CHAPITRE 11.8

Connexité

I Généralités

Définition I.1.

Soit (X, d) un espace métrique. Les propositions suivantes sont équivalentes

1. Si O_1 et O_2 sont deux ouverts de X tels que $X = O_1 \cup O_2$ et $O_1 \cap O_2 = \varnothing$, alors $O_1 = \varnothing$ ou $O_2 = \varnothing$.
2. Si F_1 et F_2 sont deux fermés de X tels que $X = F_1 \cup F_2$ et $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, alors $F_1 = \varnothing$ ou $F_2 = \varnothing$.
3. Si A est une partie à la fois fermée et ouverte de X, alors $A = X$ ou $A = \varnothing$.
4. Si f est une fonction continue de X dans $\{0, 1\}$, alors f est constante.

Lorsque l'une de ces propriétés est vérifiée, on dit que X est connexe.

Preuve

→ (1) ⇒ (2) Soit F_1 et F_2 deux fermés vérifiant $F_2 \cup F_2 = X$ et $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, et posons $O_1 = X \setminus F_1$ et $O_2 = X \setminus F_2$. O_1 et O_2 sont ouverts et $O_1 \cup O_2 = X$ et $O_1 \cap O_2 = \varnothing$, donc $O_1 = X$ et $O_2 = \varnothing$ ou $O_1 = \varnothing$ et $O_2 = X$, i.e. $F_1 = X$ et $F_2 = \varnothing$ ou $F_1 = \varnothing$ et $F_2 = X$.

→ (2) ⇒ (3) Soit A une partie fermée et ouverte de X. $F_1 = A$ et $F_2 = A^c$ vérifient les hypothèses de (2). Donc on a $A = \mathbf{X}$ et $A^c = \varnothing$ ou $A = \varnothing$ et $A^c = X$, d'où le résultat voulu.

→ (3) ⇒ (4) Posons $F_1 = f^{-1}(\{0\})$ et $F_2 = f^{-1}(\{1\})$. F_1 et F_2 sont fermés car il s'agit d'images réciproques de deux fermés par une fonctions continue. De plus, on a $F_1 \cup F_2 = X$ et $F_1 \cap F_2 = \varnothing$. On a alors $F_1 = X$ ou $F_2 = X$, i.e. $f^{-1}(\{0\}) = X$ ou $f^{-1}(\{1\}) = X$. f est alors toujours égale à 0 ou toujours égale à 1. On a donc bien le résultat voulu.

→ (4) ⇒ (1) Soit O_1 et O_2 deux ouverts vérifiant $O_1 \cup O_2 = X$ et $O_1 \cap O_2 = \varnothing$. On considère l'application de X dans $\{0, 1\}$ suivante :

$$f : \begin{cases} X & \longrightarrow \{0,1\} \\ x & \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \in O_1 \\ 1 \text{ si } x \in O_2 \end{cases} \end{cases}$$

f est continue car O_1 et O_2 sont ouverts, elle est donc constante. On a alors $O_1 = f^{-1}(\{0\}) = \varnothing$ et $O_2 = f^{-1}(\{1\}) = X$ ou $O_1 = f^{-1}(\{0\}) = X$ et $O_2 = f^{-1}(\{1\}) = \varnothing$, ce qui est bien ce qu'on cherchait.

Proposition I.2.

Soit I un ensemble et $(\Omega_i)_{i \in I}$ une partition d'ouverts d'un espace métrique connexe X. Il existe alors au plus un indice i_0 tel que $\Omega_{i_0} \neq \varnothing$.

Preuve : Soit i_0 tel que $\Omega_{i_0} \neq \varnothing$. Posons $\Omega = \bigcup_{i \in I \setminus \{i_0\}} \Omega_i$. On a alors $\Omega_{i_0} \cup \Omega = X$ et $\Omega_{i_0} \cap \Omega = \varnothing$. De plus Ω_{i_0} et Ω sont ouverts (car c'est l'union d'ouverts), donc X étant connexe, on a nécessairement $\Omega = \varnothing$, i.e. $\forall i \neq i_0,\ \Omega_i = \varnothing$.

