CHAPITRE 11.4

Comparaison de normes et espaces produits

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ est un corps égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et n est un entier naturel strictement positif.

I Comparaison de normes

Définition I.1.

Soient N_1 et N_2 deux normes sur E. On dit que N_1 est plus fine que N_2 (ou domine N_2) s'il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $N_2(x) \leq CN_1(x)$.

Proposition I.2.

Si N_1 est plus fine que N_2, alors

1. Pour tout $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ pour $N_1 \Longrightarrow x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ pour N_2.
2. Si F est une partie fermée de E pour N_2, alors elle l'est pour N_1.
3. Si O est une partie ouverte de E pour N_2, alors elle l'est pour N_1.

Preuve

Supposons que N_1 est plus fine que N_2. soit $C > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $N_2(x) \leq CN_1(x)$

1. Soit (x_n) une suite à valeurs dans E qui converge vers l pour N_1. On a alors
$$N_2(x_n - l) \leq CN_1(x_n - l) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
d'où le résultat voulu.
2. Soit F une partie fermée de E pour N_2. Soit (x_n) une suite à valeurs dans F convergente pour N_1 vers $x \in E$. (x_n) converge alors pour N_2 vers x. F étant fermé pour N_2, on a $x \in F$ et alors F est fermé pour N_1.
3. Si O est ouvert pour N_2, alors $E \setminus O$ est fermé pour N_1 donc pour N_2 et finalement O est ouvert pour N_1.

Définition I.3.

On dit que deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes lorsque N_1 est plus fine que N_2 et N_2 est plus fine que N_1. Dans ce cas, on note $N_1 \sim N_2$.

Proposition I.4.

Soit N_1 et N_2 deux normes équivalentes.

1. Les suites convergentes pour N_1 sont exactement les suites convergentes pour N_2.
2. Les ouverts (resp. fermés) pour N_1 sont exactement les ouverts (resp. fermés) pour N_2.
3. Les fonctions continues pour N_1 sont exactement les fonctions continues pour N_2.
4. Les application lipschitziennes pour N_1 sont exactement les applications lipschitziennes pour N_2, mais le rapport de lipschitzianité ne reste plus le même quand on passe d'une norme à l'autre.

Exemple : dans le cas où $E = \mathbb{K}^n$, les normes $\|.\|_\infty$, $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes. En effet, on a pour tout $x \in E$

→ $\frac{1}{n}\|x\|_1 \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_1$, donc $\|.\|_1 \sim \|.\|_\infty$.

→ $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$, donc $\|.\|_2 \sim \|.\|_1$.

→ Par transitivité, ces trois normes sont deux à deux équivalentes.

Proposition I.5.

Lorsque E est de dimension finie, alors toutes les normes sur E sont équivalentes.

Preuve : la preuve de ce résultat sera faite dans une partie ultérieure de ce cours, car nous n'avons pas encore exposé les outils nécessaires pour le montrer.

Exemple 1 : Dans le cas où $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ avec $a < b$, alors $\|.\|_2$ est plus fine que $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ est plus fine que $\|.\|_2$, mais parmi ces trois normes, il n'y en a aucune qui est équivalente à une autre.

→ On a pour tout $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, $\|f\|_1 \leq \sqrt{b-a}\,\|f\|_2 \leq (b-a)\|f\|_\infty$.

→ Les inégalités dans le sens contraire sont toutes fausses en général. En effet, si on considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x \longmapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, alors on a $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ pour $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$, mais $\|f_n\|_\infty = 1$ pour tout n, donc (f_n) ne tend pas vers 0 pour $\|.\|_\infty$.

Exemple 2 : On se place dans le cas où $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et on considère la norme $\|.\|$ telle que pour tout $f \in E$, $\|f\| = |f(0)| + \displaystyle\int_0^1 |f'(x)|\,dx$.

→ $\|.\|$ est plus fine que $\|.\|_\infty$.
En effet, on a pour tout $f \in E$ et $x \in [a,b]$,

$$|f(x)| = \left|f(0) + \int_0^x f'(t)dt\right| \leq |f(0)| + \int_0^x |f'(t)|\,dt \leq |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,dt = \|f\|$$

Ce qui entraine $\|f\|_\infty \leq \|f\|$.

→ $\|.\|_\infty$ n'est pas plus fine que $\|.\|$.
En effet, si on considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x \longmapsto \frac{1}{n}\sin(n\pi x))$, on trouve

- $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
- Pour tout n, $\|f_n\| = \displaystyle\int_0^1 |\sin(n\pi t)|\,dt \geq \int_0^1 \sin(n\pi t)^2 dt \geq \frac{1}{2}$ et donc $\|f_n\|$ ne tend pas vers 0.

