CHAPITRE 11.5

Compacité

Dans ce chapitre, on considère X un espace metrique muni d'une distance d.

I Valeurs d'adhérence

Proposition I.1.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans X et $a \in X$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. $\forall \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N,\ x_n \in B(a, \varepsilon)$
2. Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble des indices n tels que $d(x_n, a) < \varepsilon$ est infini.
3. Il existe une extractrice φ tell que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.

Lorsque ces propriétés sont vérifiées, on dit que a est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Preuve

→ (1) ⇒ (2)
La proposition (1) implique que pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble des indices $n \in \mathbb{N}$ telle que $d(a, x_n) < \varepsilon$ est non borné. Il est donc infini.

→ (2) ⇒ (3)
Construisons par récurrence une extractrice φ qui vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(a, x_{\varphi(n)}) < \frac{1}{n+1}$. Pour $n = 0$, l'ensemble $A_0 = \{n \in \mathbb{N},\ d(a, x_n) < 1\}$ est infini donc non vide. On pose alors $\varphi(0) = m$ avec $m \in A$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\varphi(0), \varphi(1), \ldots, \varphi(n)$ sont correctement définis.
L'ensemble $A_n = \{k \in \mathbb{N},\ d(a, x_k) < \frac{1}{n+2}\}$ est infini. On dispose donc de $r \in A_n$ tel que pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $r > \varphi(i)$. On pose alors $\varphi(n+1) = r$, ce qui donne bien $d(a, x_{\varphi(n+1)}) < \frac{1}{n+2}$.

→ (3) ⇒ (1)
Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, donc il existe $n' \geq N$ tel que $x_{\varphi(n')} \in B(a, \varepsilon)$, il suffit alors de voir que $n = \varphi(n')$ vérifie la propriété voulue.

Notation : pour toute suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$, on note $Adh((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de (x_n). Pour simplifier, et lorsqu'il n'y a pas ambiguïté, on notera $Adh((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ comme $Adh(x_n)$.

Proposition I.2.

Pour toute suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$, on a $Adh(x_n) = \bigcap\limits_{p\in\mathbb{N}} \overline{\{x_n,\ n \geq p\}}$.

Preuve Posons pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A_p = \{x_n,\ n \geq p\}$

→ (⊂) Soit $a \in Adh(x_n)$. On a alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n \geq p$ tel que $x_n \in B(a, \varepsilon)$, i.e. $A_p \cap B(a, \varepsilon) \neq \varnothing$.
On peut alors affirmer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a \in \overline{A_p}$, i.e. $a \in \bigcap\limits_{p\in\mathbb{N}} \overline{A_p}$.

→ (⊃) Soit $a \in \bigcap\limits_{p\in\mathbb{N}} \overline{A_p}$. Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. $a \in \overline{A_N}$, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \geq N$ tel que $x_n \in B(a, \varepsilon)$, i.e. $a \in Adh(x_n)$.

(cc) BY-NC-SA

II Définitions et propriétés structurelles

Définition II.1.

L'espace metrique (X, d) est dit compact lorsque toute siute à aleurs dans X admet une valeur d'adhérence dans A.
Une partie A de X est dite compacte si elle l'est pour la distance induite.

Exemples

→ Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a \leq b$, $[a, b]$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$.

→ $\mathbb{R}$ n'est pas compact pour la distance induite par la valeur absolue. En effet, si on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$, on peut voir que toute extractrice de u_n tend vers l'infini et donc (u_n) n'admet pas de valeur d'adhérence.

→ $\overline{\mathbb{R}}$ est compact pour la distance $d : (x, y) \longmapsto |\arctan(x) - \arctan(y)|$ (avec $\arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$ et $\arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$).

Proposition II.2.

1. Si A est une partie compacte de X, alors A est fermée et bornée.
2. Soit Y une partie de X et A une partie de Y. Si Y est compact, alors
$$A \text{ est compact} \iff A \text{ est fermé}$$

Preuve

1. Soit A une partie compacte de X.
   → Montrons que A est fermé.
   Soit $a \in \overline{A}$. Par définition, il existe une suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers A. A est compact, il existe donc une extractrice φ telle que $(a_{\varphi(n)})$ converge vers $b \in A$. Par unicité de la limite, on a $a = b \in A$ et finalement $A = \overline{A}$, i.e. A est fermé.
   → Montrons que A est borné.
   Si A est non borné, alors par définition il existe une suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ et $a \in A$ tel que $d(a, a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Aucune suite extraite ne peut alors converger car pour toute extractice φ et $x \in A$, $d(x, a_{\varphi(n)}) \geq d(a, a_{\varphi(n)}) - d(x, a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
2. (⇒) Le sens de gauche à droite est une simple conséquence de la propriété précédente.
   (⇐) Supposons que A est fermé. Soit $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$. Y est compact, il existe donc une extractrice φ et un élément x de Y tel que $a_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$. A étant fermé, on a nécessairement $x \in A$ et donc A est compact.

III Produit d'espaces compacts

Proposition III.1.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_p$ des compacts munis des distances $d_1, \ldots, d_p$. L'espace produit $X_1 \times \cdots \times X_p$ est compact.

(cc) BY-NC-SA

Preuve : Procédons par récurrence.

→ Le cas $p = 1$ est évident.

→ Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Supposons que p vérifie la propriété voulue. Soit $X_1, \dots, X_{p+1}$ $p+1$ compacts et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((x_{1,n}, \dots, x_{p+1,n}))_{n\in\mathbb{N}}$.
L'espace produit $X_1 \times \cdots \times X_p$ étant compact par hypothèse, il existe une extractrice φ telle que $(y_{\varphi(n)}) = (x_{1,\varphi(n)}, \dots, x_{p,\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(a_1, \dots, a_p) \in X_1 \times \cdots \times X_p$. X_{p+1} est compact, il existe donc une extractrice ψ telle que la suite $(x_{p+1,\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $a_{p+1} \in X_{p+1}$.
On a alors

$$\begin{aligned} d(x_{\varphi\circ\psi(n)}, (a_1, \dots, a_{p+1})) &= \max_{i\in[\![1;p+1]\!]} d_i(x_{i,\varphi\circ\psi(n)}, a_i) \\ &\leq d(y_{\varphi\circ\psi(n)}, (a_1, \dots, a_p)) + d_{p+1}(x_{p+1,\varphi\circ\psi(n)}, a_{p+1}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{aligned}$$

La suite $(x_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc bien vers $(a_1, \dots, a_{p+1}) \in X_1 \times \cdots \times X_{p+1}$.
L'espace $X_1 \times \cdots \times X_{p+1}$ est donc bien compact.

Proposition III.2.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A une partie de $\mathbb{R}^n$ munie de $\|.\|_\infty$. A est compact si et seulement si il est fermé et borné.

Preuve

(⇒) Cette implication a déjà été montrée auparavant.

(⇐) Supposons que A est fermée et bornée. A étant borné, il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $a \in A$, $\|a\|_\infty \leq M$. On a alors $A \subset [-M, M]^n$. $[-M, M]$ étant compact, $[-M, M]^n$ est un produit de compacts de $\mathbb{R}$, c'est donc un compact. A est fermé borné et est inclus dans un compact, il est donc compact d'après ce qui précéde.

Conséquence : par équivalence des normes en dimension finie, si on munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme quelconque $\|.\|$, l'équivalence ci-dessus reste vraie.

Attention : cette équivalence est fausse en dimension infinie en général. En effet, pour le voir, il suffit de considérer l'exemple suivant.
On considère l'espace vectoriel normé $E = \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_2$ définie par

$$\forall f \in E \ \ \|f\|_2 = \left(\int_0^{2\pi} f(t)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

On considère la suite à la valeurs dans E $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x \longmapsto \sin(nx))_{n\in\mathbb{N}}$.
On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^{2\pi} \sin(nt)^2 dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2nt)}{2} = \pi$$

Donc (f_n) est une suite à valeurs dans $B_f(0, \pi)$ qui est une partie fermée bornée de E. et pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $m \neq m$,

$$\|f_n - f_m\|_2^2 = \int_0^{2\pi} (\sin(nt) - \sin(mt))^2 dt = \int_0^{2\pi} \sin(nt)^2 + \sin(mt)^2 - 2\sin(nt)\sin(mt)dt = 2\pi$$

on en déduit que pour toute extractrice φ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\left\|f_{\varphi(n)} - f_{\varphi(n+1)}\right\|_2 = \sqrt{2\pi}$ et donc $(f_{\varphi(n)})$ ne peut pas converger.
En résumé, on a trouvé une suite (f_n) à valeurs dans un fermé borné dont aucune suite extraite ne converge, donc $B_f(0, \pi)$ est fermé borné mais n'est pas compact.

(cc) BY-NC-SA

Définition III.3.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans X. On dit que (u_n) est de Cauchy si

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \forall m \geq N,\ d(u_n, u_m) < \varepsilon$$

Remarque : toute suite convergente est de Cauchy. Montrons ce résultat. Soit $\varepsilon > 0$ si $(u_n) \in X^{\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite $u \in X$, il suffit de prendre $N \in \mathbb{N}$ assez grand pour qu'on ait pour tout $n \geq N$, $d(u_n, u) < \frac{\varepsilon}{2}$. On a alors pour tout $n, m \geq N$, $d(u_n, u_m) \leq d(u_n, u) + d(u_m, u) < \varepsilon$.

Attention : la réciproque est fausse. En effet, si on considère l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}[X]$ muni de $\|.\|_1$, et la suite $(P_n) \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} X^k$$

Montrons que cette suite de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$, on a pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, si $n > m$, alors

$$\|P_n - P_m\|_1 = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{2^k} \leq \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^m}$$

Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ assez grand tel que pour tout $n, m > N$, $\frac{1}{2^m} < \varepsilon$ et alors $\|P_n - P_m\|_1 < \varepsilon$, donc (P_n) est de Cauchy.
En revanche, cette suite n'est pas convergente. En effet, pour tout polynôme Q de degré m, pour tout $n > m$,

$$\|P_n - Q\| \geq \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{2^k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2^m} \neq 0$$

(P_n) ne peut donc pas converger vers Q et alors (P_n) n'est pas convergente.

Définition III.4.

On dit que X est complet lorsque toute suite à valeurs dans X de Cauchy converge.

IV Suites dans un compact

Proposition IV.1.

Si X est compact, alors il est complet.

Preuve : supposons que X est compact. Soit $(u_n) \in X^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Soit φ une extractrice et $u \in X$ tels que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} u$. Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, n \geq N$ $d(u_n, u_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $N' \in \mathbb{N}$ tel pour tout $n \geq N'$ $d(u_{\varphi(n)}, u) < \frac{\varepsilon}{2}$. On a alors

$$\forall n \geq \max(N, N'),\ d(u_n, u) \leq d(u_n, u_{\varphi(n)}) + d(u_{\varphi(n)}, u) < \varepsilon$$

(u_n) est bien convergente et donc X est complet.

Remarque : la preuve ci-dessus nous dévoile un résultat utile : peu importe l'espace X, une suite $(u_n) \in X^{\mathbb{N}}$ de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence est convergente. Plus généralement, une suite

(cc) BY-NC-SA

de Cauchy admet au plus une seule valeur d'adhérence.
Attention : la réciproque de ce résultat est fausse. En effet, $\mathbb{R}$ est complet mais n'est pas compact. Montrons ce résultat. Si $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $m, n \geq N$, $|u_n - u_m| < \varepsilon$. En prenant $\varepsilon = 1$, on voit que pour tout $n \geq N$, $|u_n - u_N| < 1$. On en déduit donc immédiatement que (u_n) est bornée par $\max(|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{N-1}|, |u_N|) + 1$. On peut donc appliquer Bolzano-Weierstrass pour affirmer que (u_n) admet une valeur d'adhérence. (u_n) est une suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence, elle est donc convergente et donc $\mathbb{R}$ est complet.