Proposition I.3.

Si A est une partie connexe de l'espace métrique X alors $\overline{A}$ aussi.

Preuve : Soit $f : \overline{A} \longrightarrow \{0,1\}$ une application continue. f est continue sur A par restriction et A est connexe, donc f est constante sur A. $\overline{A}$ est dense dans A donc f étant continue, elle est aussi constante sur $\overline{A}$, donc $\overline{A}$ est bien connexe.

Remarque : Attention, si A est connexe, $\mathring{A}$ ne l'est pas forcément !

Proposition I.4.

Soit X et Y deux espaces métriques et $f \in \mathcal{C}(X,Y)$. Si A est une partie connexe de X, alors $f(A)$ est aussi une partie connexe de Y.

Preuve : Soit $g : f(A) \longrightarrow \{0,1\}$ une application continue. $g \circ f$ est une fonction continue de A dans $\{0,1\}$ car il s'agit de la composition de deux applications continues, elle est alors constante. On en déduit donc directement que $\exists c \in \{0,1\}$, $g \circ f(A) = \{c\}$, i.e. $g(f(A)) = \{c\}$. g est alors constante sur $f(A)$ ce qui nous permet d'affirmer que $f(A)$ est bien une partie connexe de Y.

II Parties connexes par arc

Dans cette partie, on considère (E,d) un espace métrique.

Proposition II.1.

$[0,1]$ est une partie connexe.

Preuve : Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\{0,1\})$. Supposons sans perte de généralité que $f(0) = 0$. On considère l'ensemble

$$A = \{x \in [0,1],\ \forall y \in [0,x],\ f(y) = 0\}$$

Posons $a = \sup A$. a est limite d'une suite à valeurs dans A, donc par continuité de f, on a $f(a) = 0$. Supposons que $a \neq 1$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in \left[a, a + \frac{1}{n}\right]$, $f(x_n) = 1$. La suite (x_n) converge vers a et donc

$$f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \neq f(a)$$

ce qui est absurde car f est continue.

Définition II.2.

1. On appelle arc continu toute application continue d'un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ dans E.
2. Une partie A de E est dite connexe par arcs si tous éléments x et y de A peuvent être reliés par un arc continu sur A, i.e.

$$\forall (x,y) \in A^2,\ \exists \gamma \in \mathcal{C}([0,1],A),\ \gamma(0) = x \text{ et } \gamma(1) = y$$

Remarque : Dans la définition de la connexité par arc, on aurait pu remplacer 0 par $a \in \mathbb{R}$ et 1 par $b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$ quelconques.

Définition II.3.

Soit $x, y, z \in E$, γ un arc continu reliant x et y et δ un arc continue reliant y et z. L'arc $\gamma \bullet \delta$ est défini par

$$\gamma \bullet \delta : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow E \\ y & \longmapsto \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \delta(2t-1) & \text{si } t \in \left]\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \end{cases}$$

Par construction $\gamma \bullet \delta$ est un arc continu reliant x à z. On dit que $\gamma \bullet \delta$ est la reliure des deux arcs γ et δ. $\bullet$ n'étant pas associative, pour trois arcs $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, on définit $\gamma_1 \bullet \gamma_2 \bullet \gamma_3$ comme $\gamma_1 \bullet (\gamma_2 \bullet \gamma_3)$.

Définition II.4.

Supposons que pour tout $t \in [0,1]$, $(1-t)a + tb \in E$. Pour tout $x, y \in E$, on définit l'arc $\theta(x, y)$ comme

$$\theta(x,y) : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow E \\ t & \longmapsto (1-t)x + ty \end{cases}$$

Par construction, $\theta(x, y)$ est bien un arc continu reliant x à y.

Remarque : Attention, ces deux dernières notations sont propres à ce cours en particulier et ne sont pas communes en classes préparatoires. Si vous souhaitez les utiliser, il faut les définir avant.

Proposition II.5.