Exercice I.6.

On reprend les notations de l'exemple précédent. Soit $f \in E$. Montrer que

$$\int_0^1 f(t)\,|\sin(nt)|\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{\pi}\int_0^1 f(t)dt$$

Exercice I.7.

On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$. Comparer les normes suivantes sur E, telles que pour tout $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in E$

- $\to$ $\|P\|_0 = \max(|a_0|, \ldots, |a_n|)$
- $\to$ $\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$
- $\to$ $\|P\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$

II Espaces produits

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On considère p espaces métriques $E_1, \ldots, E_p$ munis respectivement des distances $d_1, \ldots, d_p$ et on pose $E = E_1 \times \cdots \times E_p$. On définit pour tout $i \in [\![1;p]\!]$ la $i-$ème projection canonique

$$\pi_i : \begin{cases} E_1 \times \cdots \times E_p & \longrightarrow E_i \\ (x_1, \ldots, x_p) & \longmapsto x_i \end{cases}$$

Remarque préliminaire : pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, si A_i est une partie de E_i, alors

$$\pi_i^{-1}(A_i) = E_1 \times \cdots \times E_{i-1} \times A_i \times E_{i+1} \times \cdots \times E_p$$

1. Métrique produit

On munit E de la distance d définie par

$$\forall (x_1, \ldots, x_p), (y_1, \ldots, y_p) \in E, \ \max_{i\in[\![1;p]\!]} d_i(x_i, y_i)$$

Remarque : pour tout $x = (x_1, \ldots, x_p) \in E$ et $\varepsilon > 0$

$$B_d(x, \varepsilon) = \{(y_1, \ldots, y_p) \in E, \ \forall i \in [\![1;p]\!], d_i(x_i, y_i) < \varepsilon\} = B_{d_1}(x_1, \varepsilon) \times \cdots \times B_{d_p}(x_p, \varepsilon)$$

Vocabulaire : on appelle pavé ouvert tout produit de la forme $\omega_1 \times \cdots \times \omega_p$ avec pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, ω_i un ouvert de E_i.

Proposition II.1.

1. Tout pavé ouvert est ouvert dans E.
2. Tout ouvert de E est réunion de pavés ouverts.

Preuve

1. Soit $\Omega = \omega_1 \times \cdots \times \omega_p$ un pavé ouvert. soit $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \Omega$. On a pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, il existe $\varepsilon_i > 0$ tel que $B_{d_i}(x_i, \varepsilon_i) \subset \omega_i$. On pose alors $\varepsilon = \min_{i\in[\![1;p]\!]} \varepsilon_i > 0$.
   Le choix de ε nous permet d'affirmer que $B(x, \varepsilon) \subset B_{d_1}(x_1, \varepsilon_1) \times \cdots \times B_{d_p}(x_p, \varepsilon_p) \subset \Omega$ donc Ω est ouvert.

2. Soit Ω un ouvert de E. Pour tout $a \in O$, il existe $\varepsilon_a > 0$ tel que $B(a, \varepsilon_a) \subset \Omega$.
   On peut alors écrire $\Omega = \bigcup\limits_{a\in\Omega} B(a, \varepsilon_a)$. Une boule ouverte de E est par définition un pavé ouvert, donc Ω est bien une union de pavés ouverts.

Proposition II.2.

Soit $F_1, \ldots, F_p$ des parties de $E_1, \ldots, E_p$. Si pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, F_i est fermé dans E_i, alors $F = F_1 \times \cdots \times F_p$ est fermé dans E.

Preuve : Commecons par remarquer que $F = F_1 \times \cdots \times F_p = \bigcap\limits_{i=1}^{p} G_i$ avec pour tout $i \in [\![1;p]\!]$,

$$G_i = E_1 \times \cdots \times E_{i-1} \times F_i \times E_{i+1} \times \cdots \times E_p$$

Or on a pour tout $i \in [\![1;p]\!]$,

$$E \setminus G_i = E_1 \times \cdots \times E_{i-1} \times (E_i \setminus F_i) \times E_{i+1} \times \cdots \times E_p$$

$E \setminus G_i$ est un produit de d'ouverts, il est donc ouvert et alors G_i est fermé. Finalement, on en déduit que F est intersection de fermés, il est donc fermé.

Exemple : placons nous dans le cas où $E = \mathbb{R}^p$.

