CHAPITRE 11.6

Applications linéaires continues

I Quelques propriétés

Dans ce chapitre, on considère deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimension quelconque E et F munis respectivement des normes $\|.\|_E$ et $\|.\|_F$, où $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Proposition I.1.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On a

$$u \text{ est continue } \iff \exists C > 0,\ \forall x \in E,\ \|u(x)\|_F \leq C \|x\|_E$$

Preuve

($\Leftarrow$) On a pour tout $y \in E$,

$$\|u(x) - u(y)\| = \|u(x - y)\| \leq C \|x - y\| \xrightarrow[x \to y]{} 0$$

Donc u est bien continue.

($\Rightarrow$) Pour cette implication, on va uniquement ultiliser le fait que u est continue en 0.
Montrons que u est bornée sur $B_f(0, 1)$. u étant continue en 0, il existe $r > 0$ tel que

$$\forall x \in B_f(0, r),\ \|u(x)\|_F \leq 1$$

ici, on a utilisé la définition de la continuité en 0 en prenant $\varepsilon = 1$. Soit $x \in B_f(0, 1)$, on a $rx \in B_f(0, r)$ et alors $\|u(rx)\|_F \leq 1$. On en déduit donc que

$$\forall x \in B_f(0, 1),\ \|u(x)\|_F \leq \frac{1}{r}$$

On notant $C = \frac{1}{r}$, on a pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $\left\| u\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right)\right\|_F \leq C$, i.e.

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\|_F \leq C \|x\|_E$$

d'où le résultat voulu.

Proposition I.2.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. les propositions suivantes sont équivalentes

1. u est continue.
2. u est continue en 0.
3. u est continue en un point de E.
4. u est lipschitzienne.
5. u est bornée sur $S(0, 1)$.
6. u est bornée sur $B_f(0, 1)$.
7. u est bornée sur une boule non réduite à un point.

Preuve

→ Les implications (1) ⇒ (2) ⇒ (3) sont évidentes.

→ (3) ⇒ (4) Si u est continue en un point $a \in E$, alors $u(x+a) \xrightarrow[x \to 0]{} u(a)$, donc

$$u(x) = u(x+a) - u(a) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

u est donc continue en 0 et donc d'après la preuve de la proposition I.1., u est lipschitzienne.

→ (4) ⇒ (5) si u est lipschitzienne de facteur de lipschitzianité $k \geq 0$, alors on a pour tout $x \in S(0,1)$,

$$\|u(x)\|_F = \|u(x) - u(0)\|_F \leq k\,\|x\|_E = k$$

donc u est bornée sur $S(0,1)$.

→ (5) ⇒ (6) Soit M un majorant de $x \longmapsto \|u(x)\|_F$ sur $S(0,1)$. On a pour tout $x \in B_f(0,1) \setminus \{0\}$,

$$\|u(x)\|_F = \|x\|_E \left\| u\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right) \right\|_F \leq M\,\|x\|_E \leq M$$

donc u est bien bornée sur $B_f(0,1)$.

→ (6) ⇒ (7) Cette implication est évidente.

→ (7) ⇒ (1) Soit $(a,r) \in E \times \mathbb{R}_+^*$ tel que u est bornée sur $B_f(a,r)$ et M un majorant de $x \longmapsto \|u(x)\|_F$ sur $B_f(a,r)$. On a pour tout $x \in B_f(0,1)$,

$$r\,\|u(x)\|_F - \|u(a)\|_F \leq \|u(a+rx)\|_f \leq M$$

et alors

$$\|u(x)\|_F \leq \frac{M + \|u(a)\|_F}{r} := C$$

On en déduit que pour tout $x \in E \setminus \{0\}$,

$$\|u(x)\|_F = \|x\|_E \left\| u\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right) \right\| \leq C\,\|x\|_E$$

la proposition I.1. nous permet donc d'affirmer le fait que u est continue.

Proposition I.3.

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ continue. Les trois nombres suivants sont égaux.

1. $\sup\limits_{x \in B_f(0,1)} \|u(x)\|_F$
2. $\sup\limits_{x \in S(0,1)} \|u(x)\|_F$
3. $\inf\{C \geq 0,\ \forall x \in E,\ \|u(x)\|_F \leq C\,\|x\|_E\}$

De plus, lorsque E est de dimension finie, les bornes inférieusres (2) et (1) sont atteinte alors que (3) est atteinte peu importe la dimension de E. On appelle ce nombre norme d'opérateur de u et on le note $|||u|||$.