Proposition IV.2.

On suppose que X est compact. Soit $(u_n) \in X^{\mathbb{N}}$. On a alors

$$(u_n) \text{ converge} \iff (u_n) \text{ admet au plus une valeur d'adhérence}$$

Preuve

($\Rightarrow$) Cette implication ne présente pas de difficulté et est laissée comme exercice au lecteur.

($\Leftarrow$) Par compacité de X, (u_n) admet au moins une valeur d'adhérence, donc (u_n) admet exactement une valeur d'adhérence qu'on note u. Supposons que (u_n) ne converge pas vers u. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $A_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N},\ d(u_n, u) \geq \varepsilon\}$ est infini. On considère alors φ une extractrice telle que $\varphi(\mathbb{N}) \subset A_\varepsilon$. Par construction, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(u_{\varphi(n)}, u) \geq \varepsilon$. Mais $(u_{\varphi(n)})$ est à valeurs dans le compact X, donc il existe $x \in X$ et ψ une extractrice telle que $u_{\varphi\circ\psi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$, mais $\varepsilon \leq d(u_{\varphi\circ\psi(n)}, u) \xrightarrow[n\to+\infty]{} d(x, u)$, donc $x \neq u$. On a trouvé une valeur d'adhérence de (u_n) différente de u ce qui est absurde.

Exercice IV.3.

Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et $(u_n) \in (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ vérifiant les propriétés suivantes.

1. (u_n) est bornée.
2. (u_n) possède un nombre fini de valeurs d'adhérences.
3. $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Montrer que (u_n) est convergente.

Exercice IV.4.

Supposons que X est compact. Soit (u_n) une suite à valeurs dans X. Montrer que

$$d(u_p, Adh(u_n)) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$$

Exercice IV.5.

Supposons que X est compact. Soit $f \in \mathcal{C}(X, X)$ et (u_n) une suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \in X \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

On pose $A = Adh(u_n)$. Montrer que $f(A) = A$.

BY-NC-SA

Exercice IV.6.

Soit Y un espace metrique muni d'une distance δ. On pose pour tout $f \in Y^X$,

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in X\} \subset X \times Y$$

1. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}(X, Y)$, Γ_f est fermé dans $X \times Y$.
2. Donner un exemple de X, Y et f vérifiant f discontinue et Γ_f fermé.
3. On suppose que Y est compact. Montrer que si Γ_f est fermé, alors f est continue.

V Uniforme continuité

Théorème (Heine) V.1.

Soit Y un espace metrique muni d'une distance δ et $f \in \mathcal{C}(X, Y)$. Si X est compact, alors f est uniformément continue.

Preuve : commencons par écrire la définition de l'uniforme continuité de f

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ \forall x, y \in X,\ d(x, y) < \eta \Longrightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Supposons que la négation de cette proposion est vraie, i.e.

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0\ \exists x, y \in X,\ d(x, y) < \eta \text{ et } \delta(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$$

Il existe donc un certain $\varepsilon > 0$ pour lequel il existe deux suites (x_n) et (y_n) à valeurs dans X vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ d(x_n, y_n) < \frac{1}{n+1} \text{ et } \delta(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$$

X étant compact, il existe une extractrice φ telle que $(x_{\varphi(n)})$ est convergente. De même, il existe une extractrice ψ telle que $(y_{\varphi\circ\psi(n)})$ soit convergente. Or, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$d(x_{\varphi\circ\psi(n)}, y_{\varphi\circ\psi(n)}) < \frac{1}{\varphi\circ\psi(n) + 1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$(x_{\varphi\circ\psi(n)})$ et $(y_{\varphi\circ\psi(n)})$ ont donc la même limite. On a alors par continuité de f

$$\varepsilon \leq \delta(f(x_{\varphi\circ\psi(n)}), f(y_{\varphi\circ\psi(n)})) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

ce qui est absurde. On en déduit donc que f est uniformément continue.

Exercice V.2.

Soit $f \in \mathcal{C}([0,1]^2, \mathbb{R})$, montrer que $\varphi : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \sup\limits_{y\in[0,1]} f(x, y) \end{cases}$ est continue.

(cc) BY-NC-SA

VI Optimisation sur un compact

Proposition VI.1.

Soit Y un espace metrique muni d'une distance δ et $f \in \mathcal{C}(X, Y)$.

1. Si X est compact, alors $f(X)$ est compact.
2. Si $X \neq \varnothing$ et $Y = \mathbb{R}$, alors f est bornée et atteint ses bornes.

Preuve

1. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $f(X)$. Il existe une suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = y_n$. Comme X est compact, il existe une extractrice φ telle que $(x_{\varphi(n)})$ converge vers un élément x de X. Par continuité de f, on a
$$y_{\varphi(n)} = f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x) \in f(X)$$
on en déduit donc que $f(X)$ est compact.
2. D'après le point précédent, $f(X)$ est compact donc c'est un fermé borné, cet ensemble contient alors sa borne supérieure et sa borne inférieure car c'est les limites de suites à valeurs dans $f(X)$. On en déduit qu'il exsite $a, b \in X$ tel que $f(a) = \sup f(X)$ et $f(b) = \inf f(X)$. f est donc bornée et atteint ses bornes.

Corollaire VI.2.

Si X est compact, F fermé dans X et $f \in \mathcal{C}(X, Y)$, alors $f(F)$ est fermé dans Y.

Preuve : F est un fermé dans un compact, c'est donc un compact et alors $f(F)$ est compact et finalement c'est un fermé dans Y.

Exercice VI.3.

On suppose que X est compact. Soit $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ bijective. Montrer que f^{-1} est continue.