→ La distance associée à $\mathbb{R}^p$ est la distance induite par $\|.\|_\infty$.

→ Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ et $\varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon) =]x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon[\times \cdots \times]x_p - \varepsilon, x_p + \varepsilon[$.

→ Les pavés ouverts s'écrivent sous forme de $\omega_1 \times \cdots \times \omega_p$ avec pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, ω_i un ouvert de $\mathbb{R}$.

→ Tout ouvert de $\mathbb{R}^p$ est réunion d'ensembles de la forme $]x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon[\times \cdots \times]x_p - \varepsilon, x_p + \varepsilon[$.

Proposition II.3.

1. Pour tout $k \in [\![1;p]\!]$, π_k est $1-$lipschitzienne.
2. Pour tout $k \in [\![1;p]\!]$, si Ω est un ouvert de E, $\pi_k(\Omega)$ est ouvert.

Preuve : soit $k \in [\![1;p]\!]$.

1. Il suffit d'écrire la définition de la $1-$lipschitzianité de π_k. En effet, on a pour tous $x, y \in E$, $d_k(\pi_k(x), \pi_k(y)) = d_k(x_k, y_k) \leq d(x, y)$.

2. Soit Ω un ouvert de E. Soit $a = (a_1, \ldots, a_p) \in \Omega$ et $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset \Omega$. On a alors $B_{d_k}(a_k, \varepsilon) = \pi_k(B(a, \varepsilon)) \subset \pi_k(\Omega)$, donc $\pi_k(\Omega)$ est ouvert.

Attention : si F est un fermé de E, sa projection $\pi_k(F)$ avec $k \in [\![1;p]\!]$ n'est pas forcément un fermé. En effet, dans le cas où $E = \mathbb{R}^2$, on peut considérer $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ xy = 1\}$ qui est fermé car l'image réciproque du fermé $\{1\}$ par l'application continue $(x, y) \longmapsto xy$, mais $\pi_1(F) = \mathbb{R}^*$ n'est pas fermé.

2. Fonctions à valeurs dans un espace produit

Proposition II.4.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_{n,1}, \dots, x_{n,p}) \in E^{\mathbb{N}}$ et $x = (x_1, \dots, x_p) \in E$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$
2. $\forall i \in [\![1;p]\!]$, $x_{n,i} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_i$

Preuve
(1) $\Rightarrow$ (2) Si $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$, alors pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, par continuité de π_i (π_i est $1-$lipschitzienne donc continue)

$$x_{n,i} = \pi_i(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi_i(x) = x_i$$

(2) $\Rightarrow$ (1) Il suffit d'écrire la défintition de la distance

$$d(x_n, x) = \max_{i\in[\![1;p]\!]} d_i(x_{n,i}, x_i) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Proposition II.5.

Soit A un ensemble, f une fonction de A dans E et $a \in \overline{A}$. On pose pour tout $x \in A$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$ avec pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, f_i une fonction de A dans E_i. On a alors équivalence entre les points suivants

1. f admet une limite $l = (l_1, \dots, l_p)$ en a.
2. Pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, f_i admet la limite l_i en a.

Preuve : la preuve se fait d'une manière identique à celle pour les suites et est donc laissée comme exercice au lecteur.

Proposition II.6.

On reprend les notations précédentes et on considère cette fois-ci que $a \in A$. la propriété précédente implique l'équivalence entre les deux points suivants

1. f est continue en a.
2. Pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, f_i est continue en a_i.

3. Fonctions d'un espace produit

Dans cette partie, on considère Y un ensemble et pour tout $f \in Y^E$, $i \in [\![1;p]\!]$ et $a \in E$, on désigne par $i-$ème application partielle de f en a l'application

$$f_{a,i} : \begin{cases} E_i & \longrightarrow Y \\ x & \longmapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_p) \end{cases}$$

Proposition II.7.

Soit $f : E \longrightarrow Y$ et $a \in E$ une application. Si f est continue, alors ses toutes se sapplications partielles en a sont continues.

Preuve : considèrons pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, l'application

$$j_{a,i} : \begin{cases} E_i & \longrightarrow E \\ x & \longmapsto (a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_p) \end{cases}$$

Cette application est une isométrie, elle est donc continue. Or on a pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, $f_{a,i} = f \circ j_{a,i}$. $f_{a,i}$ est composition de fonctions continues, elle est donc continue.

Définition II.8.