Soit F un espace métrique et f une fonction continue de E dans F. L'image d'une partie de E connexe par arcs par f est connexe par arcs.

Preuve : Soit A une partie connexe par arcs de E. Soit $a, b \in f(A)$, et $x, y \in A$ tels que $a = f(x)$ et $b = f(y)$. A est connexe par arcs, il existe donc un arc $\gamma \in \mathcal{C}([0,1], A)$ tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. On a alors $f \circ \gamma$ est un arc continu reliant $a = f(x)$ et $b = f(y)$.

Proposition II.6.

Une partie A de E connexe par arcs est connexe.

Preuve : Soit $g : A \longrightarrow \{0,1\}$ une fonction continue. Soient x et y dans A. A est connexe par arcs, il existe donc un arc continu $\gamma \in \mathcal{C}([0,1], A)$ tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.
L'application $g \circ \gamma : [0,1] \longrightarrow \{0,1\}$ est continue et $[0,1]$ est connexe, donc elle est constante et alors $g(x) = g(y)$. On en déduit donc que g est constante et que par conséquent A est connexe.

Exemple : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs. En effet, l'application $f = \det$ est continue, donc si $GL_n(\mathbb{R})$ était connexe par arcs, $f(GL_n(\mathbb{R}))$ le serait aussi. Mais $f(GL_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R}^*$ qui n'est pas connexe par arcs.

Proposition II.7.

Soit A une partie de E.

1. La relation sur A^2 définie par
$$\forall x, y \in A,\ x \sim_A y \Longleftrightarrow \exists \gamma \in \mathcal{C}([0,1], A),\ \gamma(0) = x \text{ et } \gamma(1) = y$$
est une relation d'équivalence.
2. Les classes d'équivalence pour $\sim_A$ sont connexes par arcs. On appelle ces classes composantes connexes par arcs.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble A, on note $\sim$ aulieu de $\sim_A$.

Preuve

1. → Réflexivité
Soit Soit $x, y \in A$. Si $x \sim y$, alors il existe un arc $\gamma \in \mathcal{C}([0,1], A)$ reliant x et y. Il suffit alors de considérer $\tilde{\gamma} : a \longmapsto \gamma(1-a)$. L'arc $\tilde{\gamma}$ relie x et y et $\tilde{\gamma}(0) = y$ et $\tilde{\gamma}(1) = x$ et alors $y \sim x$.

→ Symétrie
Soit $x \in A$. L'arc $\gamma : t \longmapsto x$ constant sur $[0,1]$ relie x à x, donc $x \sim x$.

→ Transitivité
Soit $x, y, z \in A$ tels que $x \sim y$ et $y \sim z$. Soit $\gamma, \delta \in \mathcal{C}([0,1], A)$ deux arcs reliant respectivement x à y et y à z. On considère l'arc suivant
$$\beta = \gamma \bullet \delta : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow A \\ x & \longmapsto \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \delta(2t-1) & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \end{cases}$$
β est continu et $\beta(0) = x$ et $\beta(1) = z$, donc $x \sim z$.

Proposition II.8.

1. Une réunion de parties de E connexes par arcs ayant un point en commun est connexe par arcs.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \ldots, E_n$ des espaces métriques. Si pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, A_k est une partie connexe par arcs de E_k, alors $A_1 \times \cdots \times A_n$ est une partie connexe par arcs de l'espace métrique produit $E_1 \times \cdots \times E_n$.

Preuve

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de parties connexes par arcs tels que pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $a \in A_k$. Posons $A = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$. soit x et y deux points de A. Soit $k, l \in \mathbb{N}$ tels que $x \in A_k$ et $y \in A_l$.
On a a et x sont deux éléments de l'ensemble connexe par arcs A_k, donc $x \sim_{A_k} a$ donc $x \sim_A a$ et a et y sont deux éléments de l'ensemble connexe par arcs A_l, donc $a \sim_{A_l} y$ donc $a \sim_A y$. On en déduit donc par transitivité que $x \sim y$ et que finalement A est connexe par arcs.
2. Soit $a = (a_1, \ldots, a_n)$ et $b = (b_1, \ldots, b_n)$ deux éléments de $E_1 \times \cdots \times E_n$. Pour tout $k \in [\![1; k]\!]$, il existe un arc γ_k reliant a_k et b_k. Considérons l'arc sur $E_1 \times \cdots \times E_n$, $\gamma : t \longmapsto (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$. L'arc γ est continu et relie a et b, donc $A_1 \times \cdots \times A_n$ est bien connexe par arcs.