Exercice VI.4.

Soit $f, g \in \mathcal{C}([0, 1], [0, 1])$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer qu'il existe $a \in [0, 1]$ tel que $f(a) = g(a)$.

Exercice VI.5.

Soit E un espace vectoriel normé muni d'une norme $\|.\|$. Soit A et B deux parties de E. On pose
$$A + B = \{a + b,\ (a, b) \in A \times B\}$$
dire lesquelles des propositions suivantes sont vraies.

1. Si A ou B est ouvert, alors $A + B$ est ouvert.
2. Si A et B sont compacts, alors $A + B$ est compact.
3. Si A est compact et B est fermé, alors $A + B$ est fermé.
4. Si A et B sont fermés alors $A + B$ est fermé.

(cc) BY-NC-SA

Exercice VI.6.

On suppose que X est compact non vide. Soit $f \in X^X$. telle que

$$\forall (x,y) \in X^2,\ x \neq y \Longrightarrow d(f(x), f(y)) < d(x,y)$$

1. Montrer que f admet un unique point fixe l.
2. Considérons la suite $(u_n) \in X^{\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 \in X \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

   Montrer que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$.

VII Compléments

1. Recouvrement fini d'un compact

Proposition VII.1.

On suppose que X est compact. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_p$ tels que

$$X = \bigcup_{k=1}^{p} B(a_k, \varepsilon)$$

Preuve : Supposons que

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall (a_1, \ldots, a_p) \in X^p,\ \bigcup_{k=1}^{p} B(a_k, \varepsilon) \subsetneq X$$

Soit $\varepsilon > 0$ vérifiant la propriété ci-dessus. Construisons la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ de la manière suivante : On prend tout d'abord $a_0 \in X$ au hasard. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que a_n est bien défini. $A_n = X \setminus \bigcup_{k=0}^{n} B(a_k, \varepsilon)$ est non vide, on peut donc prendre a_{n+1} dans A_n. Par contruction, on a pour tout $n \neq m$, $d(a_n, a_m) \geq \varepsilon$ et donc pour toute extractrice φ, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(a_{\varphi(n)}, a_{\varphi(n+1)}) \geq \varepsilon$. $(a_{\varphi(n)})$ ne peut donc pas converger et alors X n'est pas compact ce qui est absurde.

Exercice VII.2.

On suppose que X est compact.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

   $$\exists (x_1, \ldots, x_N) \in X^N,\ \forall i \neq j,\ d(x_i, x_j) \geq \varepsilon\ (*)$$

   et tel que toute famille de points $y_1, \ldots, y_n$ vérifiant la propriété $(*)$ est de cardinal inférieur à N (i.e. $n \leq N$).
2. Soit $f : X \longrightarrow X$ une isométrie. Montrer que f est surjective.

BY-NC-SA

2. Fermés emboités

Proposition VII.3.

On suppose que X est compact. Pour toute suite de fermés non vides décroissante pour l'inclusion $(F_n)_{n\in N} \in \mathcal{P}(X)^{\mathbb{N}}$, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$.

Preuve : Soit (x_n) une suite à valeurs dans X telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in F_n$ (cette suite existe car tous les F_n sont non vides). La suite (F_n) étant décroissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $i \leq n$, $x_n \in F_i$. X étant compact, il existe une extractrice φ telle que $(x_{\varphi(n)})$ converge vers un élément x de X. On a alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, la suite $(x_{\varphi(n)})$ est à valeurs dans F_p à partir d'un certain rang donc x est limite d'une suite à valeurs dans F_p, i.e. $x \in \overline{F_p} = F_p$. On a donc pour tout $p \in \mathbb{N}$, $x \in F_p$ et alors $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ et finalement $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$.

Corollaire VII.4.

On suppose que X est compact. Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs dans $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$. Si pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers $f(x)$, alors (f_n) converge uniformément vers f.

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \{x \in X,\ \ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$. Remarquons tout d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n est l'image réciproque d'un fermé par une fonction continue, c'est donc un fermé dans X. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $x \in F_{n+1}$, alors $|f_{n+1}(x) - f(x)| \geq \varepsilon$, i.e. $f(x) - \varepsilon \geq f_{n+1}(x)$ mais $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$, donc $f(x) - \varepsilon \geq f_n(x)$ et finalement $x \in F_n$. La suite (F_n) est donc décroissante.

- → S'il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $F_{n_\varepsilon} = \varnothing$, alors pour tout $n \geq n_\varepsilon$, $F_n = \varnothing$ et alors $\forall n \geq n_\varepsilon,\ \forall x \in X,\ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
- → Sinon, toutes les hypothèses de la propriété précédente sont vérifiées, on peut donc affirmer que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$. Soit $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$, donc $(f_n(x))$ ne converge pas vers $f(x)$ ce qui est absurde.

On peut donc affirmer l'existence de $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_\varepsilon$ et pour tout $x \in X$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, i.e. (f_n) converge uniformément vers f.

Exercice VII.5.

Montrer que $[0,1]^{\mathbb{N}}$ muni de la distance $d : ((x_n),(y_n)) \longmapsto \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{|x_k - y_k|}{2^k}$ est compact.

Exercice VII.6.

Soit $\sum z_n$ une série complexe absolument convergente. On note

$$K = \left\{ z \in \mathbb{C},\ \exists A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ z = \sum_{n\in A} z_n \right\}$$

En utilisant l'exercice précédent, montrer que K est compact.