On considère le cas particulier où pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, E_i est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et Y est un espace vectoriel normé. Pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, on appelle $i-$ème dérivée partielle partielle de f lorsqu'elle existe, l'application suivante

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : \begin{cases} E & \longrightarrow Y \\ x & \longmapsto \lim_{t_i \to x_i} \frac{f_{x,i}(t_i) - f_{x,i}(x_i)}{t_i - x_i} \end{cases}$$

Cette dernière associe un réel x à la dérivée de la $i-$ème application partielle de f en x au point x_i.

Vocabulaire : une fonction de E vers Y continue, qui admet des dérivées partielles continues est dite dans $\mathcal{C}^1$.

Attention : la continuité des applications partielles de f n'implique pas la continuité de f. En effet, il suffit de considérer l'application suivante

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

Les applications partielles de f en tout point de R^2 sont continues sur $\mathbb{R}$, mais f n'est pas continue en $(0,0)$, car en considèrant la suite qui tends vers 0, $((\frac{1}{n}, \frac{1}{n}))_{n \in \mathbb{N}^*}$ on voit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$ et ne tend donc pas vers 0, ce qui fait que f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice II.9.

Soit f une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui admet des applications partielles continues en tout point de $\mathbb{R}^2$. Montrer que f est limite simple d'une suite de fonctions continues.

4. Polynômes à plusieurs indeterminées

Dans cette partie, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on note $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ses coordonées. On appellera tout élément $\alpha \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice.

Définition II.10.

Soit $\mathbb{K}$ un corps. On pose $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ l'ensemble des sommes de la forme

$$P(X_1, \dots, X_n) = \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in A} a_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$$

Avec A une partie finie de $\mathbb{N}^n$. Dans toute la suite de cette partie, on fixe $P \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$.

Remarque : en première année, les polynômes ont étés vus comme des suites stationnaires en 0. De la même manière, on peut voir les polynômes de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ comme des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ indexées par $\mathbb{N}^n$ et dont le nombre de termes non nuls est fini. Ici par exemple, on se limite dans la somme aux indices $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ tels que $a_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \neq 0$, mais sachant qu'il y a un nombre fini de coefficients non nuls, on aurait pu écrire

$$P(X_1, \dots, X_n) = \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n} a_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$$

Vocabulaire : Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in A$.

- $\rightarrow$ $a_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ est un coeffcient de P.
- $\rightarrow$ $X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$ est un monôme.
- $\rightarrow$ Le degré total du monôme $X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$ est $\alpha_1 + \dots + \alpha_n$.
- $\rightarrow$ Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, le degré partiel du monôme $X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$ en X_i est α_i.
- $\rightarrow$ Le degré de P est défini par $\deg P = \max_{\alpha \in A'}(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)$ avec A' l'ensemble des multi-indices α tels que $a_\alpha \neq 0$.

Définition II.11.

Soit $d \in \mathbb{N}$. On dit que P est homogène de degré d si

$$\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in A,\ a_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \neq 0 \Longrightarrow \alpha_1 + \dots + \alpha_n = d$$

L'ensemble des polynômes homogènes de degré d est noté $H_d(X_1, \dots, X_n)$.

Proposition II.12.

Soit $P = \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in A} a_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$ et $Q = \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in B} b_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$ deux éléments de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$. On pose $C = A \cup B$.

1. $P + Q = \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in C} (a_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} + b_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}) X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$
2. $P.Q = \sum_{(\alpha, \beta) \in A \times B} a_\alpha b_\beta X_1^{\alpha_1 + \beta_1} \dots X_n^{\alpha_n + \beta_n}$

Proposition II.13.

Soit d et d' deux éléments de $\mathbb{N}$.

1. Si $P \in H_d(X_1, \ldots, X_n)$ et $Q \in H_{d'}(X_1, \ldots, X_n)$, alors $PQ \in H_{d+d'}(X_1, \ldots, X_n)$.
2. $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n] = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} H_k(X_1, \ldots, X_n)$
3. $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ est une $\mathbb{K}-$algèbre commutative unitaire intègre.

Preuve

1. Soit P et Q deux éléments appartenant respectivement à $H_d(X_1, \ldots, X_n)$ et $H_{d'}(X_1, \ldots, X_n)$. Soit A (resp. B) l'ensemble des multi-indices α (resp. β) tels que $a_\alpha \neq 0$ (resp. $b_\beta \neq 0$). On a alors
$$P = \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in A} a_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n} \text{ et } Q = \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in B} b_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n}$$
On a
$$PQ = \sum_{(\alpha,\beta)\in A\times B} a_\alpha b_\beta X_1^{\alpha_1+\beta_1} \ldots X_n^{\alpha_n+\beta_n}$$
et pour tout $(\alpha, \beta) \in A \times B$, $\alpha_1 + \beta_1 + \cdots + \alpha_n + \beta_n = d + d'$, donc $PQ \in H_{d+d'}(X_1, \ldots, X_n)$.

