CHAPITRE 10

Familles sommables

Dans tout ce chapitre I désigne un ensemble non vide ($I = \varnothing$ étant trivial, en utilisant la convention $\sum_{i\in\varnothing} u_i = 0$). On adopte également les conventions et notations suivantes.

→ On note $\overline{\mathbb{R}^+} = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

→ On convient que pour tout réel $x \in \overline{\mathbb{R}^+}$, dans $\overline{\mathbb{R}^+}$, $x + \infty = +\infty + x = +\infty$.

→ On convient aussi que pour tout $X \subset \overline{\mathbb{R}^+}$, $X = \varnothing$ si et seulement si $\sup X = -\infty$, et si $+\infty \in X$ alors $\sup X = +\infty$.

→ Finalement, si $\sum_{n\geq 0} u_n$ est une série à termes positifs non convergente, on posera $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

I Familles à termes positifs

Définition I.1.

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs. On dit que $(u_i)_{i\in I}$ est sommable s'il existe $M \geq 0$ tel que pour toute partie finie J de I,

$$\sum_{i\in J} u_i \leq M$$

Dans ce cas, la somme de $(u_i)_{i\in I}$, notée $\sum_{i\in I} u_i$, est $\sup\limits_{\substack{J\subset I \\ J \text{ est finie}}} \left(\sum_{i\in J} u_i\right)$

Conventions :

→ Si $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, on convient que $\sum_{i\in I} u_i = +\infty$.

→ Soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_j)_{j\in J}$ deux familles de termes réels positifs. On dit que, dans $\overline{\mathbb{R}^+}$ on a $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in J} v_i$, lorsque l'une des deux familles est sommable, si et seulement si l'autre l'est et que si elles le sont, alors leurs sommes sont égales.

Proposition I.2.

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs. Si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $K := \{i \in I \,|\, u_i > 0\}$ est au plus dénombrable.

Preuve : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $A_{1/n} := \left\{ i \in I \;\middle|\; u_i \geq \frac{1}{n} \right\}$ soit infini. Soit J une partie finie de $A_{1/n}$ telle que $|J| > n\sum_{i\in I} u_i$. Alors $\sum_{i\in J} u_i \geq \frac{|J|}{n} > \sum_{i\in I} u_i$ ce qui est faux.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_{1/n}$ est fini, donc $K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_{1/n}$ au plus dénombrable.

Dans toute la suite du chapitre, on suppose que I est au plus dénombrable.

Proposition I.3.

Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs.

1. Si $(v_i)_{i\in I}$ est sommable et que pour tout $i \in I$, $u_i \leq v_i$, alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable et la somme vérifie $\sum\limits_{i\in I} u_i \leq \sum\limits_{i\in I} v_i$
2. Si $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable et que pour tout $i \in I$, $u_i \leq v_i$, alors $(v_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable.
3. Soit $(J_n)_{n\in N}$ une suite croissante de parties finies de I telle que $\bigcup\limits_{n\in N} J_n = I$. Alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si, et seulement si, la suite de terme général $S_n := \sum\limits_{i\in J_n} u_i$ est majorée.

   Dans ce cas, $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum\limits_{i\in I} u_i$.
4. Soit $\lambda \geq 0$. Supposons que $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ soient sommables. Alors $(\lambda u_i)_{i\in I}$ et $(u_i+v_i)_{i\in I}$ sont sommables et

$$\sum_{i\in I} \lambda u_i = \lambda \sum_{i\in I} u_i \qquad \text{et} \qquad \sum_{i\in I}(u_i+v_i) = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i$$

Preuve :

1. Soit $J \subset I$ fini. On a alors
$$\sum_{j\in J} u_j \leq \sum_{j\in J} v_j \leq \sum_{i\in I} v_i < +\infty$$
Cette borne étant indépendante de J, on déduit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable et que de plus
$$\sum_{i\in I} u_i \leq \sum_{i\in I} v_i$$
2. C'est simplement la contraposée du point précédent.
3. $(\Rightarrow)$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n \leq \sum\limits_{i\in I} u_i < +\infty$ et cette borne est indépendante de n.

   $(\Leftarrow)$ Soit J une partie finie de I. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $J \subset J_N$ donc en notant K un majorant de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$$\sum_{i\in J} u_i \leq S_N \leq K$$
   donc $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, ce qui achève la preuve de l'équivalence.

