_fondamentale, label='Fréquence théorique du fondamental')
plt.plot(tensions_kg, frequences_h2, color='orange', label='Fréquence théorique du second harmonique')
plt.plot(tensions_kg, frequences_h3, color='green', label='Fréquence théorique du troisième harmonique')
plt.plot(tensions_kg, frequences_h4, color='purple', label='Fréquence théorique du quatrième harmonique')
plt.plot(tensions_kg, frequences_h5, color='brown', label='Fréquence théorique du cinquième harmonique')
plt.scatter(tensions_measured_kg, frequencies_measured, color='red', label='Fréquences mesurées')
plt.xlabel('Tension (kg)')
plt.ylabel('Fréquence (Hz)')
plt.title('Fréquence en fonction de La Tension')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

```

# ANNEXE : Code python pour la détermination du Sweet spot

```
"position sweet spot"
# Longueurs des cordes en mètres
longueur_cordes_vertical = np.array([23, 27, 29.5, 31, 32.5, 33, 33.5, 33.5, 33.5, 33, 32.5,
                                     31, 29.5, 27, 25.5, 23, 16.5])
longueur_cordes_horizontal=np.array([16.5, 20, 22, 24, 25.5, 26, 26.7,
                                     27, 27, 27, 27, 26.5, 25.5, 24.5, 24, 22, 19.5])
coordonée_sweet_spot=(np.mean(longueur_cordes_vertical)/2,np.mean(longueur_cordes_horizontal)/2)
```

# ANNEXE : Code python pour le tracé des amplitudes des vibrations

```

"tracé de l'amplitude des vibrations pour différentes tensions et différentes position"
# Données
positions = [4, 8, 12, 15, 20, 24, 28]
amp12 = [303, 481, 576, 316, 608, 576, 307]
amp16 = [196, 424, 380, 212, 380, 464, 202]
amp20 = [204, 332, 276, 196, 308, 367, 197]
amp24 = [154, 276, 212, 180, 300, 330, 184]
amp28 = [50, 180, 203, 106, 228, 269, 173]
# interpolation
positions_new = np.linspace(min(positions), max(positions), 300)

spl_12 = make_interp_spline(positions, amp12, k=3)
amp12_smooth = spl_12(positions_new)

spl_16 = make_interp_spline(positions, amp16, k=3)
amp16_smooth = spl_16(positions_new)

spl_20 = make_interp_spline(positions, amp20, k=3)
amp20_smooth = spl_20(positions_new)

spl_24 = make_interp_spline(positions, amp24, k=3)
amp24_smooth = spl_24(positions_new)

spl_28 = make_interp_spline(positions, amp28, k=3)
amp28_smooth = spl_28(positions_new)

# tracé
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(positions_new, amp12_smooth, label='Tension 12 kg')
plt.plot(positions_new, amp16_smooth, label='Tension 16 kg')
plt.plot(positions_new, amp20_smooth, label='Tension 20 kg')
plt.plot(positions_new, amp24_smooth, label='Tension 24 kg')
plt.plot(positions_new, amp28_smooth, label='Tension 28 kg')

plt.scatter(positions, amp12, color='blue', marker='o')
plt.scatter(positions, amp16, color='orange', marker='o')
plt.scatter(positions, amp20, color='green', marker='o')
plt.scatter(positions, amp24, color='red', marker='o')
plt.scatter(positions, amp28, color='purple', marker='o')

plt.xlabel('Position')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.title("Évolution de l'amplitude en fonction de la position pour différentes tensions")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

```