2. Soit $P \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$. Il suffit de diviser la somme de P selon le degré de chaque monome. En effet, on a
$$P = \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in A} a_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n} = \sum_{d=0}^{\deg P} \underbrace{\sum_{\substack{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in A \\ \alpha_1+\cdots+\alpha_n=d}} a_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n}}_{\in H_d(X_1,\ldots,X_n)}$$
L'unicité de cette écriture découle du fait qu'un polynôme nul est nécessairement à coefficients nuls, on a donc bien $P \in \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} H_k(X_1, \ldots, X_n)$, d'où le résultat voulu.

3. Le fait que $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ soit une algèbre commutative ne présente pas de difficulté majeure, nous allons donc uniquement montrer que cette algèbre est intègre.
Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n] \setminus \{0\}$. On pose
$$P = \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in A} a_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n} \text{ et } Q = \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in B} b_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n}$$
Posons aussi
$$PQ = \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in C} c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n}$$
Considèrons $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ maximaux pour l'ordre lexicographique tels que $a_\alpha \neq 0$ et $b_\beta \neq 0$.
Le coefficient devant $X^{\alpha_1+\beta_1} \ldots X^{\alpha_n+\beta_n}$ est $a_\alpha b_\beta = c_{\alpha+\beta}$ et $\alpha + \beta$ est le multi-indice maximal pour l'ordre lexicographique vérifiant $c_{\alpha+\beta} \neq 0$. PQ admet donc un coefficient non nul ce qui nous permet de déduire qu'il est non nul, d'où l'intégrité de $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$.

Définition II.14.

Soit $P = \sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in A} a_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} X_1^{\alpha_1}\dots X_n^{\alpha_n}$ un élément de $\mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]$.
On appelle fonction polynôme associée à P la fonction

$$\tilde{P} : \begin{cases} \mathbb{K}^n & \longrightarrow \mathbb{K} \\ (x_1,\dots,x_p) & \longmapsto \sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in A} a_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n} \end{cases}$$

Proposition II.15.

Lorsque $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, pour tout $P\in\mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]$, $\tilde{P}$ est continue.

Preuve : pour tout $i\in[\![1;p]\!]$, $\tilde{X}_i=\pi_i$, donc $\tilde{X}_i$ est continue. Pour tout $P\in\mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]$, la fonction $\tilde{P}$ est produit et combinaison linéaire des fonctions continues $\tilde{X}_i$ avec $i\in[\![1;n]\!]$, elle est donc continue.

Proposition II.16.

Soient $A_1,\dots,A_n$ des parties infinies de $\mathbb{K}$. Soit $P\in\mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]$. Si $\tilde{P}$ s'annule sur $A_1\times\cdots\times A_n$, alors P est nul.

Preuve : montrons ce résultat par récurrence sur n.
Lorsque $n=1$, P est un polynôme à une seule indéterminée qui s'annule en un nombre infini de points, il est donc nul.
Soit $n\geq 2$. Soit $P = \sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in A} a_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} X_1^{\alpha_1}\dots X_n^{\alpha_n}\in\mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]$. Réécrivons P de la manière suivante

$$P=\sum_{k=0}^{N} Q_k(X_1,\dots,X_{n-1})X_n^k$$

avec $N\in\mathbb{N}$ et pour tout $k\in[\![1;N]\!]$, $Q_k\in\mathbb{K}[X_1,\dots,X_{n-1}]$.
Soit $(a_1,\dots,a_{n-1})\in A_1\times\cdots\times A_{n-1}$. Pour tout $a_n\in A_n$,

$$\tilde{P}(a_1,\dots,a_{n-1},a_n)=\sum_{k=0}^{N} Q_k(a_1,\dots,a_{n-1})a_n^k=0$$

le polynôme $R(Y)=\sum_{k=0}^{N} Q_k(a_1,\dots,a_{n-1})Y^k$ est nul sur A_n et possède donc une infinité de racines. Ce polynôme est donc nul. On peut alors affirmer que pour tout $k\in[\![1;N]\!]$ et $(a_1,\dots,a_{n-1})\in A_1\times\cdots\times A_{n-1}$, $Q_k(a_1,\dots,a_{n-1})=0$. Q_k s'annulle donc sur $A_1\times\cdots\times A_{n-1}$ et alors par hypothèse de récurrence, pour tout $k\in[\![1;N]\!]$, $Q_k=0$ et finalement $P=0$.