Preuve

→ (1) = (2)

- On a $S(0,1) \subset B_f(0,1)$, donc (1) ≥ (2)

- On a pour tout $x \in B_f(0,1) \setminus \{0\}$,

$$\|u(x)\|_F = \|x\|_E \left\| u\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right) \right\| \leq \|x\|_E \sup_{y \in S(0,1)} \|u(y)\|_F \leq \sup_{x \in S(0,1)} \|u(x)\|_F$$

On en déduit donc que (1) $\leq$ (2) et que finalement (1) = (2).

$\rightarrow$ (2) = (3) On a

$$\begin{aligned}
(3) &= \inf \{C \geq 0,\ \forall x \in E,\ \|u(x)\|_F \leq C \|x\|_E\} \\
&= \inf \left\{ C \geq 0,\ \forall x \in E \setminus \{0\},\ \left\| u\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right) \right\|_F \leq C \right\} \\
&= \inf \{C \geq 0,\ \forall x \in S(0,1),\ \|u(x)\|_F \leq C\} \\
&= \sup_{x \in S(0,1)} \|u(x)\|_F = (2)
\end{aligned}$$

Or, $(2) \in \{C \geq 0,\ \forall x \in E,\ \|u(x)\|_F \leq C \|x\|_E\}$, donc la borne inférieure (3) est bien atteinte.

Notation : On note $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'ensemble des application linéaires continues de E dans F.

Proposition I.4.

$|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$.

Preuve : La preuve est laissée comme exercice au lecteur.

Proposition I.5.

Soit G un espace vectoriel normé, $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}_c(F,G)$. On a

$$|||v \circ u||| \leq |||v||| \times |||u|||$$

Preuve : on a pour tout $x \in E$,

$$\|v \circ u(x)\|_G \leq |||v|||\, \|u(x)\|_F \leq |||v||| \times |||u|||\, \|x\|_E$$

On peut alors dire par définition de la norme d'opérateur que $|||v \circ u||| \leq |||v||| \times |||u|||$.

Remarque : en pratique, pour une application linéaire $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$ donnée, on peut calculer $|||u|||$ en utilisant l'égalité suivante :

$$|||u||| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

Application : On peut utiliser cette nouvelle définition de la continuité d'une application linéaire pour énoncer une nouvelle formulation des résultats de comparaison de normes.
Soit N_1 et N_2 deux normes sur l'espace vectoriel normé E. On a

$$\begin{aligned}
N_1 \text{ plus fine que } N_2 &\iff \exists C > 0,\ \forall x \in E,\ N_2(x) \leq C N_1(x) \\
&\iff \text{L'application linéaire } Id : \begin{cases} (E,N_1) & \longrightarrow (E,N_2) \\ x & \longmapsto x \end{cases} \text{ est continue.} \\
&\iff \text{Pour tout } \Omega \in \mathcal{P}(E),\ \Omega \text{ est ouvert dans } (E,N_2) \Longrightarrow Id^{-1}(\Omega) \text{ est ouvert dans } (E,N_1)
\end{aligned}$$

II Exercices

Exercice II.1.

1. On pose $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, $a \in [0,1]$ et $u \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ définie par $\forall f \in E,\ u(f) = f(a)$. Étudier la continuité de u pour les normes $\|.\|_\infty$, $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$.
2. On pose $F = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|$ définie par $\forall f \in F$, $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. On considère $v \in \mathcal{L}(F,E)$ définie par $\forall f \in F,\ v(f) = f'$. Étudier la continuité de v pour $\|.\|$ et $\|.\|_\infty$ lorsque E est muni de $\|.\|_\infty$.
3. Calculer $|||u|||$ pour $\|.\|_\infty$.
4. Soit $u \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ définie par $\forall f \in E,\ u(f) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} f\left(\frac{1}{2^n}\right)$. Montrer que u est bien définie, linéaire et continue pour $\|.\|_\infty$ mais que $|||u|||$ n'est pas atteinte.

Exercice II.2.

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes

1. u est continue
2. $\{x \in E,\ \|u(x)\|_F = 1\}$ est fermé dans E.

Exercice II.3.