   Supposons maintenant que $(u_i)_{i\in I}$ est sommable. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n \leq \sum\limits_{i\in I} u_i$. Croissante et majorée, (S_n) converge vers $\ell \leq \sum\limits_{i\in I} u_i$. Par ailleurs, pour toute partie finie J de I, il existe $N_J \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N_J$, $\sum\limits_{i\in J} u_i \leq S_{N_J} \leq S_n \leq \ell$. Donc $\sum\limits_{i\in I} u_i = \sup\limits_{\substack{J\subset I \\ J \text{ est finie}}} \left(\sum\limits_{i\in J} u_i\right) \leq \ell$. Donc
$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{i\in I} u_i$$
4. Considérons une suite croissante $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties finies de I telle que $\bigcup\limits_{n\in N} J_n = I$ et posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{i\in J_n} u_i$ et $S'_n = \sum\limits_{i\in J_n} v_i$. D'après la proposition I.3, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont

croissantes et de limites respectives $\sum_{i\in I} u_i$ et $\sum_{i\in I} v_i$, donc $\sum_{i\in J_n}(u_i+v_i) = S_n + S'_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i$, donc $(S_n+S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. D'après la proposition I.3, $(u_i+v_i)_{i\in I}$ est sommable, et sa somme vaut bien $\sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i$.

Il est aisé de vérifier, au moyen de la définition, que $(\lambda u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable.

Proposition I.4.

Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes positifs, et $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$.

Alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge si, et seulement si, $\sum_{n\geq 0} u_{\sigma(n)}$ converge. Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$.

Preuve : $(\Rightarrow)$ Soit $N \in \mathbb{N}$. Posons $M = \max(\sigma(0), \ldots, \sigma(N))$. Alors

$$\sum_{n=0}^{N} u_{\sigma(n)} \leq \sum_{m=0}^{M} u_m \leq \sum_{m=0}^{+\infty} u_m < +\infty$$

$\sum_{n\geq 0} u_{\sigma(n)}$ étant à termes positifs, elle converge. Retenons de plus que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

$(\Leftarrow)$ Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\sigma(n)}$. Alors, $v_{\sigma^{-1}(n)} = u_n$. Ainsi, $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, et $\sigma^{-1} \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$ donc d'après $(\Rightarrow)$, $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, et retenons que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$.

Donc, dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$.

Théorème (Théorème de sommation par paquets) I.5.

Soient $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un partage de I (i.e. partition où l'ensemble vide est autorisé), et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs. $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable et, en notant $U_n = \sum_{i\in I_n} u_i$, $\sum_{n\geq 0} U_n$ est convergente. Dans ce cas, $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n$.

Preuve

→ $(\Leftarrow)$ Soit J une partie finie de I. Chaque élément de J appartient à l'un des I_n. J étant fini, il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $J \subset I_0 \sqcup \cdots \sqcup I_N$. Il vient que $J = (J\cap I_0) \sqcup \cdots \sqcup (J \cap I_N)$. Ainsi

$$\sum_{i\in J} u_i = \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{i\in J\cap I_n} u_i\right) \leq \sum_{n=0}^{N} U_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} U_n < +\infty$$

Donc $(u_i)_{i\in I}$ est sommable et $\sum_{i\in I} u_i \leq \sum_{n=0}^{+\infty} U_n$.

→ $(\Rightarrow)$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit J une partie finie de I_n. Alors J est une partie finie de I, donc $\sum_{i\in J} u_i \leq \sum_{i\in I} u_i$ donc $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une partie finie J_n de I_n telle que

$$\sum_{i\in J_n} u_i \geq U_n - \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Soit $N \in \mathbb{N}$. Posons $J'_N = J_0 \sqcup \cdots \sqcup J_N$. Ainsi,

$$\sum_{i\in I} u_i \geq \sum_{i\in J'_N} u_i = \sum_{k=0}^{N} \left(\sum_{i\in J_k} u_i\right) \geq \sum_{k=0}^{N} U_k - \varepsilon \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^N}\right)}_{\leq 2}$$

Donc $2\varepsilon + \sum_{i\in I} u_i \geq \sum_{k=0}^{N} U_k$. Donc $\sum_{k\geq 0} U_k$ est convergente et en passant à la limite $\varepsilon \longrightarrow 0^+$, il vient que $\sum_{i\in I} u_i \geq \sum_{k=0}^{N} U_k$.

Finalement, en passant à la limite $N \longrightarrow +\infty$, on déduit que $\sum_{i\in I} u_i \geq \sum_{k=0}^{+\infty} U_k$.

Remarquons que, dans le cas où $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, on a déjà montré l'égalité $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n$.