(cc) BY-NC-SA

Correction de l'exercice IV.3. :

Nous allons montrer que (u_n) est à valeurs dans un compact et admet au plus une valeur d'adhérence. Une fois cela fait, on peut directement appliquer la propriété précédente pour affirmer que (u_n) converge.
Posons $A = \{a_1, \ldots, a_p\}$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) avec $p \in \mathbb{N}^*$ (on peut dire que $p \geq 1$ car (u_n) est à valeurs dans un compact non vide)
Supposons que $|A| > 1$. Posons $\varepsilon = \frac{1}{3} \min\limits_{i,j \in [\![1;p]\!], i<j} \|a_i - a_j\| > 0$. Pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, l'ensemble
$C = \left\{ n \in \mathbb{N},\ u_n \in X \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{p} B(a_i, \varepsilon) \right\}$ est fini et donc borné.
Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $n \notin C$ et $\|u_{n+1} - u_n\| < \varepsilon$. Soit $n_1 \geq N$ tel que $u_{n_1} \in B(a_1, \varepsilon)$, $n_2 \geq n_1$ tel que $u_{n_2} \notin B(a_1, \varepsilon)$ et $k = \max\{l \in [\![n_1; n_2]\!],\ u_l \in B(a_1, \varepsilon)\}$.
On a par construction $u_k \in B(a_1, \varepsilon)$ et $\exists i \neq 1\ u_{k+1} \in B(a_i, \varepsilon)$. On a donc

$$\begin{aligned}
\|u_k - u_{k+1}\| &= \|u_k - a_1 + a_1 - a_i + a_i - u_{k+1}\| \\
&\geq \|a_1 - a_i\| - \|u_k - a_1\| - \|u_{k+1} - a_i\| \\
&\geq 3\varepsilon - \varepsilon - \varepsilon = \varepsilon
\end{aligned}$$

ce qui est absurde car $k \geq N$, donc $|A| \leq 1$.
Considérons M un majorant de $(\|u_n\|)$. (u_n) est à valeurs dans $B_f(0, M+1)$ qui est un fermé borné dans un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie. C'est donc un compact, ce qui nous permet de conclure.

Correction de l'exercice IV.4. :

Posons pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_p = d(u_p, Adh(u_n))$. Supposons que (ε_p) ne tend pas vers 0. Soit $\delta > 0$ tel que l'ensemble $A = \{p \in \mathbb{N},\ \varepsilon_p > \delta\}$ est infini et (u_n) est à valeurs dans un compact, on peut donc considérer une extractrice φ à valeurs dans A telle que $(u_{\varphi(p)})$ converge vers un certain $b \in Adh(u_n)$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $d(u_{\varphi(p)}, Adh(u_n)) > \delta$ et alors $\delta < d(u_{\varphi(p)}, b) \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$ ce qui est absurde.

Correction de l'exercice IV.5. :

Montrons successivement les inclusions dans les deux sens.

→ $f(A) \subset A$
Soit $a \in A$. Il existe une extractrice φ telle que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$. On a alors
$u_{\varphi(n)+1} = f(u_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(a)$. $f(a)$ est donc une valeur d'adhérence de (u_n), i.e. $f(a) \in A$. On conclut donc que $f(A) \subset A$.

→ $A \subset f(A)$
On reprend les notations du point précédent.
On considère l'extractrice $\varphi' : n \longmapsto \varphi(n) - 1$. Soit ψ une extractrice telle que $(u_{\varphi' \circ \psi(n)})_{n \geq 1}$ converge vers un certain $b \in A$. On a alors $f(u_{\varphi' \circ \psi(n)}) = f(u_{\varphi \circ \psi(n) - 1}) = u_{\varphi \circ \psi(n)}$. De plus, on a $f(u_{\varphi' \circ \psi(n)}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(b)$ et $u_{\varphi \circ \psi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$. On a donc finalement $a = f(b) \in f(A)$ et alors $A \subset f(A)$.

Correction de l'exercice IV.6. :

1. Soit $(w_n) = ((x_n, f(x_n)))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente à valeurs dans Γ_f. On pose (x, y) la limite de cette suite. On a $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$, donc $f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$. Mais on a aussi $f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} y$, donc $(x, y) = (x, f(x)) \in \Gamma_f$. La limite de (w_n) est dans Γ_f ce qui nous permet d'affirmer que Γ_f est fermé.

(cc) BY-NC-SA

2. Considérons la fonction f définie par

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{cases}$$

Posons $g : (x, y) \longmapsto xy - 1$. On a alors

$$\Gamma_f = g^{-1}(\{0\}) \cup \{(0, 0)\}$$

$g^{-1}(\{0\})$ est l'image réciproque d'un fermé par une fonction continue, c'est donc un fermé. $\{(0, 0)\}$ étant aussi un fermé, on en déduit que Γ_f est fermé dans $X \times Y$.

3. Soit $x \in X$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans X qui converge vers x. Considérons la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans Γ_f définie par $(w_n) = (x_n, f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Par hypothèse, Y est compact, il existe donc une extractrice φ tel que $(f(x_{\varphi(n)}))$ converge dans Y et donc $(w_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans Γ_f car c'est un fermé, i.e. il existe $y \in X$ tel que $w_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} (y, f(y))$. On a alors $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} y$ et $f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(y)$. Or $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$, donc $y = x$ et $f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$. On a donc montré que $(f(x_n))$ admet une unique valeur d'adhérence $f(x)$ et est à valeurs dans le compact Y, et par conséquence converge vers $f(x)$. D'où la continuité de f.

Correction de l'exercice V.2. :

Soit $x \in [0, 1]$ et $\varepsilon > 0$. f est continue sur le compact $[0, 1]^2$, donc d'après le théorème de Heine, f est uniformément continue. On dispose donc de $\eta > 0$ tel que

$$\forall (x, y), (x', y') \in [0, 1]^2, \ \ \|(x, y) - (x', y')\| < \eta \Longrightarrow |f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon$$

Soit x' tel que $|x - x'| < \eta$, on a alors pour tout $y \in [0, 1]$, $\|(x, y) - (x', y)\| = |x - x'| < \eta$ et donc

$$|f(x, y) - f(x', y)| < \varepsilon$$

i.e.

$$f(x', y) - \varepsilon < f(x, y) < f(x', y) + \varepsilon$$

En passant à la borne supérieure de chaque côté de l'inégalité, on obtient

$$\varphi(x') - \varepsilon \leq \varphi(x) \leq \varphi(x') + \varepsilon$$

i.e.

$$|\varphi(x) - \varphi(x')| \leq \varepsilon$$

d'où la continuité de φ.