Exercice II.17.

Montrer que $GL_n(\mathbb{C})=\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \det M\neq 0\}$ est ouvert.

Exercice II.18.

Soit $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] \setminus \{0\}$. Montrer que $Z(P) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n,\ \tilde{P}(x_1, \dots, x_n) = 0\}$ est fermé d'intérieur vide.

Exercice II.19.

Soit $P \in \mathbb{C}[X, Y]$ non consant. Montrer que $Z(P)$ est infini.

Correction de l'exercice I.6 :

Commencons démontrer le lemme suivant.

Lemme II.20.

Soit f une fonction continue et g une fonction de signe constant sur $[a,b]$ non identiquement nulle. Il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt$$

Preuve : on suppose sans perte de généralité que g est positive. On a alors $\displaystyle\int_a^b g(t)dt > 0$. Soit $\alpha, \beta \in [a,b]$ telle que $f(\alpha) = \inf_{t\in[a,b]} f(t)$ et $f(\beta) = \sup_{t\in[a,b]} f(t)$. On a

$$\int_a^b f(\alpha)g(t)dt \leq \int_a^b f(t)g(t)dt \leq \int_a^b f(\beta)g(t)dt$$

et alors

$$f(\alpha) \leq \frac{\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt}{\displaystyle\int_a^b g(t)dt} \leq f(\beta) \ (*)$$

f étant continue, le théorème des valeurs intermédiraire nous permet d'affirmer l'existence d'un réel $c \in [a,b]$ tel que

$$\frac{\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt}{\displaystyle\int_a^b g(t)dt} = f(c)$$

d'où le résultat voulu.

Remarque : l'inégalité $(*)$ est en général fausse lorsque g n'est pas de signe constant.

Montrons à présent que l'intégrale de l'exercice converge vers la quantitée voulue.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_0^1 f(t)\left|\sin(nt)\right| dt = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2\pi}\rfloor -1} \int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{(2k+1)\pi}{n}} f(t)\sin(nt)dt - \int_{\frac{(2k+1)\pi}{n}}^{\frac{(2k+2)\pi}{n}} f(t)\sin(nt)dt + \int_{\lfloor \frac{n}{2\pi}\rfloor \frac{2\pi}{n}}^1 f(t)\left|\sin(nt)\right| dt$$

En appliquant le lemme précédent sur les deux premières intégrales ci-dessus, on peut affirmer, pour tout $k \in [\![0; \lfloor \frac{n}{2\pi}\rfloor - 1]\!]$ l'existence de $c_{k,n} \in [\frac{2k\pi}{n}, \frac{(2k+1)\pi}{n}]$ et $c'_{k,n} \in [\frac{(2k+1)\pi}{n}, \frac{(2k+2)\pi}{n}]$ tels que

$$\int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{(2k+1)\pi}{n}} f(t)\sin(nt)dt = f(c_{k,n})\int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{(2k+1)\pi}{n}} \sin(nt)dt = \frac{2}{n}f(c_{k,n})$$

et

$$\int_{\frac{(2k+1)\pi}{n}}^{\frac{(2k+2)\pi}{n}} f(t)\sin(nt) = f(c'_{k,n})\int_{\frac{(2k+1)\pi}{n}}^{\frac{(2k+2)\pi}{n}} \sin(nt) = -\frac{2}{n}f(c'_{k,n})$$

On a alors, en posant $\tilde{c}_{k,n} = c_{\frac{k}{2},n}$ si k pair et $\tilde{c}_{k,n} = c'_{\frac{k-1}{2},n}$ sinon, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)\left|\sin(nt)\right| dt &= \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2\pi}\rfloor -1} f(c_{k,n}) + \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2\pi}\rfloor -1} f(c'_{k,n}) + \int_{\lfloor \frac{n}{2\pi}\rfloor \frac{2\pi}{n}}^1 f(t)\left|\sin(nt)\right| dt \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\sum_{k=0}^{2\lfloor \frac{n}{2\pi}\rfloor -1} \frac{\pi}{n} f(\tilde{c}_{k,n})\right) + \int_{\lfloor \frac{n}{2\pi}\rfloor \frac{2\pi}{n}}^1 f(t)\left|\sin(nt)\right| dt\end{aligned}$$