Exercice II.9.

Soit Ω une union d'ouverts disjoints de $\mathbb{R}$. On écrit

$$\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]a_n, b_n[$$

avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n < b_n$. Montrer que Ω n'est pas connexe par arcs.

Exercice II.10.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $z_1, \dots, z_p \in \mathbb{C}$. Montrer que $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_p\}$ est connexe par arcs.

Exercice II.11.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et H un hyperplan de $\mathbb{C}^n$. Montrer que $\mathbb{C}^n \setminus H$ est connexe par arcs.

Exercice II.12.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et H un hyperplan de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\mathbb{R}^n \setminus H$ n'est pas connexe par arcs.

Exercice II.13.

Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$. Montrer que Ω est connexe par arcs polygonaux, i.e. pour tous points x, y de E, x et y peuvent être reliés par un arc affine par morceaux.

III Application aux fonctions à variables réelles

Proposition III.1.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. A est connexe par arcs.
2. A est un intervalle.

Preuve

→ (2) $\Rightarrow$ (1) Pour tout $a, b \in A$ tel que $a < b$, si on considère l'application continue $f_{a,b} : x \longmapsto (b-a)x + a$, alors $f_{a,b}$ est un arc continu liant a à b donc $a \sim b$. A est donc connexe par arcs.

→ (1) $\Rightarrow$ (2) soit $x, y \in A$ et $z \in]x, y[$. Soit γ un arc continu reliant x et y. Posons

$$S_z = \{t \in [0,1],\ \gamma(t) \leq z\} = \gamma^{-1}([x, z])$$

S_z est fermé car il s'agit de l'image réciproque d'un fermé par la fonction continue γ et de plus, S_z est non vide car $1 \in S_z$, donc $c = \sup S_z \in S_z$, i.e. $\gamma(c) \leq z$ et $c < 1$ car $1 \notin S_z$. On a aussi pour tout $t \in]0, 1-c]$, $\gamma(c+t) > z$. En faisant tendre t vers 0, on obtient par continuité de γ que $\gamma(c) \geq z$, et alors $\gamma(c) = z$. On en déduit donc que $z \in A$, donc $[x, y] \subset A$ et finalement que A est un intervalle.

Conséquence : Si I est un intervalle et f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$, alors I est continu par arcs donc $f(I)$ aussi, i.e. $f(I)$ est un intervalle.

Proposition III.2.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. f est injective.
2. f est strictement monotone.

Preuve

→ (2) ⇒ (1) Supposons que f soit injective et donc dans perte de généralité strictement croissante. Pour tout $x, y \in I$, si $x \neq y$, on suppose sans perte de généralité que $x > y$. Par stricte monotonie de f, on a que $f(x) > f(y)$ et alors $f(x) \neq f(y)$. f est donc bien injective,.

→ (1) ⇒ (2) Posons $\Delta = \{(x, y) \in I^2,\ x < y\}$ et considérons l'application

$$\varphi : \begin{cases} \Delta & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto f(y) - f(x) \end{cases}$$

Le fait que f soit injective est équivalent au fait que φ ne s'annule pas sur Δ, donc φ est à valeurs dans $\mathbb{R}^*$. Δ est convexe donc connexe par arcs. En effet, si a et b sont deux points de Δ, l'arc continu

$$\gamma : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow \Delta \\ t & \longmapsto ta + (1 - t)b \end{cases}$$

lie a et b dans Δ. Or φ est continue, $\varphi(\Delta)$ est alors une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}^*$ et donc un intervalle. Deux cas de présentent alors

- $\varphi(\Delta) \subset]0, +\infty[$ donc f est strictement croissante.
- $\varphi(\Delta) \subset] - \infty, 0[$ donc f est strictement décroissante.