On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit u un morphisme additif de E dans F borné sur $B_f(0,1)$. Montrer que u est une application linéaire continue.

Exercice II.4.

Soit $u \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes.

1. u est continue.
2. $\operatorname{Ker} u$ est fermé.

Exercice II.5.

Soit X un espace métrique compact. On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ muni de $\|.\|_\infty$.

1. Soit u une forme linéaire de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que
$$\forall f \in E,\ f \geq 0 \Longrightarrow u(f) \geq 0$$
Montrer que u est continue et trouver $|||u|||$.
2. Soit $\chi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ un morphisme d'anneau unitaire et linéaire, montrer que χ est continu.
3. Montrer qu'il existe $x_0 \in X$ tel que pour tout $f \in E$, $\chi(f) = f(x_0)$.

Correction de l'exercice II.1. :

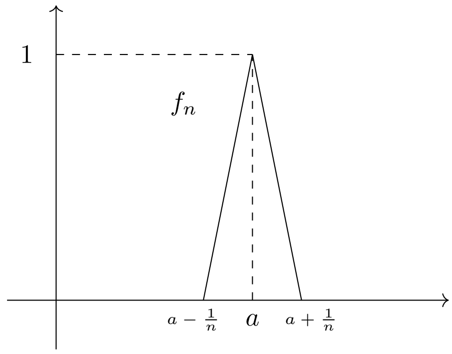
1. Étudions la continuité de u pour les 3 normes de l'énoncé.

   → Continuité pour $\|.\|_\infty$
   On a pour tout $f \in E$, $|u(f)| = |f(a)| \leq \|f\|_\infty$, donc u est continue pour $\|.\|_\infty$.

   → Continuité pour $\|.\|_1$
   On considère la suite de fonctions (f_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\ f_n(x) = \begin{cases} n\left(x - a + \frac{1}{n}\right) & \text{si } x \in \left[a - \frac{1}{n}, a\right] \\ n\left(-x + a + \frac{1}{n}\right) & \text{si } x \in \left[a, a + \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Pour comprendre l'intuition derrière cette construction, voici un dessin d'un terme de la suite (f_n).



   On a pour tout $n_0 \in \mathbb{N}^*$ assez grand pour qu'on ait $\left[a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right] \subset [0,1]$ et soit $n \geq n_0$,

$$\frac{|u(f)|}{\|f\|_1} = \frac{|f(a)|}{1/n} = n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

   Donc $\begin{cases} E \setminus \{0\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ f & \longmapsto \frac{u(f)}{\|f\|_1} \end{cases}$ est non bornée, et alors u n'est pas continue pour $\|.\|_1$.

   → Continuité pour $\|.\|_2$
   On pose $(g_n) = (\sqrt{f_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$. On a pour tout $n \geq n_0$,

$$\frac{|u(f)|}{\|f\|_2} = \frac{1}{\sqrt{1/n}} = \sqrt{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

   ce qui nous permet comme avant de conclure que u n'est pas continue pour $\|.\|_2$. La non continuité pour $\|.\|_2$ aurait aussi pu être démontrée en utilisant le fait que $\|.\|_2$ est plus fine que $\|.\|_1$.

2. Etudions la continuité de v pour les deux normes de l'énoncé.

   → Continuité pour $\|.\|$
   On a pour tout $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$, $\|v(f)\|_\infty = \|f'\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = \|f\|$. On en déduit donc que u est continue pour $\|.\|$.

   → Continuité pour $\|.\|_\infty$
   On considère la suite (f_n) de fonctions à valeurs dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ f_n(x) = e^{nx}$$

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\frac{\|v(f_n)\|_\infty}{\|f_n\|_\infty} = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$
Ce qui permet de dire que u n'est pas continue pour $\|.\|_\infty$.

3. On a pour tout $f \in E$, $|u(f)| \leq \|f\|_\infty$, donc $|||u||| \leq 1$. De plus, si on considère f la fonction constante égale à 1 sur $[0,1]$, on a $|u(f)| = \|f\|_\infty = 1$, ce qui nous permet d'affirmer que $|||u||| = 1$.