La somme dans la ligne ci-dessus est une somme de Riemann sur $[0,1]$, donc elle converge vers $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$. De plus $t \longmapsto f(t)\left|\sin(nt)\right|$ est bornée uniformément (sa borne supérieure ne dépend pas de n) sur $[0,1]$ et $\lfloor \frac{n}{2\pi}\rfloor \frac{2\pi}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, donc

$$\int_{\lfloor \frac{n}{2\pi}\rfloor \frac{2\pi}{n}}^1 f(t)\left|\sin(nt)\right| dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On en déduit donc directement que

$$\int_0^1 f(t)\left|\sin(nt)\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{\pi}\int_0^1 f(t)dt$$

Correction de l'exercice 2 :

On a pour tout $P = \displaystyle\sum_{k=0}^n a_k X^k \in E$,

$$\|P\|_0 = \max(|a_0|,\dots,|a_n|) \geq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^n |a_k| \geq \frac{1}{n}\max(|a_0|,\dots,|a_n|) = \frac{1}{n}\|P\|_0$$

donc

$$\|P\|_0 \geq \frac{1}{n}\|P\|_1 \geq \frac{1}{n}\|P\|_0$$

et alors $\|.\|_0 \sim \|.\|_1$.
On a aussi

$$\|P\|_\infty \leq \sum_{k=0}^n |a_k| = \|P\|_1$$

donc $\|.\|_1$ est plus fine que $\|.\|_\infty$, mais $\|.\|_\infty$ n'est pas toujours plus fine que $\|.\|_1$.

En effet, si on consisdère la suite le polynôme $P_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n (-1)^k k X^{k-1}$, on a pour tout $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}\tilde{P}_n(x) &= \left(\sum_{k=0}^n -x^k\right)' = \left(x\frac{1-(-x)^n}{1+x}\right)' \\ &= -x\frac{1-(-x)^n}{(1+x)^2} + \frac{1-(-x)^n}{1+x} - \frac{n(-x)^n}{1+x}\end{aligned}$$

on a alors pour tout $x \in [0,1]$

$$\left|\tilde{P}_n(x)\right| \leq \left|x\frac{1-(-x)^n}{(1+x)^2}\right| + \left|\frac{1-(-x)^n}{1+x}\right| + \left|\frac{n(-x)^n}{1+x}\right| \leq 2+2+n = n+4$$

et donc $\|P_n\|_\infty \leq n+4$.

On a aussi $\|P_n\|_1 = \sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$, donc s'il exsite $C > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$\|P_n\|_1 \leq C\,\|P_n\|_\infty$, alors on aura $\frac{n(n+1)}{2} \leq C(n+4)$ ce qui est faux pour n assez grand, d'où le résultat voulu.

Correction de l'exercice 3 :

On va approcher f par une suite de fonctions de première application partielle affine par morceaux. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On subdivise $\mathbb{R}$ en la famille d'intervalles $([\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[)_{k\in\mathbb{Z}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit f_n de la manière suivante : pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $k \in \mathbb{Z}$, si $x \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$, on pose $x = \frac{k+\varepsilon_{n,x}}{n}$ avec $\varepsilon_{n,x} = nx - \lfloor nx \rfloor \in [0,1[$. On a alors

$$f_n(x,y) = f\left(\frac{k}{n}, y\right) + \varepsilon_{n,x}\left(f\left(\frac{k+1}{n}, y\right) - f\left(\frac{k}{n}, y\right)\right)$$

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$.

→ Cas $x \in]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$
$]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$ étant ouvert, on peut supposer que tous les couples considérés sont dans $]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[\times\mathbb{R}$. On pose alors pour tout $u \in]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$, $u = \frac{k+\varepsilon_{n,u}}{n}$ avec $\varepsilon_{n,u} \in [0,1[$. On a alors, lorsque $(u,v) \longrightarrow (x,y)$, $\varepsilon_{n,u} \longrightarrow \varepsilon_{n,x}$ et par continuité de la seconde application partielle de f

$$\begin{aligned} f_n(u,v) &= f\left(\frac{k}{n}, v\right) + \varepsilon_{n,u}\left(f\left(\frac{k+1}{n}, v\right) - f\left(\frac{k}{n}, v\right)\right) \\ &\xrightarrow[(u,v)\to(x,y)]{} f\left(\frac{k}{n}, y\right) + \varepsilon_{n,x}\left(f\left(\frac{k+1}{n}, y\right) - f\left(\frac{k}{n}, y\right)\right) = f(x,y) \end{aligned}$$

donc f_n est continue en (x,y)

→ Cas $x = \frac{k}{n}$
Étudions séparément la continuité à droite et à gauche.