On a donc bien le résultat voulu.

Proposition III.3.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{R}$.

1. Si f est monotone, alors les propositions suivantes sont équivalentes.
   (a) f est continue.
   (b) $f(I)$ est un intervalle.
2. Si f est continue et injective, alors $f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$ est continue.

Preuve

1. Supposons que f est monotone.

   → $(a) \Rightarrow (b)$ I est connexe par arcs et f est continue, donc $f(I)$ est aussi connexe par arcs i.e. c'est un intervalle.

   → $(b) \Rightarrow (a)$ Supposons sans perte de généralité que f soit croissante. Nous allons traiter uniquement le cas où f admet un point de discontinuité sur l'intérieur de I. Le lecteur pourra essayer de faire le cas d'une discontinuité aux bords de l'intervalle. Supposons que f admettes un point de discontinuité x_0 sur l'intérieur de I. On note respectivement $f(x_0^+)$ et $f(x_0^-)$ les limites à droite et à gauche de x_0 des f. On a alors $f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+)$ et $f(x_0^-) < f(x_0^+)$. Soit $y_0 \in]f(x_0^-), f(x_0^+)[\setminus \{f(x_0)\} := A_0$. On a pour tout $t \in I$,

   - Si $t < x_0$, alors $f(t) \leq f(x_0^-)$ et donc $f(t) \neq y_0$
   - Si $t = x_0$, alors $f(t) = f(x_0) \neq y_0$

- Si $t > x_0$, alors $f(t) \geq f(x_0^+)$, donc $f(t) \neq y_0$.

On en déduit que $y_0 \notin f(I)$ et y_0 est compris entre deux éléments de $f(I)$. $f(I)$ n'est donc pas un intervalle.

2. Il suffit d'appliquer la question précédente et la proposition III.2. f est une fonction continue sur l'intervalle I et injective, elle est donc strictement monotone d'après la proposition III.2. f^{-1} est alors aussi strictement monotone. De plus, on a $f^{-1}(f(I)) = I$ et I et $f(I)$ sont des intervalles, donc d'après (1), f^{-1} est continue.

Exercice III.4.

Soit f une fonction de $[0,1]$ dans $[0,1]$ telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$, $\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{p \text{ fois}} = Id$. Supposons que $f(0) = 0$ Montrer que $f = Id$.

Exercice III.5.

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ telle que $f \times (1 - f') = 0$. Déterminer f.

Exercice III.6.

Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.

Exercice III.7.

Posons $S(0,1) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$. Montrer que $S(0,1)$ n'est homéomorphe à aucune partie $\mathbb{R}$.

Exercice III.8.

Soit $f : S(0,1) \longrightarrow S(0,1)$ une fonction injective et continue. Montrer que f est un homéomorphisme.

Correction de l'exercice II.9. :

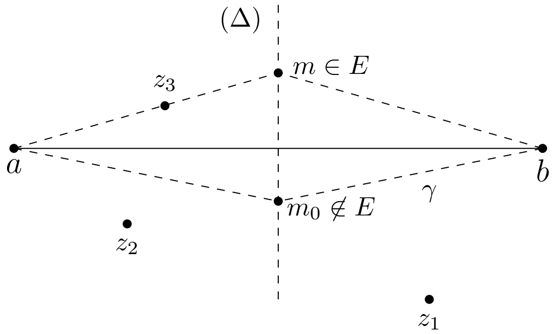
Méthode 1 : Soit $n, m \in \mathbb{N}$ deux entiers naturels différents, $x \in]a_n, b_n[$ et $y \in]a_m, b_m[$. Supposons par l'absurde que Ω soit connexe par arcs. Il existe un arc γ liant $x$et y. On suppose sans perte de généralité que $b_n \leq a_m$. On a $\gamma(0) = x < b_n < y = \gamma(1)$ et γ est continue. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in]0, 1[$, $\gamma(c) = b_n$, mais $b_n \notin \Omega$ ce qui absurde car γ est à valeurs dans Ω par hypothèse.
Méthode 2 (plus simple) : En posant pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_k =]a_k, b_k[$, on peut partionner Ω en deux ouverts, par exemple $O_1 = A_0$ et $O_2 = \bigcup_{k\geq 1} A_k$. On a $O_1 \cup O_2 = \Omega$, $O_1 \cap O_2 = \varnothing$, $O_1 \neq \varnothing$ et $O_2 \neq \varnothing$. Ω n'est donc pas connexe et alors pas connexe par arcs.