Correction de l'exercice VI.3. :

→ **Méthode 1 :** Soit F un fermé de X. X étant compact, on peut affirmer que F est compact. f est continue, donc $f(F)$ est compact donc fermé. Or on a $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$, donc $(f^{-1})^{-1}(F)$ est fermé. La caractérisation des fonctions continues par image réciproque des fermés nous permet de conclure.

→ **Méthode 2 :** On va utiliser l'exercice IV.6. f est continue, donc Γ_f est fermé dans $X \times Y$. On considère l'application

$$i : \begin{cases} X \times Y & \longrightarrow Y \times X \\ (x, y) & \longmapsto (y, x) \end{cases}$$

cc BY-NC-SA

On a $\Gamma_{f^{-1}} = i(\Gamma_f)$ et i envoie les fermés su des fermés (preuve laissée en exercice), donc $\Gamma_{f^{-1}}$ est fermé dans $Y \times X$. X étant compact, l'exercice IV.6. nous donne que f^{-1} est continue.

→ **Méthode 3 :** Considérons (y_n) une suite à valeurs dans Y qui converge vers b. On pose $a = f^{-1}(b)$ et $(x_n) = (f^{-1}(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Pour montrer que f^{-1} est continue, il faut montrer que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.
(x_n) est à valeurs dans le compact X, on peut donc considérer a' une valeur d'adhérence de (x_n). Il existe une extractrice φ telle que $x_{\varphi(a)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a'$. On a par continuité de f, $f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a')$. Mais on a aussi $f(x_{\varphi(n)}) = y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$, donc $f(a') = b$, i.e. $a' = f^{-1}(b) = a$. On a alors montré que $(x_n$ admet une unique valeur d'adhérence qui est a. (x_n) étant à valeurs dans un compact, on peut déduire que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, d'où le résultat voulu.

Correction de l'exercice VI.4. :

Posons $A = \{x \in [0,1],\ g(x) = x\}$.

→ A est non vide.
En effet, en considérant $h = g - Id$, on a $h(0) = g(0) \geq 0$ et $h(1) = g(1) - 1 \leq 0$. h étant continue, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer qu'il existe $a \in [0,1]$ tel que $h(a) = 0$, i.e. $g(a) = a$. A est donc non vide

→ A est fermé, car il est égal à $h^{-1}(\{0\})$, qui est l'image réciproque d'un fermé par une fonction continue. A est une fermé inclus dans le compact $[0,1]$, il est donc compact et admet alors un minimum $\alpha = \min A$ et un maximum $\beta = \max A$ tel que $g(\alpha) = \alpha$ et $g(\beta) = \beta$. Or, $f(g(\alpha)) = f(\alpha) = g(f(\alpha))$. $f(\alpha)$ est donc un point fixe de g, i.e. $f(\alpha) \in A$. De même, on a $f(\beta) \in A$.
Posons $w = f - g$. On a $w(\alpha) = f(\alpha) - g(\alpha) = f(\alpha) - \alpha \geq 0$ et $w(\beta) = f(\beta) - g(\beta) = f(\beta) - \beta \leq 0$. w étant continue, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet donc d'affirmer qu'il existe $a \in [\alpha, \beta]$ tel que $w(a) = 0$, i.e. $f(a) = g(a)$.

Correction de l'exercice VI.5. :

1. Cette proposition est vraie.
Soit $a \in A$, $b \in B$, et $\varepsilon > 0$ tel que $B(a,\varepsilon) \subset A$ ou $B(b,\varepsilon) \subset B$. Soit $x \in B(a+b,\varepsilon)$. On peut écrire x comme $x = a + b + u$ tel que $\|u\| \leq \varepsilon$. On a alors $a + u \in B(a,\varepsilon) \subset A$ ou $b + u \in B(b,\varepsilon)$, donc $x \in A + B$ et finalement $B(a+b,\varepsilon) \subset A + B$. On en déduit donc que $A + B$ est ouvert.
2. Cette proposition est vraie.
Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $A + B$. On peut écrire $(w_n) = (a_n + b_n)_{n\in N}$ avec (a_n) et (b_n) deux suites à valeurs respectivement dans A et B. A est compact, il existe donc une extractrice φ et $a \in A$ tel que $a_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$. De même B étant compact et $(b_{\varphi(n)})$ étant à valeurs dans B, il existe une extractrice ψ et $b \in B$ tel que $b_{\psi\circ\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$. On a alors $a_{\psi\circ\varphi(n)} + b_{\psi\circ\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a + b$, d'où la compacité de $A + B$.
3. Cette proposition est vraie.
Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n + b_n)$ une suite à valeurs dans $A+B$ qui converge vers c. A étant compact, on peut considérer une extractrice φ telle que $a_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \in A$. On a alors $b_{\varphi(n)} = c_{\varphi(n)} - a_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} c - a$. B est fermé et $b_{\varphi(n)}$ est à valeurs dans B, ce qui nous permet de dire que $c - a \in B$. On en déduit que $c = \underbrace{a}_{\in A} + \underbrace{c - a}_{\in B} \in A + B$, donc $A + B$ est fermé.
4. Cette proposition est fausse.
En effet, il suffit de considérer le cas $A = \mathbb{Z}$ et $B = \sqrt{2}\mathbb{Z}$. $A + B = \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ est un sous groupe de $\mathbb{R}$, donc d'après l'exercice VI.4. du chapitre 11.2, il est soit égal à $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{R}$ ou alors il est dense dans $\mathbb{R}$. Le premier cas n'est pas possible (il est facile de montrer que cela implique que $\sqrt{2}$ est rationnel), donc $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Pour résumer, on a
   → $A = \mathbb{Z}$ fermé dans $\mathbb{R}$.