Remarques

1. Il est aisé de voir que l'égalité $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ est toujours vraie, dans $\overline{\mathbb{R}^+}$, même dans le cas de non-sommabilité de $(u_i)_{i\in I}$. En effet, supposons que $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable. Par ce qui précède, on peut voir que
   - $\rightarrow$ Soit il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(u_i)_{i\in I_n}$ n'est pas sommable, auquel cas $U_n = +\infty$ et donc $\sum_{k=0}^{+\infty} U_k = +\infty$,
   - $\rightarrow$ Soit à ce que tous les $(u_i)_{i\in I_n}$ soient sommables, mais que la série $\sum_{n\geq 0} U_n$ soit divergente, auquel cas $\sum_{n\geq 0} U_n = +\infty$.
2. On remarquera que si $I = \mathbb{N}$ et $I_k = \{k\}$, on obtient une identification, dont on usera souvent par abus de notation, entre série (à termes positifs) convergente (resp. non convergente) et famille sommable (resp. non sommable) sur $\mathbb{N}$. Plus exactement, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente si, et seulement si, la famille $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est sommable. De plus, avec ou sans convergence de $\sum_{n\geq 0} u_n$, on a l'égalité $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ dans $\overline{\mathbb{R}^+}$.

Application : un cas très fréquent où le théorème ci-dessus s'avère utile est le suivant.
Soit $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} \in {\mathbb{R}^+}^{\mathbb{N}^2}$. On a dans $\overline{\mathbb{R}^+}$,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{N}} a_{m,n} = \sum_{m\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{m,n}$$

c'est-à-dire que si l'une des sommes ci-dessus est infinie, alors l'autre l'est également, et si l'une des sommes est finie, alors l'autre l'est également et les deux sommes sont égales. Le cas des sommes finies correspond au cas où $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} \in {\mathbb{R}^+}^{\mathbb{N}^2}$ est sommable.

Preuve : Posons $I_m = \{(m,k),\ k \in \mathbb{N}\}$ et $I'_n = \{(k,n),\ k \in \mathbb{N}\}$. On a alors dans $\overline{\mathbb{R}^+}$, en utilisant le théorème de sommation par paquets,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}} a_{m,n} = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{(m',n')\in I'_n} a_{m',n'} = \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{m,n} = \sum_{m\in\mathbb{N}}\sum_{(m',n')\in I_m} a_{m',n'} = \sum_{m\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{m,n}$$

On rappelle encore une fois qu'il est bien de voir ces inégalités dans les ceux cas : si la famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable, alors le théorème de sommation par paquet nous permet d'affirmer que toutes les sommes ci-dessus sont finies et égales et lorsqu'elle n'est pas sommable, alors le premier point de la remarque précédente nous permet d'affirmer que toutes ces sommes sont infinies.
Par ailleurs, rappelons qu'on peut également appliquer le second point de la remarque précédente en écrivant

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}} a_{m,n} = \sum_{m\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{m,n} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} \tag{1}$$

II Familles de nombres complexes

Remarque préliminaire : toutes les preuves sautées dans cette partie se font de manière exactement similaire à celles analogues de la partie précédente.

Définition II.1.

On dit que la famille $(z_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ est sommable lorsque la famille $(|z_i|)_{i\in I} \in {\mathbb{R}^+}^I$ l'est.

Proposition II.2.

La famille $(z_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ est sommable si, et seulement si, les quatre familles de termes à valeurs positives $(\mathrm{Re}(z_i)^+)_{i\in I}$, $(\mathrm{Re}(z_i)^-)_{i\in I}$, $(\mathrm{Im}(z_i)^+)_{i\in I}$ et $(\mathrm{Im}(z_i)^-)_{i\in I}$ le sont.
En particulier, les deux notions coïncident pour des familles à termes positifs

Preuve : Il suffit de remarquer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{Re}(z)^+\\ \mathrm{Re}(z)^-\\ \mathrm{Im}(z)^+\\ \mathrm{Im}(z)^-\end{array}\right\} \leq |z| \leq \mathrm{Re}(z)^+ + \mathrm{Re}(z)^- + \mathrm{Im}(z)^+ + \mathrm{Im}(z)^-$$

Définition II.3.

Si la famille $(z_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ est sommable, on définit alors sa somme par

$$\sum_{i\in I} z_i = \sum_{i\in I}\mathrm{Re}(z_i)^+ - \sum_{i\in I}\mathrm{Re}(z_i)^- + i\sum_{i\in I}\mathrm{Im}(z_i)^+ - i\sum_{i\in I}\mathrm{Im}(z_i)^-$$

Remarque : Remarquons que cette définition est cohérente car on a pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$,

$$|z| = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(z)^+ - \mathrm{Re}(z)^- + i\mathrm{Im}(z)^+ - i\mathrm{Im}(z)^-$$