Correction de l'exercice II.10. :

Soit $a, b \in S = \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_p\}$. Considérons les deux ensembles suivants :

→ $\Delta = \{x \in \mathbb{C},\ |x - a| = |x - b|\}$ la médiatrice du segment $[a, b]$.

→ $E = \{m \in \Delta,\ \exists k \in [\![1; p]\!],\ z_k \in [a, m] \cup [b, m]\}$.



$|E| \leq p$, donc E est fini. On peut donc considérer $m_0 \in \Delta \setminus E$ car cet ensemble est non vide. Il suffit alors de considérer l'arc

$$\gamma = \theta(a, m_0) \bullet \theta(m_0, b) : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow S \\ t & \longmapsto \begin{cases} 2tm_0 + (1-2t)a & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ (2t-1)b + 2(1-t)m_0 & \text{si } t \in \left]\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \end{cases}$$

γ est un arc continu à valeurs dans S qui lie a à b en passant par m_0, donc S est bien connexe par arcs.

Correction de l'exercice II.11. :

Soit H un hyperplan de $\mathbb{C}^n$ et φ une forme linéaire non nulle telle que $\operatorname{Ker} \varphi = H$. Posons $S = \mathbb{C}^n \setminus H$ et montrons que S est connexe par arcs. Soit $a, b \in S$

→ Si $\varphi(a) = \varphi(b)$, alors pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $\varphi((1-\lambda)a + \lambda b) = \varphi(a) \neq 0$. Il suffit alors de considérer l'arc $\gamma = \theta(a, b) : t \longmapsto (1-t)a + tb$. Cet arc est bien à valeurs dans S et lie a et b.

→ Si $\varphi(a) \neq \varphi(b)$, alors on considère $K_{a,b} = \{\lambda \in \mathbb{C},\ \varphi((1-\lambda)a + \lambda b) = 0\}$.
$\varphi((1-\lambda)a + \lambda b) = 0 \Longleftrightarrow \lambda = \frac{\varphi(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} := \lambda_{a,b}$, donc on a $K_{a,b} = \{\lambda_{a,b}\}$.
D'après l'exercice précédent, on dispose d'un arc γ liant a et b dans $\mathbb{C} \setminus \{\lambda_{a,b}\}$. Considérons Γ l'arc défini par

$$\Gamma : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow S \\ t & \longmapsto (1 - \gamma(t))a + \gamma(t)b \end{cases}$$

Γ est bien à valeurs dans S car pour tout t, $\Gamma(t) \in H$ impliquerait que $\gamma(t) = \lambda_{a,b}$ ce qui est impossible. Γ lie a à b dans S, S est donc bien connexe par arcs.

Correction de l'exercice II.12. :

Soit H un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ et φ une forme linéaire non nulle telle que $\operatorname{Ker}\varphi = H$. Considérons les deux ensembles $A_+ = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \varphi(x) > 0\}$ et $A_- = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \varphi(x) < 0\}$. On a $\mathbb{R}^n \setminus H = A_+ \cup A_-$. Soit $x \in A_+$ et $y \in A_-$. Supposons par l'absurde qu'il existe un arc γ liant x et y. L'application $\varphi \circ \gamma$ est continue et $\varphi \circ \gamma(0) = \varphi(x) > 0 > \varphi(y) = \varphi \circ \gamma(1)$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in]0,1[$, $\varphi \circ \gamma(c) = 0$, i.e. $\gamma(c) \in H$ ce qui est absurde. On en déduit donc que $\mathbb{R}^n \setminus H$ n'est pas connexe par arcs.
Méthode 2 (plus simple) : A_+ et A_- sont deux ouverts disjoints non vides dont l'union fait $\mathbb{R}^n \setminus H$, $\mathbb{R}^n \setminus H$ n'est alors pas connexe donc pas connexe par arcs.