(cc) BY-NC-SA

→ $B = \sqrt{2}\mathbb{Z}$ fermé dans $\mathbb{R}$.
→ $\overline{A+B} = \overline{Z + \sqrt{2}\mathbb{Z}} = \mathbb{R} \neq A + B$, donc $A + B$ n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice VI.6. :

1. Existence et unicité du point fixe.
   → Existence
   On considère la fonction $\varphi : x \longmapsto d(x, f(x))$.
   - Montrons que φ est continue.
     Soit $x, y \in X$. On a

$$\begin{aligned}|\varphi(x) - \varphi(y)| &\leq |d(x, f(x)) - d(y, f(x))| + |d(y, f(x)) - d(y, f(y))| \\ &\leq d(x, y) + d(f(x), f(y)) \\ &\leq 2d(x, y)\end{aligned}$$

     φ est lipschitzienne et donc continue.
   - Montrons que φ atteint 0.
     X est compact donc φ y atteint son minimum, i.e. il existe $a \in X$ tel que $\varphi(l) = \inf_{x\in X} \varphi(x)$.
     Supposons que $l \neq f(l)$, i.e. $\varphi(l) \neq 0$.
     On a alors
     $$\varphi(f(l)) = d(f(l), f(f(l))) < d(l, f(l)) = \varphi(l)$$
     ce qui est absurde par construction. On en déduit donc que $\varphi(l) = 0$, i.e. $f(l) = l$ et donc que f admet un point fixe.

   → Unicité
   Soit a et a' deux points fixes de f qu'on suppose distincs. On a $d(a, a') = d(f(a), f(a')) < d(a, a')$ ce qui est absurde, d'où l'unicité du point fixe.
2. Considérons la suite $(\varepsilon_n) = (d(u_n, a))_{n\in\mathbb{N}}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\varepsilon_{n+1} = d(u_{n+1}, a) = d(f(u_n), f(a)) \leq d(u_n, a) = \varepsilon_n$$
   (ε_n) est donc décroissante minorée par 0, elle est alors convergente. Notons α sa limite.
   → Si $\alpha = 0$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ ce qui est bien le résultat voulu.
   → Supposons que $\alpha > 0$.
   X étant compact, on peut considérer a une valeur d'adhérence de u_n. Soit φ une extractrice telle que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$. Par continuité de $u \longmapsto d(l, u)$, $d(u_{\varphi(n)}, l) \xrightarrow[n\to+\infty]{} d(a, l)$, donc $d(a, l) = \alpha$. Or, $u_{\varphi(n)+1} = f(u_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$, donc $f(a)$ est aussi une valeur d'adhérence de (u_n). Par un raisonnement similaire à ce qui précéde, $f(a)$ étant une valeur d'adhérence de (u_n), on peut affirmer que $d(f(a), l) = \alpha$. On a alors
   $$\alpha = d(f(a), l) = d(f(a), f(l)) < d(a, l) = \alpha$$
   ce qui est absurde, donc a bien $\alpha = 0$, d'où le résultat voulu. La dernière inégalité provient du fait que $a \neq l$ car $f(a) = f(l)$ entrainerait $\alpha = 0$ ce qui est faux par hypothèse.

Correction de l'exercice VII.2. :

1. Posons $A = \{n \in \mathbb{N},\ \exists(y_1, \dots, y_n) \in X^n \text{ vérifiant } (*)\}$. Il est facile de voir que $1 \in A$. En utilisant la caractérisation d'un compact par recouvrement fini d'ouverts, on dispose de $p \in \mathbb{N}^*$ tel que
   $$X = \bigcup_{k=1}^{p} B\left(a_k, \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

(cc) BY-NC-SA

Soit $n > p$ et $y_1, \dots, y_n \in X^n$. Par principe des tiroirs, il existe $(k, i, j) \in \mathbb{N}^{*3}$, tel que $i \neq j$, $y_i \in B\left(a_k, \frac{\varepsilon}{3}\right)$ et $y_j \in B\left(a_k, \frac{\varepsilon}{3}\right)$. On a alors

$$d(y_i, y_j) \leq d(y_i, a_k) + d(a_k, y_j) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

A est donc une partie de $\mathbb{N}$ majorée par p, elle admet donc un maximum qu'on note N. N vérifie bien la propriété voulue.

2. **Rappel :** $f : X \longrightarrow X$ est une isométrie si $\forall (x, y) \in X^2,\ d(f(x), f(y)) = d(x, y)$.
On pose $N = \max A$ et on considère $x_1, \dots, x_N$ vérifiant $(*)$. Posons pour tout $i \in [\![1; N]\!]$, $f(x_i) = y_i$. f étant une isométrie, on a pour tout $i \neq j$, $d(y_i, y_j) \geq d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$, i.e. $y_1, \dots, y_N$ vérifie $(*)$.

   → Montrons que $X = \bigcup_{k=1}^{N} B(y_k, \varepsilon)$.
   Supposons que $X \setminus \bigcup_{k=1}^{N} B(y_k, \varepsilon) \neq \varnothing$. On dispose alors de $z \in X \setminus \bigcup_{k=1}^{N} B(y_k, \varepsilon)$. Par contruction, $(y_1, \dots, y_N, z)$ est une famille de cardinal $N + 1$ qui vérifie $(*)$ ce qui est absurde. On en déduit donc qu'on a bien $X = \bigcup_{k=1}^{N} B(y_k, \varepsilon)$.

   → Montrons finalement que f est surjective.
   On a $\{y_1, \dots, y_N\} \subset f(X)$ et $X = \bigcup_{k=1}^{N} B(y_k, \varepsilon)$, donc pour tout $z \in X$,

$$d(z, f(X)) \leq d(z, \{y_1, \dots, y_N\}) \leq \varepsilon$$

   Cette ingalité est valable pour tout ε, ce qui nous donne que pour tout $z \in X$, $d(z, f(X)) = 0$, i.e. $z \in \overline{f(X)}$. X est compact et f est continue car c'est une isométrie, on a donc que $f(X)$ est compact, donc $\overline{f(X)} = f(X)$.
   En résumé, on a que $X \subset \overline{f(X)} = f(X)$ ce qui nous donne que $f(X) = X$, i.e. f est surjective.