Proposition II.4.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Supposons que $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ soient sommables. Alors $(\lambda u_i)_{i\in I}$ et $(u_i+v_i)_{i\in I}$ sont sommables et

$$\sum_{i\in I}\lambda u_i = \lambda\sum_{i\in I}u_i \qquad \text{et} \qquad \sum_{i\in I}(u_i+v_i) = \sum_{i\in I}u_i + \sum_{i\in I}v_i$$

Preuve : Il suffit d'utiliser la définition de la somme d'une famille de nombres complexes

$$\sum_{i\in I}u_i = \sum_{i\in I}\mathrm{Re}(u_i)^+ - \sum_{i\in I}\mathrm{Re}(u_i)^- + i\sum_{i\in I}\mathrm{Im}(u_i)^+ - i\sum_{i\in I}\mathrm{Im}(u_i)^-$$

et de montrer l'égalité pour chacune des sommes en utilisant la preuve du point 4 de la proposition I.3.

Théorème II.5.

Soient $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un partage de I (i.e. partition où l'ensemble vide est autorisé), et $(z_i)_{i\in I}$ une famille sommable de complexes. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(z_i)_{i\in I_n}$ est sommable et, en notant $U_n = \sum_{i\in I_n}u_i$, $\sum_{n\geq 0}U_n$ est absolument convergente. De plus, on a $\sum_{i\in I}u_i = \sum_{n=0}^{+\infty}U_n$.

Preuve : Encore une fois, il suffit d'appliquer le théorème de sommation par paquets (I.5) aux familles de nombres réels positifs $\mathrm{Re}(z)^+, \mathrm{Re}(z)^-, \mathrm{Im}(z)^+$ et $\mathrm{Im}(z)^-$.

Remarques importantes :

→ Dans le cas précédent des familles positives, lorsqu'on considère une famille positive $(u_i)_{i\in I}$, soit elle était sommable, et alors la somme $\sum_{i\in I}u_i$ avait une valeur finie, ou alors, elle n'est pas sommable et donc on peut écrire sans ambiguïté $\sum_{i\in I}u_i = +\infty$. Dans le cas des familles complexes, on ne peut plus faire cela sans ambiguïté. En effet, pour une famille de nombres complexes $(u_i)_{i\in I}$, on a par définition,

$$\sum_{i\in I}u_i = \underbrace{\sum_{i\in I}\mathrm{Re}(u_i)^+}_{(1)} - \underbrace{\sum_{i\in I}\mathrm{Re}(u_i)^-}_{(2)} + \underbrace{i\sum_{i\in I}\mathrm{Im}(u_i)^+}_{(3)} - \underbrace{i\sum_{i\in I}\mathrm{Im}(u_i)^-}_{(4)}$$

Dans le cas par exemple d'une famille de nombres réels pas forcément positifs, les termes (3) et (4) sont nuls. Cette famille n'est pas sommable lorsque l'un les termes (1) ou (2) sont infinis. Dans le cas où les deux termes sont infinis, on obtient une expression de la forme $+\infty - \infty$ et donc ne peut pas définir de valeur pour $\sum_{i\in I}u_i$.

→ Cette fois-ci, dans le cas des familles de nombres complexes, l'égalité $\sum_{n\geq 0}u_n = \sum_{n\in\mathbb{N}}u_n$ n'est plus toujours vraie et ni même a de sens sans sommabilité. Toutefois, on a bien équivalence entre l'absolue convergence de la série $\sum_{n\geq 0}u_n$ et la sommabilité de la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. De plus, mais cette fois uniquement lorsque la série de gauche est absolument convergente ou la famille de droite est sommable (on ne peut donc plus dire que la limite d'une série de nombres complexe et la somme de la famille associée sont égales dans $\overline{\mathbb{R}^+}$ comme on le faisait pour les familles positives), on a bien l'égalité $\sum_{n\geq 0}u_n = \sum_{n\in\mathbb{N}}u_n$.

On continuera donc à confondre série absolument convergente et famille sommable (qu'on appellera aussi série sommable) **mais uniquement après vérification de la sommabilité/convergence absolue**.

Un simple exemple où cette égalité est fausse est la famille $\left(\dfrac{(-1)^n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Cette famille n'est pas sommable, car en valeur absolue il s'agit des termes de la série harmonique, mais la série $S_n = \sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{(-1)^n}{n+1}$ est convergente **mais n'est pas absolument convergente**. De plus, cette famille correspond au contrexemple du point précédent.

→ De même, la première remarque faite après le théorème de sommation par paquets n'est plus toujours valable. Rappelons cette remarque : pour toute famille $(u_i)_{i\in I}$ de nombres positifs et tout partage $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I, l'égalité suivante est vraie dans $\overline{\mathbb{R}^+}$: $\sum\limits_{n\geq 0} U_n = \sum\limits_{i\in I} u_i$.

