Analyse harmonique et dernier théorème de Fermat

La théorie de Fourier répond en général au problème de la reconstruction d'une fonction à partir de fonctions plus élémentaires. Une telle démarche est analogue à la résolution d'un puzzle et est en conséquence en accord avec le thème.

Appréciant l'algèbre, j'ai été séduit par la façon dont la théorie des représentations relie avec élégance la théorie des groupes, l'analyse et l'algèbre linéaire. L'analyse harmonique sur les groupes abéliens finis en est un cas particulier dont nous étudierons une application autour du célèbre dernier théorème de Fermat.

Positionnement thématique

MATHÉMATIQUES (*Algèbre*)

Mots-clés

Mots-Clés (en français)	**Mots-Clés (en anglais)**
Transformation de Fourier	Fourier transform
Corps finis	Finites fields
Caractères	Characters
Dernier théorème de Fermat	Fermat's last theorem
Théorie des représentations	Representation theory

Bibliographie commentée

En 1637, Fermat énonça dans la marge d'un livre que l'équation $x^n+y^n=z^n$ n'admet pas de solutions entières si $n \geq 3$. Ce théorème devint l'une des conjectures les plus célèbre de la théorie des nombres avant d'être démontré près 358 ans plus tard. En 1955, Taniyama et Shimura affirmèrent l'existence d'un lien entre les courbes elliptiques et les formes modulaires, deux types d'objets relevant a priori de domaines séparés des mathématiques. En 1990, Ribet démontra que la conjecture de Taniyama-Shimura implique le dernier théorème de Fermat. Enfin, cela permit à Wiles en 1995 de démontrer le dernier théorème de Fermat en prouvant la conjecture de Taniyama-Shimura.

Le dernier théorème de Fermat porte sur l'existence de solution d'une certaine famille d'équations diophantiennes, ainsi, il est naturel de se demander si ce résultat est vrai sur les corps finis. Deux domaines a priori très distincts des mathématiques permettent d'approcher le dernier théorème de Fermat sur les corps finis: la théorie de Ramsey et l'analyse harmonique.

La théorie de Ramsey désigne une branche des mathématiques combinatoires qui étudie "l'ordre qui doit nécessairement apparaître dans des structures assez larges". Un des théorèmes principaux de la théorie de Ramsey est un résultat qui la précède chronologiquement: le théorème de Schur, énoncé et démontré en 1917, assure une propriété de k-coloriabilité de la partie $[1, n]$ lorsque $n \geq s(n)$ où $s(n)$ est appelé le nombre de Schur de n. De plus ce nombre satisfait $s(n) \geq \frac{89 \times 3^{n-4}+1}{2}$ **[3]**. Enfin, ce résultat s'insérant naturellement dans le cadre de la théorie de Ramsey permet de démontrer l'existence de solutions non-triviales à l'équation $x^n + y^n = z^n$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour $p \geq s(n)$. **[3]**

En 1807, Joseph Fourier introduisit dans un mémoire l'équation de la chaleur, les séries et la transformation de Fourier. La transformation de Fourier est un procédé permettant d'associer à une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ suffisant régulière une fonction $\hat{f}$ appelée transformée de Fourier de f représentant f par sa densité spectrale en tant que superposition de fonctions trigonométriques. La construction de ces objets eut de très vastes conséquences en analyse et en physique et posa les bases de la théorie de Fourier. C'est dans le cadre de la théorie des représentations que ces constructions furent généralisé, formant ainsi l'analyse harmonique abstraite. Le cas le plus élémentaire est celui où G est un groupe abélien finis: l'algèbre de groupe $(L(G), +, *)$ est commutative et la transformation de Fourier donne un isomorphisme d'anneaux $(L(G), +, *) \to (L(\hat{G}), +, \cdot)$ où $\hat{G}$ est le groupe dual de G **[2]**. Bien qu'il n'existe pas de généralisation naturelle de la théorie de Fourier lorsque G est un groupe quelconque, la dualité de Pontryagin permet de traiter le cas abélien localement compact et le théorème de Peter-Weyl, ou alternativement la dualité de Tannaka-Krein, le cas où G est compact.

L'analyse harmonique conduit à des conditions plus fines sur le couple (n, p) que la théorie de Ramsey. Une première approche plus élémentaire permet d'établir l'existence de solution non-triviales à l'équation $x^n + y^n = z^n$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour $p \geq 32n^6$ **[3][4]**. En outre, une seconde approche mêlant analyse de Fourier et probabilités mène à l'existence de telle solution dans $\mathbb{F}_q$ lorsque $q \geq n^4 + 4$ **[1]**.

Problématique retenue

Ce sujet a pour objectif d'établir, à l'aide de l'analyse de Fourier sur les groupes abéliens finis, l'existence à certaines conditions de solutions non-triviales à l'équation $x^n + y^n = z^n$ sur un corps fini.

Objectifs du TIPE du candidat

- Explorer la théorie de Fourier sur les groupes abéliens finis et comprendre sa place au sein du cadre plus général de la théorie des représentations des groupes finis.
- Étudier sous quelles conditions sur (n, q) l'équation $x^n + y^n = z^n$ admet une solution non-triviale dans $\mathbb{F}_q$.
- Implémenter un modèle informatique afin d'illustrer les divers résultats théoriques.

Références bibliographiques

[1] László Babai: The Fourier transform and equations over finite abelian groups
[2] Benjamin Steinberg: Representation theory on finite groups
[3] Summer Lynne Kisner: Schur's theorem and related topics in Ramsey theory
[4] Camilla Marie Baastad: Fermat last theorem modulo p