Correction de l'exercice VII.5. :

Soit $((x_{k,n})_{n\in\mathbb{N}})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $[0, 1]^{\mathbb{N}}$.
On va définir par récurrence une suite d'extractrices $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

→ φ_0 est une extractrice telle que $x_{\varphi_0(k),0} \xrightarrow[k\to+\infty]{} x_0 \in [0, 1]$. Cette extractrice existe car la suite $(x_{k,0})_{k\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans le compact $[0, 1]$.

→ Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que φ_n est bien définie, on définit alors φ_{n+1} comme une extractrice telle que la suite $x_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_n\circ\varphi_{n+1}(k),n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_{n+1} \in [0, 1]$. Encore une fois, cette extractrice existe car la suite $(x_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_n(k),n+1})_{k\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans le compact $[0, 1]$.

Considérons à présent l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{N} & \longrightarrow \mathbb{N} \\ n & \longmapsto \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(n) \end{cases}$$

Montrons qu'il s'agit bien d'une extractrice. Pour cela, il faut montrer que φ est strictement croissante. Soit $l, k \in \mathbb{N}$ tel que $l < k$. On a

$$\varphi(k) = \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_l \circ \underbrace{\varphi_{l+1} \circ \cdots \circ \varphi_k}_{\psi}(k)$$

ψ est une extractrice car c'est une composition d'extractrices, on a alors $\psi(k) \geq k > l$. De plus $\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_l$

(cc) BY-NC-SA

est strictement croissante car c'est une composition de fonctions strictement croissantes, on a alors :

$$\varphi(k) = \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_l \circ \psi(k) \geq \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_l(k) > \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_l(l) = \varphi(l)$$

donc φ est bien une extractrice.
Montrons à présent que pour la distance d, on a $(x_{\varphi(k),n})_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $\varepsilon > 0$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{\varphi(k),n} \xrightarrow[k\to+\infty]{} x_n$, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists K_n \in \mathbb{N},\ \forall k \geq K_n,\ \ \left|x_{\varphi(k),n} - x_n\right| \leq \varepsilon$$

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2^N} \leq \varepsilon$ et soit $K = \max\{K_1, \dots, K_N\}$. On a pour tout $k \geq K$

$$\begin{aligned} d((x_{\varphi(k),n})_{n\in\mathbb{N}}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left|x_{\varphi(k),n} - x_n\right|}{2^n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\left|x_{\varphi(k),n} - x_n\right|}{2^n} + \sum_{n=N}^{\infty} \frac{\left|x_{\varphi(k),n} - x_n\right|}{2^n} \\ &\leq \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\varepsilon}{2^n} + \sum_{n=N}^{\infty} \frac{2}{2^n} \\ &\leq 2\varepsilon + \frac{4}{2^N} \leq 6\varepsilon \end{aligned}$$

On a donc trouvé une suite extraite de $((x_{k,n})_{n\in\mathbb{N}})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $[0,1]^{\mathbb{N}}$ pour la distance d, ce qui montre bien que $[0,1]^{\mathbb{N}}$ est compact pour cette distance.

Correction de l'exercice VII.6. :

On pose $X_c = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Une preuve quasi-identique à celle de l'exercice précédent permet d'affirmer que X_c muni de la distance d vue dans cet exercice est compact.
Pour toute partie A de $\mathbb{N}$, on considère la fonction

$$1_A : x \longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On considère également l'application

$$f : \begin{cases} X_c & \longrightarrow K \\ (\varepsilon_n) & \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n z_n \end{cases}$$

Cette application est définie correctement et est surjective (pour la surjectivité, il suffit d'utiliser les suites de la forme $(\varepsilon_n) = (1_A(n))_{n\in\mathbb{N}}$).
Si on montre que f est continue, alors $f(X_c) = K$ est compact car il s'agit de l'image d'un compact par une application continue. Montrons donc que f est continue.
Soit $\varepsilon > 0$ et $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X_c$. Pour tout $\eta > 0$ et $(\gamma_n) \in X_c$, on a

$$d((\varepsilon_n), (\gamma_n)) < \eta \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \ |\varepsilon_n - \gamma_n| < 2^n \eta$$

donc pour tout $N \in \mathbb{N}$, lorsque $\eta < \frac{1}{2^N}$, on a pour tout $n \in [\![0; N]\!]$, $|\varepsilon_n - \gamma_n| < 2^n\eta < 1$, i.e. $\varepsilon_n = \gamma_n$.

BY-NC-SA

On a alors pour tout $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $N \in \mathbb{N}$,

$$d((\varepsilon_n),(\gamma_n)) < \frac{1}{2^N} \Longrightarrow |f((\varepsilon_n)) - f((\gamma_n))| \leq \left|\sum_{k=N+1}^{\infty} (\varepsilon_k - \gamma_k) z_k\right| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |z_k|$$

En prenant $N \in \mathbb{N}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=N+1}^{\infty} |z_k| < \varepsilon$, on obtient

$$d((\varepsilon_n),(\gamma_n)) < \frac{1}{2^N} \Longrightarrow |f((\varepsilon_n)) - f((\gamma_n))| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |z_k| \leq \varepsilon$$

ce qui montre la continuité de f et par conséquent la compacité de K.

* *
*

Document compilé par Omar Bennouna et révisé par Issam Tauil le 12/01/2022 pour cpge-paradise.com.
Si vous repérez une erreur, ou avez des remarques, prière de me contacter via l'adresse contact@cpge-paradise.com.

(cc) BY-NC-SA