4. $\to$ Montrons que u est bien définie et linéaire.
Soit $f \in E$. f est continue donc bornée sur le segment $[0,1]$. Soit M un majorant de $|f|$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\left|\frac{(-1)^n}{2^n} f\left(\frac{1}{2^n}\right)\right| \leq \frac{M}{2^n}$$
Le terme de gauche est le terme générale d'une série convergence, donc la série $\sum \frac{(-1)^n}{2^n} f\left(\frac{1}{2^n}\right)$ est absolument convergente ce qui nous permet d'affirmer que u est bien définie.
On a aussi pour tout $f, g \in E$,
$$\begin{aligned} u(f+g) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}\left(f\left(\frac{1}{2^n}\right) + g\left(\frac{1}{2^n}\right)\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} f\left(\frac{1}{2^n}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} g\left(\frac{1}{2^n}\right) \\ &= u(f) + u(g) \end{aligned}$$
Donc u est bien linéaire.

$\to$ Montrons que u est continue
On a pour tout $f \in E$,
$$|u(f)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} f\left(\frac{1}{2^n}\right)\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \|f\|_\infty = 2\|f\|_\infty$$
donc u est bien continue et $|||u||| \leq 2$.

$\to$ Montrons que $|||u||| = 2$
Soit $(f_N)_{N\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $B_f(0,1)$ telle que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\forall n \leq N$, $f_N\left(\frac{1}{2^n}\right) = (-1)^n$ et $\|f_N\|_\infty \leq 1$. On alors pour tout $N \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} |u(f_N)| &= \left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} f_N\left(\frac{1}{2^n}\right)\right| = \left|\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} f_N\left(\frac{1}{2^n}\right)\right| \\ &= \left|2 - \frac{1}{2^N} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} f_N\left(\frac{1}{2^n}\right)\right| \\ &\geq 2 - \frac{1}{2^N} - \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \|f_N\|_\infty \\ &\geq 2 - \frac{1}{2^{N-1}} \xrightarrow[N\to\infty]{} 2 \end{aligned}$$
Par caractérisation séquentielle de la borne supérieure, on a $\sup\limits_{f\in B_f(0,1)} |u(f)| = 2$ et alors $|||u||| = 2$.

$\to$ Montrons finalement que $|||u|||$ n'est pas atteinte
Supposons le contraire. On dispose alors de $f \in E$ telle que $\|f\|_\infty = 1$ et $|u(f)| = 2$.

En supposant sans perte de généralité que $u(f) = 2$, on a que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} f\left(\frac{1}{2^n}\right) = 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

et alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \underbrace{\left(1 - (-1)^n f\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)}_{\geq 0} = 0$$

Il s'agit d'une somme de nombres positifs qui est nulle, donc tous les termes de la somme sont nuls. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f\left(\frac{1}{2^n}\right) = (-1)^n$. f n'admet pas de limite en 0 et n'est donc pas continue en 0, ce qui nous permet d'affirmer que $f \notin E$, ce qui est absurde.

Correction de l'exercice II.2. :

Posons $K = \{x \in E,\ \|u(x)\|_F = 1\}$.

→ (1) ⇒ (2) L'application $f : x \longmapsto \|u(x)\|_F$ est continue, donc $\{x \in E,\ \|u(x)\|_F = 1\} = f^{-1}(\{1\})$ est fermé car c'est l'image réciproque d'un fermé par une application continue.

→ (2) ⇒ (1) Procédons par contraposée. Supposons que u n'est pas continue, u n'est donc pas bornée sur $S(0,1)$. On dispose alors d'une suite $(x_n) \in S(0,1)^{\mathbb{N}}$ telle que $\|u(x_n)\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Soit n_0 assez grand pour qu'on ait pour tout $n \geq n_0$, $\|u(x_n)\| > 0$. On pose alors pour tout $n \geq n_0$, $y_n = \frac{x_n}{\|u(x_n)\|}$. Pour tout $n \geq n_0$, on a $y_n \in \{x \in E,\ \|u(x)\|_F = 1\}$ et

$$\|y_n\|_E = \frac{\|x_n\|_E}{\|u(x_n)\|_F} = \frac{1}{\|u(x_n)\|_F} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Mais $0 \notin K$. on a trouvé une suite à valeurs dans K qui converge vers un élément qui n'est pas dans cet ensemble. On en déduit que K n'est pas fermé.