En effet, prenons le contre-exemple donné par la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la partition $I_n = \{2n, 2n+1\}$. Il est clair que la famille n'est pas sommable, alors que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\underbrace{\sum\limits_{i\in I_n} u_i}_{U_n} = 0$ et alors $\sum\limits_{n\geq 0} U_n = 0$ ce qui clairement ne peut pas être égal à $\sum\limits_{i\in I} u_i$ car cette dernière n'est même pas définie.

III Applications

1. Séries doubles

Soit $(z_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^2}$ une famille de nombres complexes sommable. Les propriétés suivantes sont vraies.

→ Pour tout $m\in\mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} z_{m,n}$ est absolument convergente et converge vers une limite Z_m.

→ Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{m\geq 0} z_{m,n}$ est absolument convergente et converge vers une limite Z'_n.

→ Enfin, $\sum\limits_{m\geq 0} Z_m$ et $\sum\limits_{n\geq 0} Z'_n$ sont absolument convergentes et

$$\sum_{m\geq 0} Z_m = \sum_{n\geq 0} Z'_n = \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} z_{m,n}$$

Ce résultat est une application directe du théorème de sommation par paquets pour les nombres complexes.

2. Produits

a) Produit de deux séries

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_p)_{p\in\mathbb{N}}$ deux familles sommables. La famille $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} = (a_n b_p)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable, de somme

$$\sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} u_{n,p} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{p=0}^{+\infty} b_p$$

En effet, dans $\overline{\mathbb{R}^+}$, en utilisant la relation (1),

$$\sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} |u_{n,p}| = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n b_p| = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(|b_p| \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|}_{\text{constante}}\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|\right)\left(\sum_{p=0}^{+\infty}|b_p|\right) < +\infty$$

Ainsi $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. On a donc le droit, par sommation par paquet, de refaire le même calcul et réutiliser la relation (1), sans valeurs absolues cette fois (tous les termes sont absolument convergents, donc il n'y a pas d'ambiguïté). Ainsi, a bien le résultat

$$\sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} u_{n,p} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{p=0}^{+\infty} b_p\right)$$

b) Produit de convolution (ou de Cauchy)

Soit $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux familles de nombres complexes. On définit et note le produit de convolution (ou de Cauchy) $(c_p)_{p\in\mathbb{N}} = (a_m)_{m\in\mathbb{N}} * (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ces deux familles par

$$\forall p \in \mathbb{N},\ c_p = \sum_{m+n=p} a_m b_n = \sum_{m=0}^{p} a_m b_{p-m} = \sum_{n=0}^{p} a_{p-n} b_n$$

Proposition III.1.

Si $\sum_{m\geq 0} a_m$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$ sont absolument convergentes, alors $\sum_{p\geq 0} c_p$ l'est aussi et on a l'égalité

$$\sum_{p=0}^{+\infty} c_p = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_m\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$$

Preuve : D'après ce qui précède, $(u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} = (a_m b_n)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. Considérons la partition

$$I_p = \{(m,n) \in \mathbb{N}^2,\ m+n=p\}$$

On sait par le théorème de sommation par paquets qu'étant donné que $(I_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est un partage de $\mathbb{N}^2$, $(c_p)_{p\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{(m,n)\in I_p} a_m b_n\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est sommable et donc $\sum_{p\geq 0} c_p$ est absolument convergente.
Finalement, toujours par le théorème de sommation par paquets, en plus du point précèdent,

$$\sum_{p=0}^{+\infty} c_p = \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_m b_n = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_m\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).$$

Remarque : Sous réserve d'avoir les bonnes hypothèses de convergence, le produit de Cauchy est particulièrement utile pour avoir une forme explicite du produit de deux séries entières, i.e. sous forme de polynôme de degré infini. En effet, pour exprimer le produit $\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^m\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right)$ sous forme de série entière lorsque les deux familles $(a_n x^n)$ et $(b_m x^m)$ sont sommables, il faut regrouper les termes de même degré de la forme $a_n b_m x^{n+m}$, d'où le fait de partitionner les termes par ensembles de la forme

$I_p = \{(m,n) \in \mathbb{N}^2,\ m+n=p\}$. On obtient dans ce cas l'égalité suivante

$$\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^m\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p x^p.$$

*   *
*

Document compilé par Omar Bennouna et Issam Tauil le 11/03/2023 pour cpge-paradise.com.
Si vous repérez une erreur, ou avez des remarques, prière de me contacter via l'adresse contact@cpge-paradise.com.