- Continuité pour u à droite de $\frac{k}{n}$
  Lorsque $(u,v) \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[\times\mathbb{R}$, si $(u,v) \longrightarrow (\frac{k}{n}, y)$, alors $\varepsilon_{n,u} \longrightarrow 0$ et $f\left(\frac{k+1}{n}, v\right) - f\left(\frac{k}{n}, v\right)$ reste bornée. On a peut donc affirmer que

  $$f_n(u,v) = f\left(\frac{k}{n}, v\right) + \varepsilon_{n,u}\left(f\left(\frac{k+1}{n}, v\right) - f\left(\frac{k}{n}, v\right)\right) \xrightarrow[(u,v)\to(x,y)]{} f\left(\frac{k}{n}, y\right)$$

  d'où la continuité de f_n à gauche de x.
- Continuité pour u à gauche de $\frac{k}{n}$
  Lorsque $(u,v) \in]\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}] \times \mathbb{R}$, si $(u,v) \longrightarrow (\frac{k}{n}, y)$, alors $\varepsilon_{n,u} \longrightarrow 1$ et

  $$f_n(u,v) = f\left(\frac{k-1}{n}, v\right) + \varepsilon_{n,u}\left(f\left(\frac{k}{n}, v\right) - f\left(\frac{k-1}{n}, v\right)\right) \xrightarrow[(u,v)\to(x,y)]{} f\left(\frac{k}{n}, y\right)$$

  d'où la continuité à gauche en $\frac{k}{n}$

On en déduit donc que pour tout n, f_n est continue sur $\mathbb{R}^2$. Il reste maintenant à montrer que f_n converge simplement vers f.
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a $\varepsilon_{n,x} \in [0,1[$ et le terme $f\left(\frac{k+1}{n}, y\right) - f\left(\frac{k}{n}, y\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, car la première application de f est continue. On a alors

$$f_n(x,y) = f\left(\frac{k}{n}, y\right) + \varepsilon_{n,x}\left(f\left(\frac{k+1}{n}, y\right) - f\left(\frac{k}{n}, y\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x,y)$$

D'où la résultat voulu.

Correction de l'exercice 4 :

On a pour tout $M = (m_{i,j})_{i,j\in[\![1;n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$\det M = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} m_{i,\sigma(i)}$$

L'application det est alors polynômiale et donc continue. Or $GL_n(\mathbb{C}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$, il s'agit de l'image réciproque d'un ouvert par une application continue, c'est donc un ouvert.

Correction de l'exercice 5 :

On a $Z(P) = \tilde{P}^{-1}(\{0\})$, il s'agit de l'image réciproque d'un fermé par une application continue (car polnyômiale), c'est donc un fermé.
Supposons que $Z(P)$ n'est pas d'intérieur vide. Il existe alors $\varepsilon > 0$ et $x = (x_1, \dots, x_n) \in Z(P)$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset Z(P)$. P s'annule alors sur $B(x,\varepsilon) = B_{d_1}(x_1,\varepsilon)\times\cdots\times B_{d_n}(x_n,\varepsilon)$. Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $B_{d_i}(x_i,\varepsilon)$ est infinie. P s'annule sur le produit d'ensembles infinis, il est donc nul ce qui est absurde. On en déduit donc que $Z(P)$ est bien fermé d'intérieur vide.

Correction de l'exercice 6 :

On peut écrire P de la manière suivante

$$P(X,Y) = \sum_{k=0}^{N} Q_k(Y)X^k$$

avec $Q_N \neq 0$.

- → Cas $N = 0$
  Lorsque $N = 0$, alors Q_0 est nécessairement non nul et admet au moins une racine qu'on note a. On a alors pour tout $x \in \mathbb{C}$, $\tilde{P}(x,a) = 0$ ce qui implique que $\mathbb{C}\times\{a\} \subset Z(P)$. $Z(P)$ est donc infini.
- → Cas $N \geq 1$
  $A = \{a \in \mathbb{C}, Q_N(a) \neq 0\}$ est infini. soit $a \in A$. $x \longmapsto \tilde{P}(x,a)$ est une fonction polynômiale de degré N, elle admet donc au moins une racine b et donc $(a,b) \in Z(P)$. A étant infini, on peut construire une infinité de couples d'élèments distincts de $Z(P)$, $Z(P)$ est alors bien infini.

* *
*

Document compilé par Omar Bennouna et révisé par Issam Tauil le 22/12/2021 pour cpge-paradise.com.
Si vous repérez une erreur, ou avez des remarques, prière de me contacter via l'adresse contact@cpge-paradise.com.