Correction de l'exercice II.13. :

Soit $a \in \Omega$. Considérons A la composante connexe par arcs polygonaux de a dans Ω. Montrer que Ω est connexe par arcs polygonaux revient à montrer que $A = \Omega$. Ω étant connexe par arcs donc connexe, une idée serait de montrer que A est ouvert et fermé dans Ω.

→ Montrons que A est ouvert.
Soit $x \in A$. Il existe un arc polygonal γ reliant a et x. Ω étant ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset \Omega$. soit $y \in B(x,\varepsilon)$. $B(x,\varepsilon)$ est convexe, $\theta(x,y)$ est donc un arc continu polygonal (c'est un segment) reliant x à y dans $B(x,\varepsilon)$ donc dans Ω. On en déduit donc que $\gamma \bullet \theta(x,y)$ est un arc polygonal qui relie a à y dans Ω, donc $y \in A$ et alors $B(x,\varepsilon) \subset A$. A est donc ouvert.

→ Montrons que $\Omega \setminus A$ est aussi ouvert.
Soit $b \in \Omega \setminus A$ et B la composante connexe par arcs de b. Par le raisonnement précédent, B est ouvert et contient b, c'est donc un voisinage de b inclus dans $\Omega \setminus A$. $\Omega \setminus A$ est donc ouvert. Ω est connexe et A est ouvert et fermé dans Ω, ce qui nous permet d'affirmer finalement que $A = \Omega$.

Correction de l'exercice III.4. :

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{p \text{ fois}} = Id$. Cette inégalité nous permet de dire que f est bijective sur un intervalle et alors par la proposition III.2., f est strictement monotone. $f(0) = 0$, donc f est strictement croissante. Supposons par l'absurde qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) < x$, on a alors

$$x > f(x) > f \circ f(x) > \cdots > \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{p \text{ fois}}(x) = x$$

ce qui est absurde. De même, on obtient la même contradiction lorsqu'on suppose que $f(x) < x$. Donc a bien que $f = Id$.

Correction de l'exercice III.5. :

Supposons que $f \neq 0$ et posons $A = \{x \in [0,1],\ f'(x) = 1\}$. Montrons que A est fermé et ouvert dans $[0,1]$ et est donc égal à $[0,1]$ par connexité de $[0,1]$.

→ A est fermé car c'est l'image réciproque du fermé $\{1\}$ par l'application continue f'.

→ Montrons que A est ouvert. Soit $a \in A$.

- Si $f(a) \neq 0$, alors par continuité de f, il existe un voisinage U de a où f est non nulle, et alors l'égalité $f \times (f' - 1) = 0$ entraîne que $f' = 1$ sur U, i.e. $U \subset$ A.
- Si $f(a) = 0$, alors on a

$$f(a+h) = f'(a)h + o(h) = h\underbrace{(1 + o(1))}_{\varepsilon(h)}$$

$\varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 1$, donc il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $h \in B_f(0,\eta) \setminus \{0\}$, $|\varepsilon(h)| > \frac{1}{2}$ et alors pour tout $h \in B_f(0,\eta) \setminus \{0\}$, $f(a+h) > \frac{h}{2} > 0$ et alors l'égalité $f \times (f' - 1) = 0$ entraîne

$f'(a+h) = 1$. On en déduit donc que $[a-h, a+h] \subset A$, donc A est bien ouvert et finalement $A = [0,1]$.