Correction de l'exercice II.3. :

On a tout d'abord

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall x \in E,\ f(nx) = nf(x)$$

A partir de cette propriété, on peut facilement en déduire que

$$\forall r \in \mathbb{Q},\ \forall x \in E,\ f(rx) = rf(x)$$

Soit M un majorant de f sur $B_f(0,1)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et $(r_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ telle que $r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$. Soit $x \in E$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ il existe $N_p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $(r_n - \lambda)x \in B\left(0, \frac{1}{p}\right)$. On a alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $N_p \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N_p$,

$$\|f((r_n - \lambda)x)\| = \frac{1}{p} \|f(\underbrace{p(r_n - \lambda)x}_{\in B_f(0,1)})\| \leq \frac{M}{p}$$

i.e.

$$\|r_n f(x) - f(\lambda x)\| \leq \frac{M}{p}$$

On a alors

$$\|\lambda f(x) - f(\lambda x)\| \leq \frac{M}{p} + \|(r_n - \lambda)f(x)\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{M}{p}$$

On en déduit donc que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\|\lambda f(x) - f(\lambda x)\| \leq \frac{M}{p}$ et que finalement $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. On conclut que f est une application linéaire bornée sur $B_f(0,1)$, donc continue.

Correction de l'exercice II.4. :

→ (1) ⇒ (2) On a $\operatorname{Ker} u = u^{-1}(\{0\})$. Il s'agit de l'image réciproque d'un fermé par une application continue, c'est donc un fermé.

→ (2) ⇒ (1) Si $u = 0$, $\operatorname{Ker} u = E$ est fermé. Supposons donc maintenant que $u \neq 0$. $H = \operatorname{Ker} u$ est un hyperplan et u est surjective. Il existe donc $a \in E$ tel que $u(a) = 1$. On a alors

$$\forall x \in E,\ u(x) = 1 \Longleftrightarrow u(x-a) = 0 \Longleftrightarrow x \in a + H$$

de même, il est facile de voir que

$$\forall x \in E,\ u(x) = -1 \Longleftrightarrow u(x+a) = 0 \Longleftrightarrow x \in -a + H$$

Posons donc $F = (a+H) \cup (-a+H)$. $a+H$ et $-a+H$ sont fermés car ce sont les images directes du fermé H par respectivement $x \longmapsto a + x$ et $x \longmapsto -a + x$ qui sont deux application linéaires bijectives d'inverse continu, donc F est fermé. Or $0 \notin F$ et F^c est ouvert, donc il existe $r > 0$ tel que $B_f(0,r) \subset F^c$.
Montrons que pour tout $x \in B_f(0,r)$, $|u(x)| \leq 1$. Soit $x \in B(0,r)$ non nul. On suppose par l'absurde que $|u(x)| > 1$. On a alors $y := \frac{x}{|u(x)|} \in B(0,r)$ et $u(y) \in \{1, -1\}$, i.e. $y \in F$ ce qui est absurde étant donné que $y \in B(0,r) \subset F^c$. On a donc trouvé une boule non réduite à un point où u est bornée, ce qui nous permet d'affirmer que u est continue.

Correction de l'exercice II.5. :

1. On a pour tout $f, g \in E$,

$$f \geq g \Longrightarrow f - g \geq 0 \Longrightarrow u(f-g) \geq 0 \Longrightarrow u(f) \geq u(g)$$

Posons e la fonction constante égale à 1 sur X. On a pour tout $f \in E$,

$$-\|f\|_\infty e \leq f \leq \|f\|_\infty e$$

en posant $C = u(e)$ et en appliquant u de chaque côté de l'inégalité on obtient

$$-C\|f\|_\infty \leq u(f) \leq C\|f\|_\infty$$

et enfin

$$\forall f \in E,\ |u(f)| \leq C\|f\|_\infty$$

Donc u est continue et $|||u||| \leq C$, mais $u(e) = C$ et $e \in B_f(0,1)$, donc $|||u||| \geq C$, i.e. $|||u||| = C$.

2. Soit $f \in E$ tel que $f \geq 0$, on pose $g = \sqrt{f}$. On a $g \in E$ et

$$\chi(f) = \chi(g^2) = \chi(g)^2 \geq 0$$

Il suffit alors d'appliquer la question 1.

* *
*

Document compilé par Omar Bennouna et révisé par Issam Tauil le 01/03/2022 pour cpge-paradise.com.
Si vous repérez une erreur, ou avez des remarques, prière de me contacter via l'adresse contact@cpge-paradise.com.