Finalement on déduit de ce qui précède que les fonctions $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ vérifiant $f \times (f'-1) = 0$ sont la fonction nulle et les fonctions de la forme $f : x \longmapsto x + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice III.6. :

Supposons par l'absurde que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ sont homéomorphes. Il existe alors une fonction f bijective continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ d'inverse continu. $\mathbb{R}^2 \setminus \{f(0)\}$ est connexe par arcs, f^{-1} est continue donc $f^{-1}(\mathbb{R}^2 \setminus \{f(0)\})$ est connexe par arcs d'après la proposition II.5 mais $f^{-1}(\mathbb{R}^2 \setminus \{f(0)\}) = \mathbb{R}^*$ et $\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe par arcs, ce qui est absurde.

Correction de l'exercice III.7. :

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Supposons que A est homéomorphe à $S(0,1)$, i.e. il existe un homéomorphisme $f : S(0,1) \longrightarrow A$. $S(0,1)$ est connexe par arcs, donc $A = f(S(0,1))$ est compact (c'est l'image d'un compact par une application continue) connexe par arcs, i.e. c'est un intervalle fermé, on pose alors $A = [a,b]$ avec $a < b$. Soit $c = \frac{a+b}{2}$ et $B = S(0,1) \setminus \{f^{-1}(c)\}$. B est connexe par arcs et f est continue, donc $f(B)$ est connexe par arcs. Mais $f(B) = A \setminus \{c\}$ et $A \setminus \{c\}$ n'est pas connexe par arcs ce qui est absurde.

Correction de l'exercice III.8. :

→ Si f est surjective, alors elle est bijective. Montrons que c'est bien un homéomorphisme. Pour tout fermé F de $S(0,1)$, $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ qui est fermé d'après le corollaire VI.2 du chapitre 11.5. On a montré que l'image réciproque de tout fermé de $S(0,1)$ par f^{-1} est fermé, donc f^{-1} est continue et finalement f est une homéomorphisme.

→ Si f n'est pas surjective, alors posons $f(S(0,1)) = S' \subset S(0,1)$. Quitte à composer par une rotation, on suppose que $-1 \notin f(S(0,1))$. Considérons l'application

$$Arg : \begin{cases} S' & \longrightarrow]-\pi, \pi[\\ x + iy & \longmapsto 2\arctan\left(\frac{y}{x+1}\right) \end{cases}$$

Soit $x + iy \in S'$. Posons $\theta = Arg(x+iy)$. On a

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \frac{1 - \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}{1 + \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)^2} = \frac{1 - \left(\frac{y}{x+1}\right)^2}{1 + \left(\frac{y}{x+1}\right)^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x + 1 - y^2}{x^2 + 2x + 1 + y^2} = \frac{2x^2 + 2x}{2x + 2} \\ &= \frac{2x(x+1)}{2(x+1)} = x \end{aligned}$$

On peut montrer de la même manière que $\sin(\theta) = y$, donc pour tout $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ dans $S(0,1)$, $Arg(z) = Arg(z')$ donne en composant par cos et sin que $x = x'$ et $y = y'$, i.e. $z = z'$. Donc Arg est bien injective.

Soit $g = Arg \circ f$. g est une injection continue de $S(0,1)$ dans $\mathbb{R}$ et $S(0,1)$ est connexe par arcs, donc il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $g(S(0,1)) = [a,b]$ (c'est un intervalle fermé car il s'agit de l'image d'un compact par une application continue, i.e. un compact). g est donc une bijection continue de $S(0,1)$ dans $[a,b]$ qui sont deux compacts, donc par un raisonnement similaire au début de l'exercice, g est un homéomorphisme. On a montré que $S(0,1)$ est homéomorphe à un segment de $\mathbb{R}$ ce qui est impossible d'après l'exercice précédent. On en déduit donc que f est bijective et que finalement que f est un homéomorphisme en se ramenant au premier cas.

* *
*

Document compilé par Omar Bennouna et révisé par Issam Tauil le 07/04/2022 pour cpge-paradise.com.
Si vous repérez une erreur, ou avez des remarques, prière de me contacter via l'adresse contact@cpge-paradise.com.